S I M E T R I J A

MMU, Rīga

1.2.2014.

cibulis@lanet.lv

Simetrija

Īss ieskats simetrijas izpausmēs matemātikā un citur

Vai visums būvēts pēc simetrijas principiem?

Literatūra un komentāri

ZPD tēmas:

Simetrisku figūru veidošana...

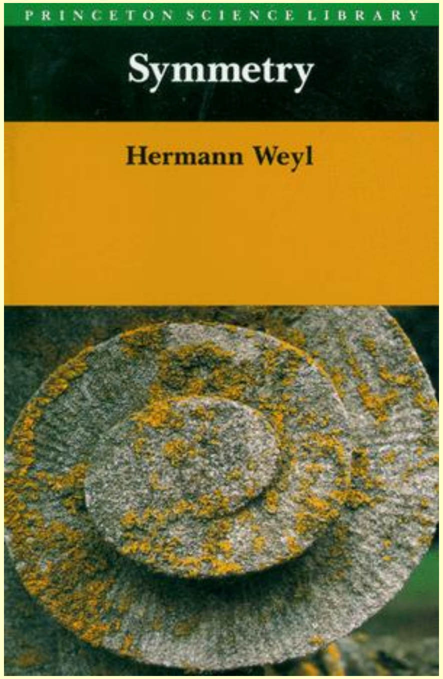
Simetrijas princips spēlēs

Uzdevumi par simetriju

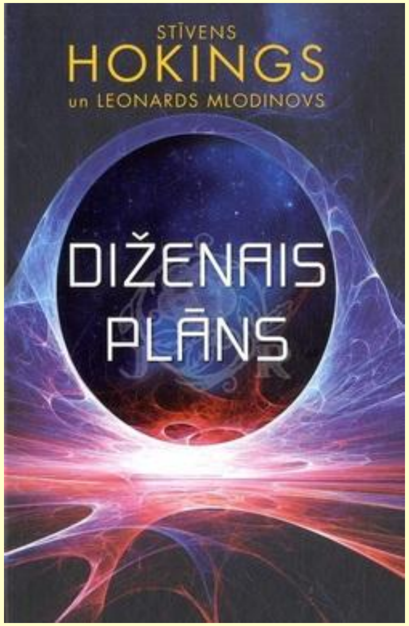
Grafi, ģeometriskās konfigurācijas

Uzdevums par transformatoru un tā vispārinājums

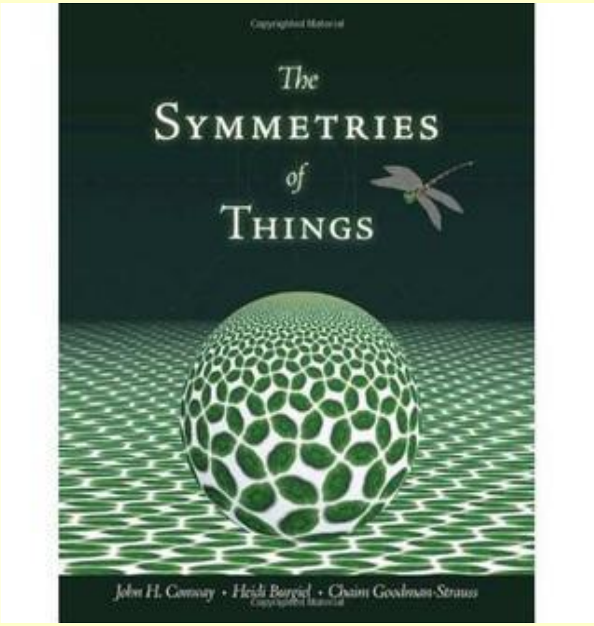
Grāmatas



H. Weyl, **1885-1955**
1952, angļu v.
1968, krievu v.



Roger Penrose,
The Road to Reality
A Complete Guide to the
Laws of the Universe
Published by Jonathan Cape
2004, 1094 p.



J. H. Conway, H. Burgiel,
C. Goodman-Strauss,
Taylor & Francis, 2008, 426 p.

Par matemātikas sadrumstalotību

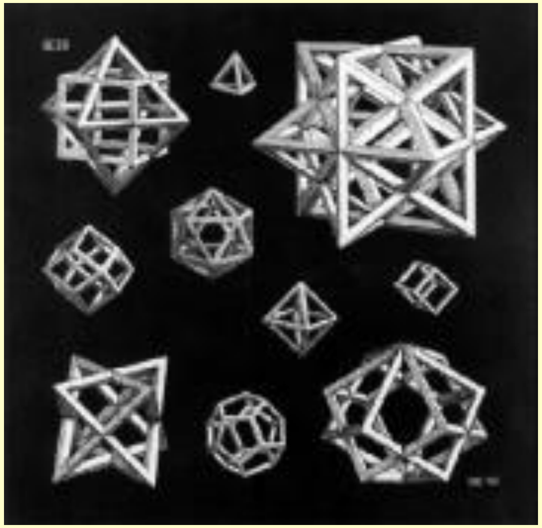
Komentārs par Babilonas (Bābeles torni)

Jautājums kāpēc vispār dabā, mikropasaulē ir tik daudz simetrijas,
nav matemātikas jautājums, tas vairāk ir fizikas un filozofijas jautājums.
Bet, kā rakstīts grāmatā “Diženais plāns” un ne tikai tur, *filozofija ir mirusi*
Tā nespēja turēties līdzi modernajiem zinātnes sasniegumiem, īpaši fizikā.

Kāda filozofa komentārs par šo grāmatu…

Klasika

Plaknes pārklājumi



Konvejs par Ešeru

M. C. Escher
(1898-1972)

Alhambra, Moorish castle,
in Granada, Spain in 1922.

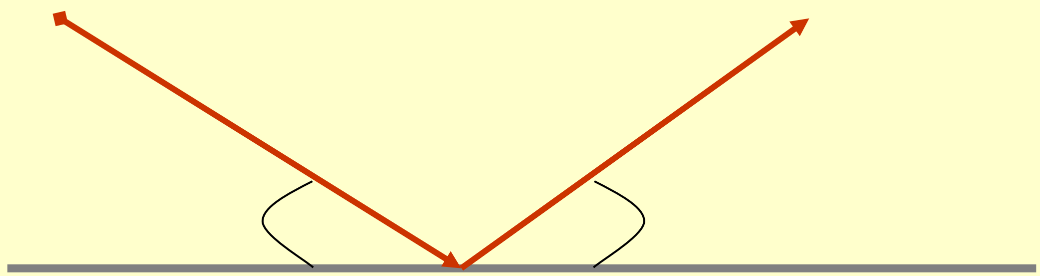
http://www.mcescher.com/gallery/mathematical/

Atstarošanās likums

Diženais plāns

Kādreiz likumu bija ļoti maz (Pitagors, Arhimēds)

Atstarošanās likums apgalvo, ka leņķis starp gaismas staru un spoguli ir vienāds ar leņķi starp spoguli un atstaroto staru.



Novērojumi, hipotēzes, formulējumi...

Likumi matemātikā nav tas pats kas citur.

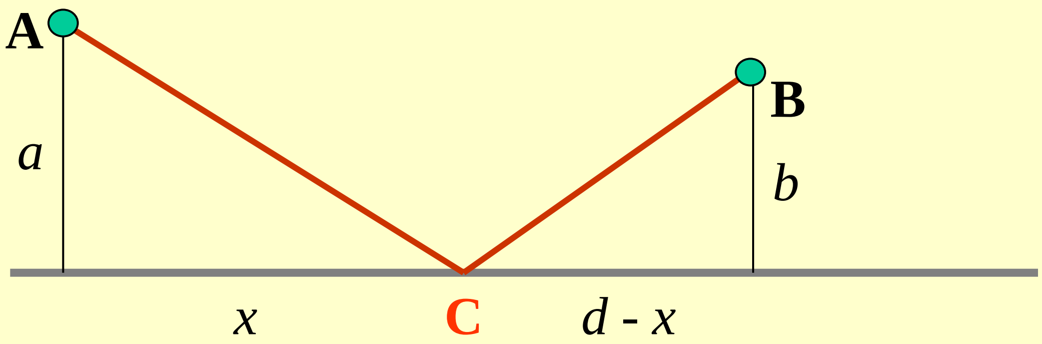
Aksiomas, postulāti.

Hērona uzdevums

(*Heronus*, 1. gs., sengrieķu matemātiķis.)

1. Punkti A un B atrodas vienā pusē taisnei.
Atrast punktu C uz taisnes, lai AC + CB būtu minimāls.

2. Punkti A un B atrodas vienā pusē taisnei. Atrast punktu C uz taisnes, lai laiks ceļa AC + CB veikšanai būtu minimāls.



$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d - x)^2 + b^2} \mapsto \min$$

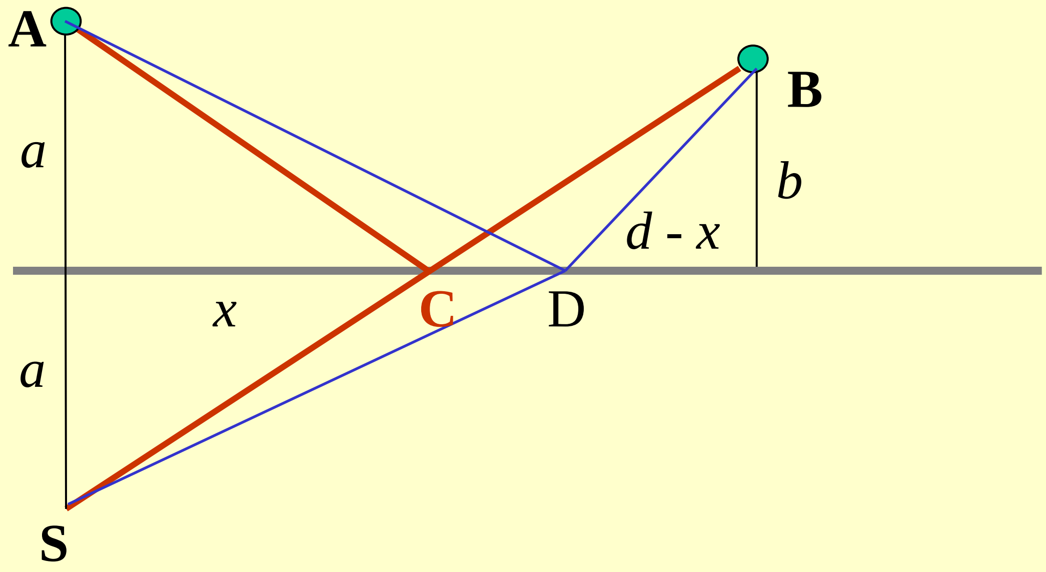
Elegants risinājums

1. Algebriskā ekstrēmu noteikšanas metode (skolā nez vai pazīstama).
2. Izmantojot atstarošanās likumu varam atrast *x* un pēc tam pārbaudīt attiecīgo nevienādību, bet ir cits elegants risinājums.

3. Ģeometriskā metode

$$\boxed{\frac{a}{x} = \frac{b}{d-x} \Rightarrow}$$

$$\boxed{x = \frac{ad}{a+b}}$$



AD + DB = SD + DB < SB = AC + CB

Vienkāršākie simetrijas veidi

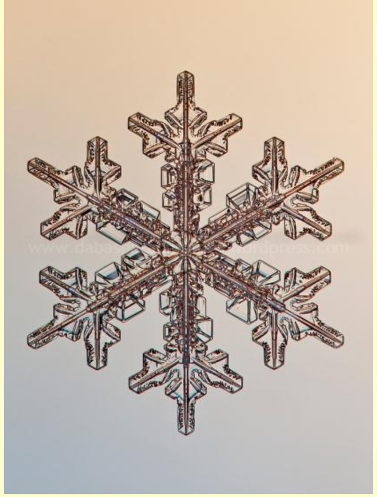
Simetrija pret punktu

Simetrija pret taisni

Paralēlā pārnese (translācija)

Rotācijas simetrija

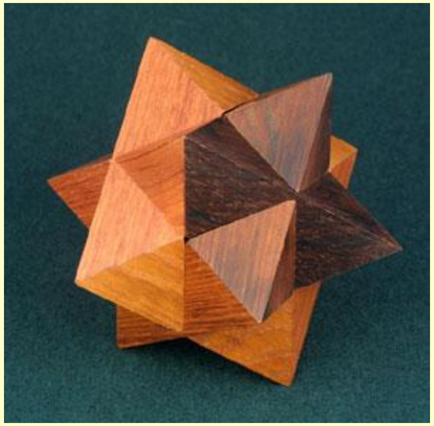
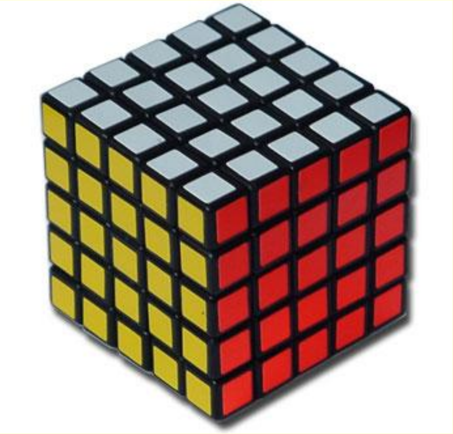
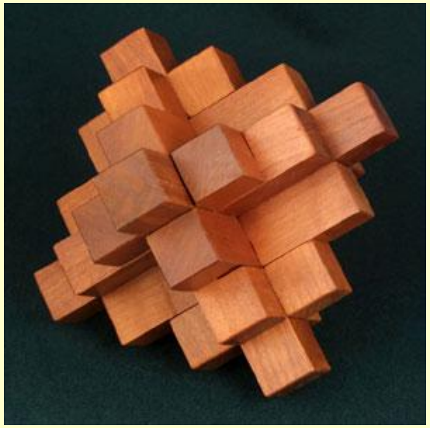
Simetrija dabā: klasika



http://dabasparadibufoto.wordpress.com/category/sniegparslinas/

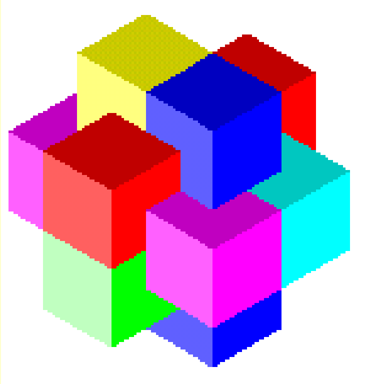
Dažas MR

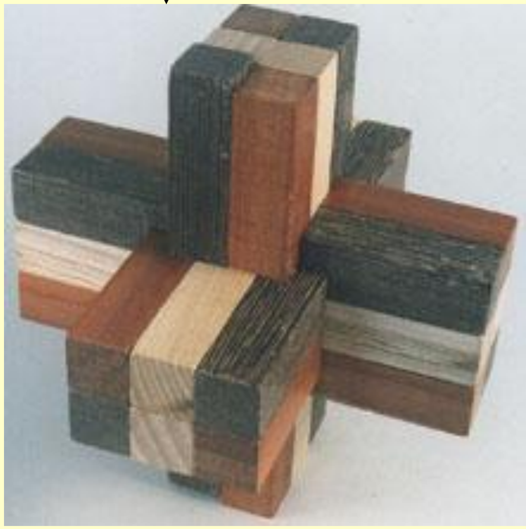



Dažas MR

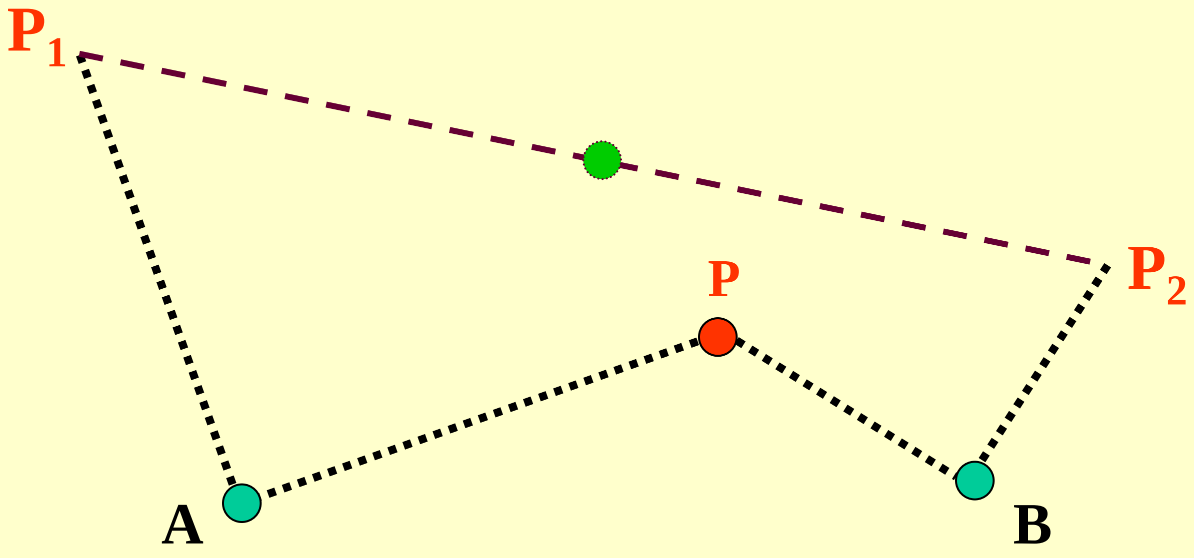
ZPD





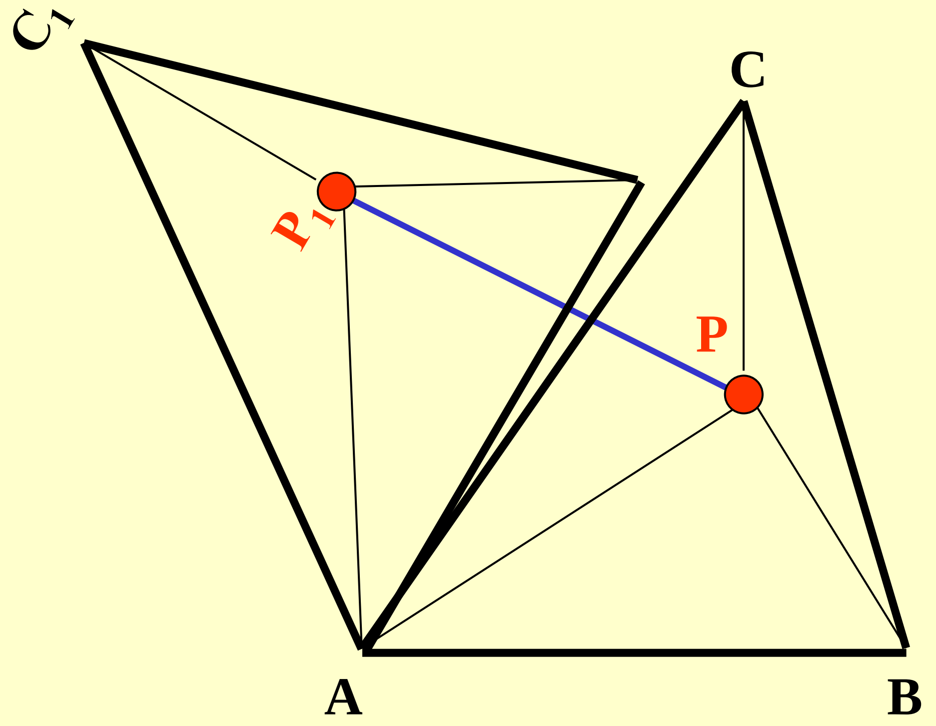
Rotācija par 90 grādiem

Uzdevums par apslēpto mantu



Rotācija

Uzdevums - pērle



J. Hofmann (1929)
Tibor Gallai

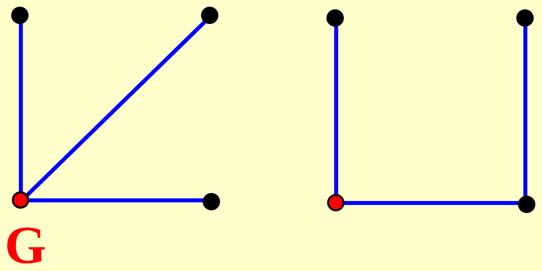
$$AP + CP + BP = BP + PP_1 + P_1C_1$$

Lietojumi

Daba pati optimizē un norāda ceļus …
(pakojumi, kristāli, bites, ziepju burbuļi)

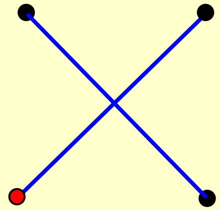
Minimālie tīkli

Savienot kvadrāta virsotni G ar pārējām, lai kopējais ceļa garums būtu minimāls.



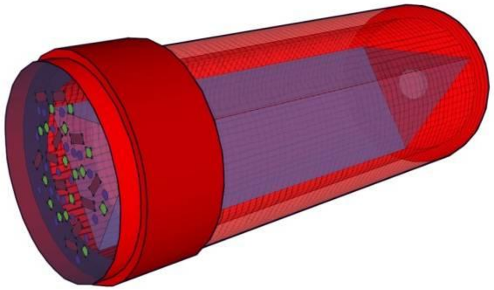
Optimizācijā katrā solī negarantē optimizāciju kopumā.

$$2+\sqrt{2} > 3 > 2\sqrt{2}$$



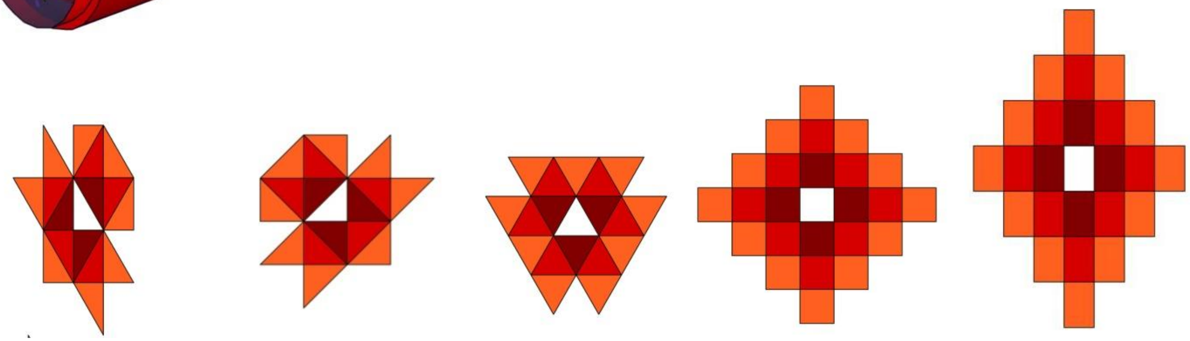
Neviens no šiem trīs tīkliem nav minimāls.
Vai varat uzrādīt vēl īsāku?

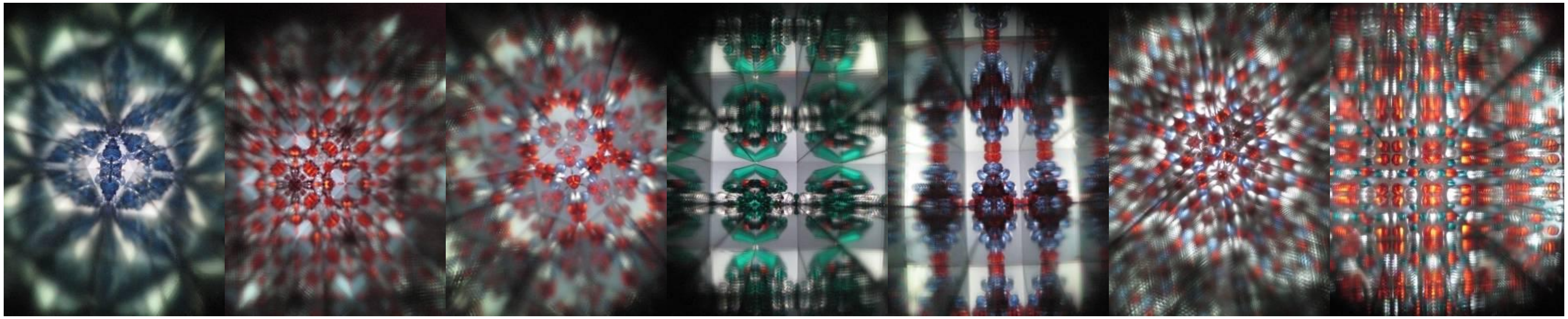
KALEIDOSKOPS



Iespējamie daudzstūri, kuriem ir atbilstoši leņķi, lai kaleidoskopā veidotos simetriski plaknes pārklājumi ir:

- taisnleņķa trīsstūris ar leņķiem 30 , 60 , 90 ;
- taisnleņķa trīsstūris ar leņķiem 45 , 45 , 90 ;
- vienādmalu trīsstūris;
- kvadrāts vai taisnstūris.

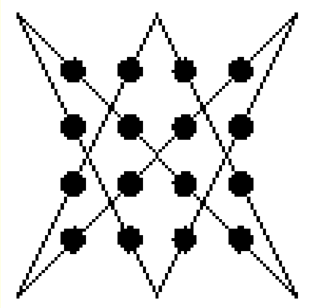


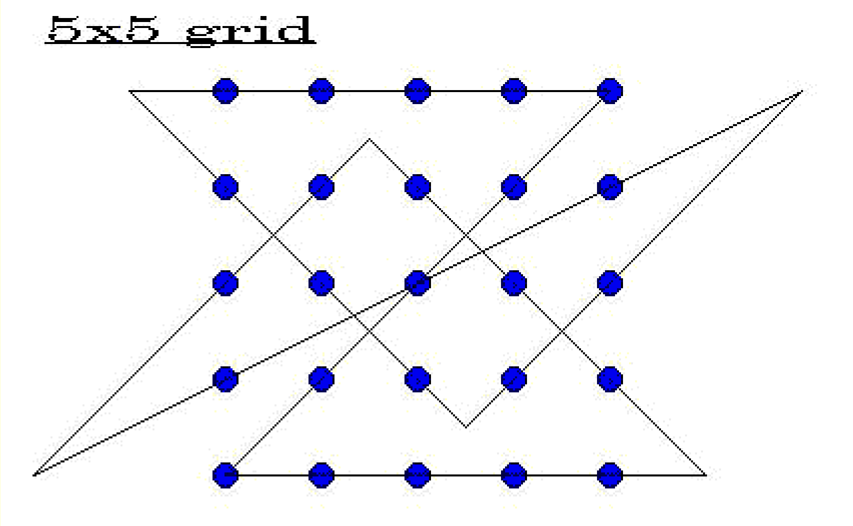


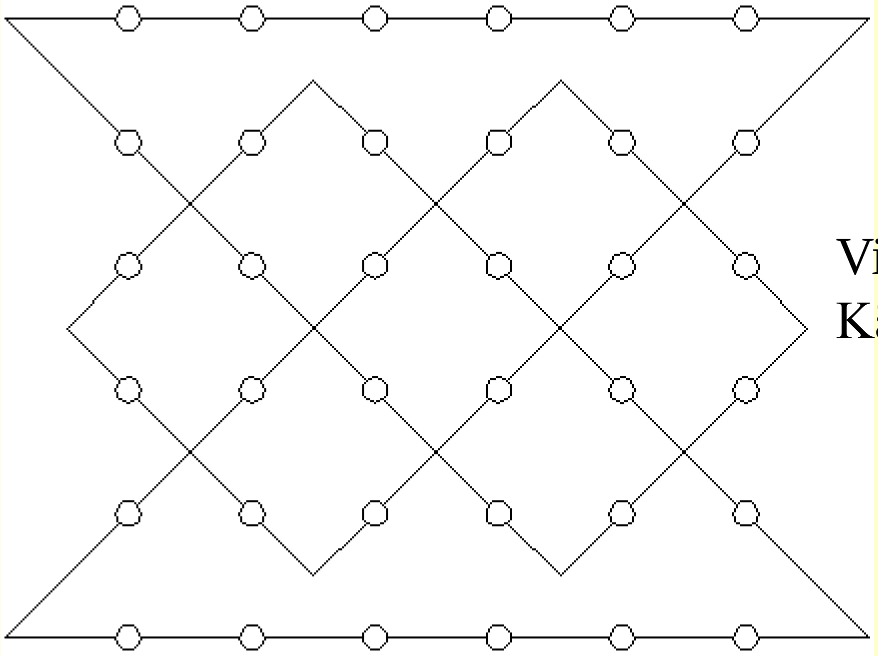
Kaleidoskopos iespējami 11 no 17 plaknes pārklājumu simetrijas grupu tipiem.

Slaids no L.Zariņas maģistra darba, 2009.

Simetrija optimālajās konfigurācijās

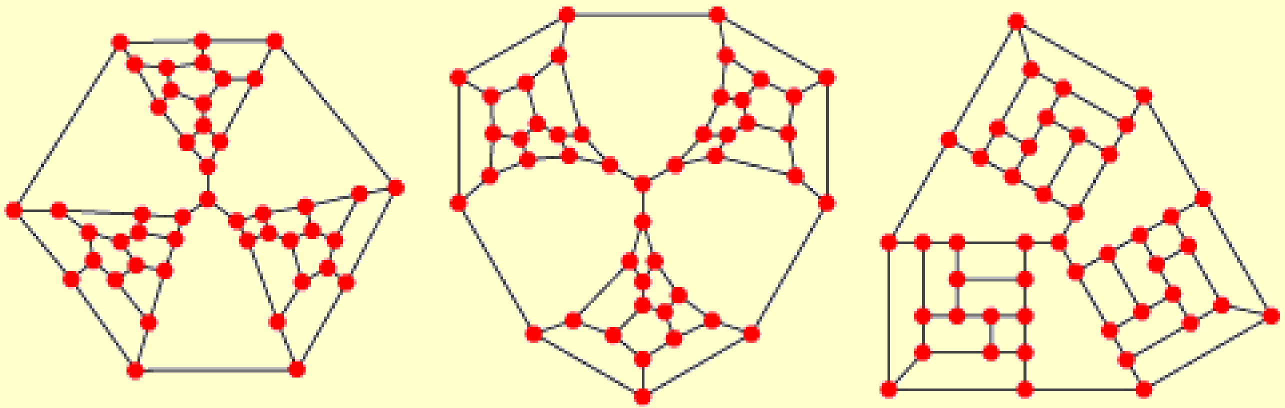






Virkne: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,
Kā pierādīt, ka šie skaitļi vienmēr būs 2*n*?

Minimālie grafi



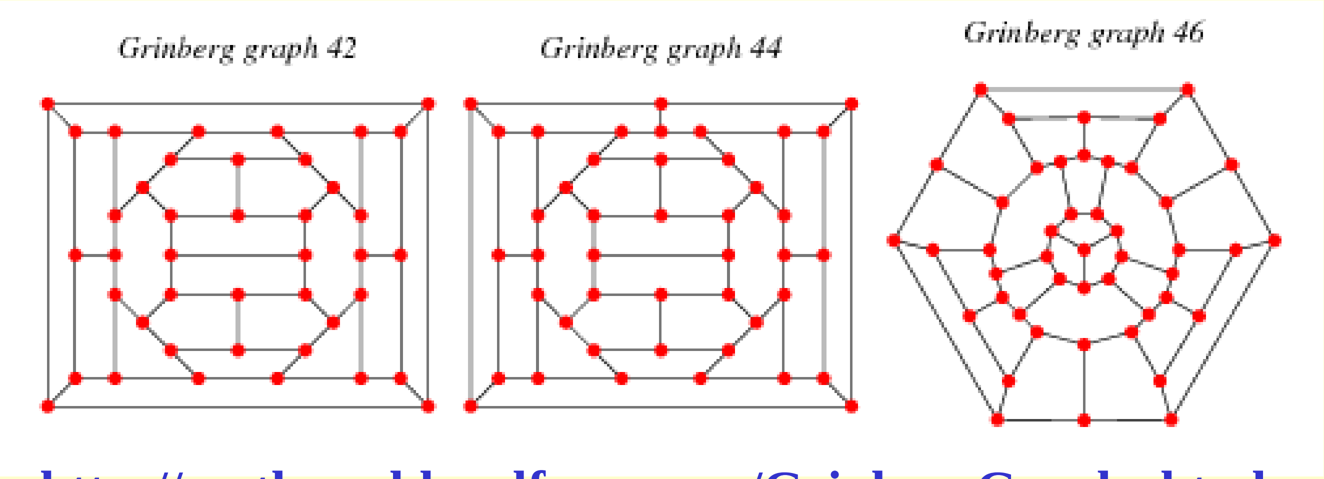
Planāri, kubiski grafi bez Hamiltona cikla ar 46 virsotnēm

A non-Hamiltonian 3-connected cubic graph given by Tutte (1946)

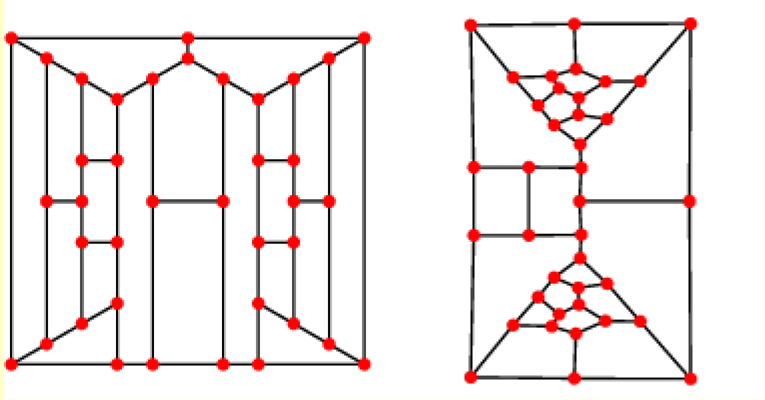
http://mathworld.wolfram.com/TuttesGraph.html

Tata rezultātu uzlaboja **E. Grinbergs** (1911 – 1982), atrodot grafus ar mazāku virsotņu skaitu.

Grinberga grafi



http://mathworld.wolfram.com/GrinbergGraphs.html



The Barnette-Bosák-Lederberg graph is a graph on **38** vertices which is the **smallest known** example of a planar 3-connected nonhamiltonian graph, It was discovered by Lederberg (1965), and apparently also by D. Barnette and J. Bosák around the same time.

Simetrija MO

Radmila Bulajich Manfrino
José Antonio Gómez Ortega
Rogelio Valdez Delgado

Inequalities

A Mathematical Olympiad Approach

Košī, **Jensena**, Heldera, Minkovska, Čebiševa, Šura, Mjurheda u.c. nevienādības

$$\boxed{\mathbf{A \geq G}}$$

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0,\ r>0,\ a,b,c\geq 0.$$

Šura nevienādība (Issai Schur)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Simetrija MO

Fil. derētu iepazīties ar

Kiran Kedlaya, based on notes for the Math Olympiad Program (MOP)

Symmetric polynomial inequalities

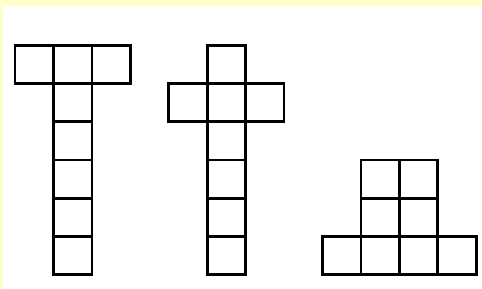
2.2 The idiot's guide to homogeneous inequalities

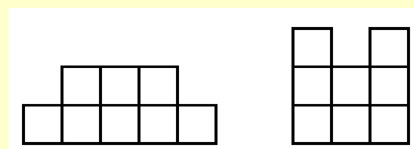
$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}.$$

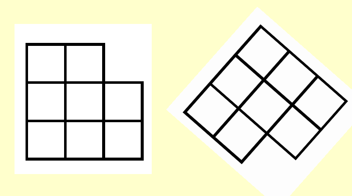
Spēles MO, kurās uzvarošā stratēģija balstīta uz simetriju.

Simetriski t-oktamino

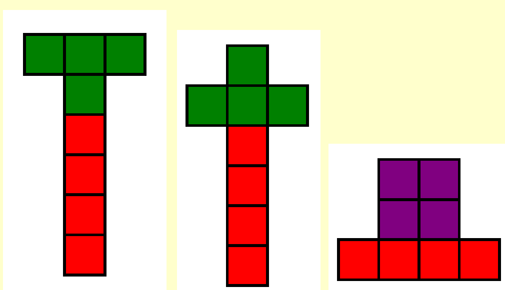
Zīmējumā redzamas 6 simetriskas figūras (oktamino), kuras var salikt no diviem dažādiem tetramino.
Uzdevums. Atrast vēl divas šādas figūras.

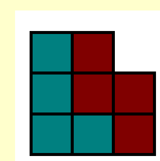




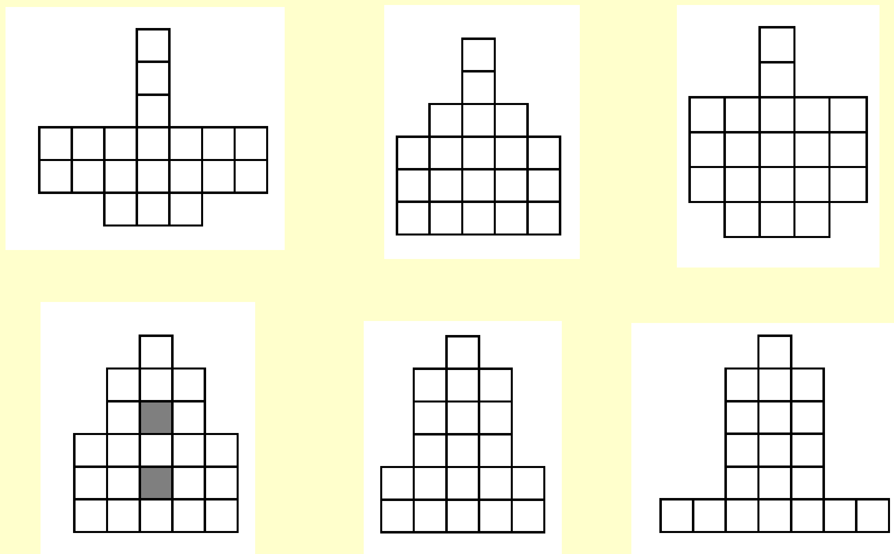


A = B



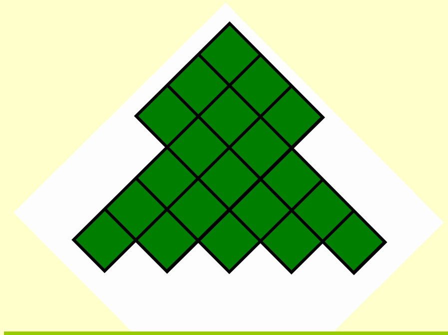


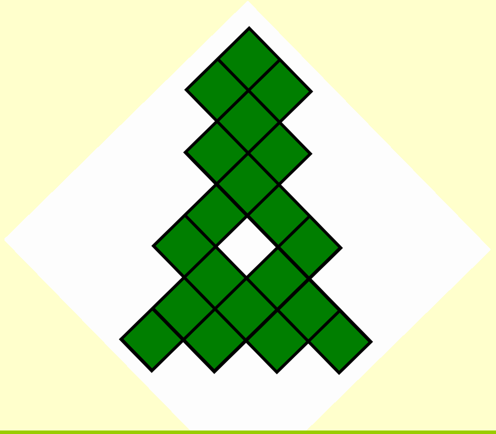
Simetriski t-torņi



Avīzē *Fokuss*, 1997, konkurss. “Kurš saliks visvairāk simetrisku t-figūru?”
Uzvarēja Gints Bārzdelis (Talsi), uzrādot 142 figūras.
Vai varat pārspēt viņa rezultātu?
Konkursa jautājums bija piemērota tēma skolēnu pētnieciskajā darbā.

Tetramino eglītes





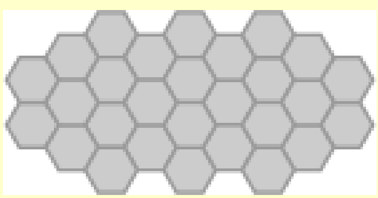
Vai varat no pilna tetramino komplekta salikt eglīti?

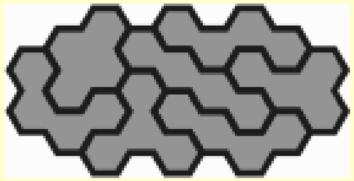
Atis Blumbergs ar datora palīdzību ir atradis visus simetriskos no tetramino saliekamos polimino.

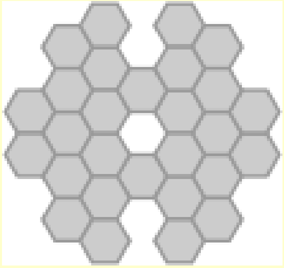
Cibulis A. *Pastaigas Tetrapasaulē*. *Tetramino*. Rīga, 2002.
https://www.mykoob.lv/index/liis_macibu_materiali

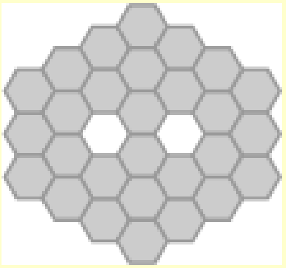
Simetriskas figūras no tetraheksiem

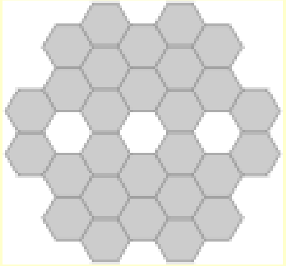
Tetrahexes











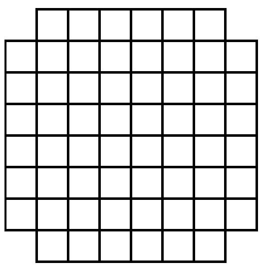
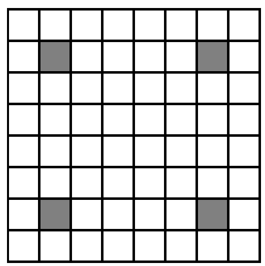
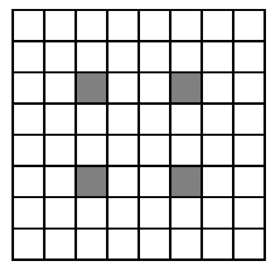
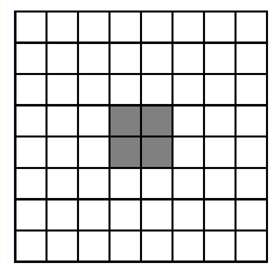
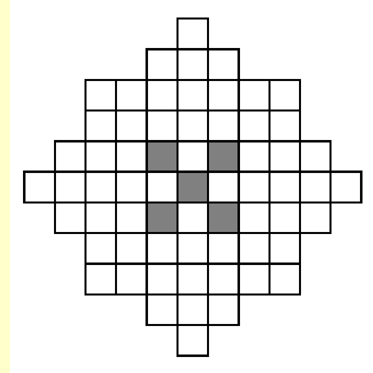
Atrastas visas figūras, kurām ir **divas simetrijas asis**. Skaits ir 76.

http://abarothsworld.com/Puzzles/Polyhex/Tetrahex%20Bisymmetry.htm

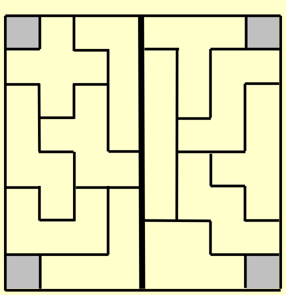
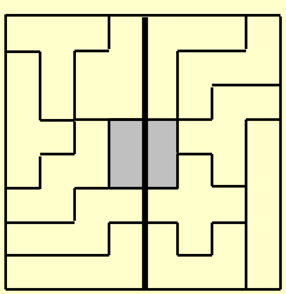
Simetriskas figūras no pentamino

Problēma. Atrast visas no pentamino saliekamas simetriskas figūras, kurām ir **4 simetrijas asis**.

Der kā ZPD tēma, vismaz pagaidām.

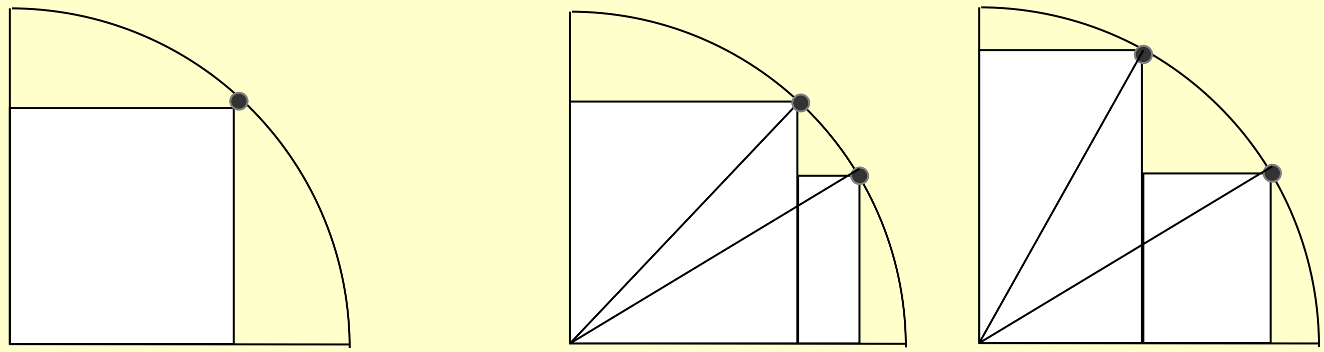






Nav saliekama

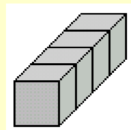
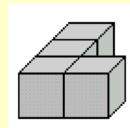
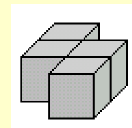
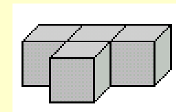
Uzdevums par transformatoru un tā vispārinājums

No riņķa daļas I kvadrantā izgriezt divus taisnstūrus, kuru malas paralēlas koordinātu asīm un kuru laukumu summa ir maksimāla.

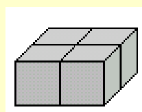
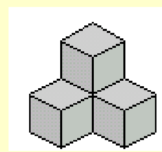
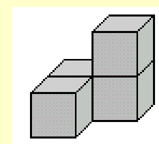
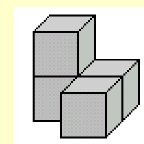


ZPD tēma: Kā izvietot trīs punktus, *n* punktus?

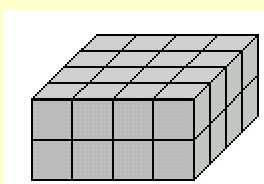
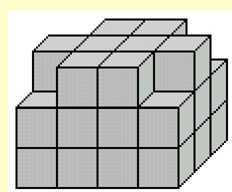
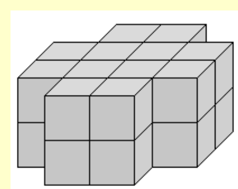
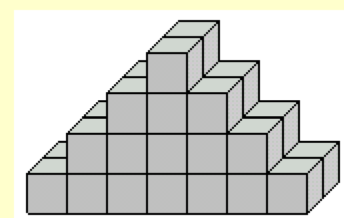
Tetrakubi

I **L** **N** **T**

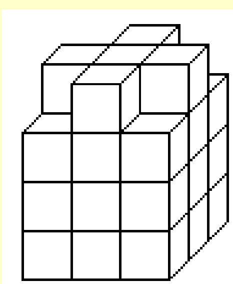
O **K** **S** **Z**

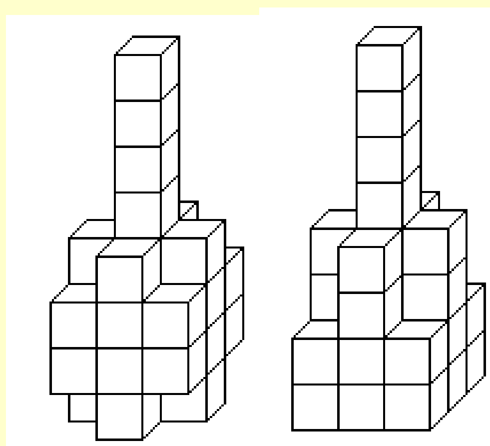
Simetriski torņi no tetrakubiem

Baiba Bārzdiņa, ZPD, 2005

ZPD atrasti visi polikubi, kuriem ir 4 simetrijas plaknes un pamats 3 3.



H = 4

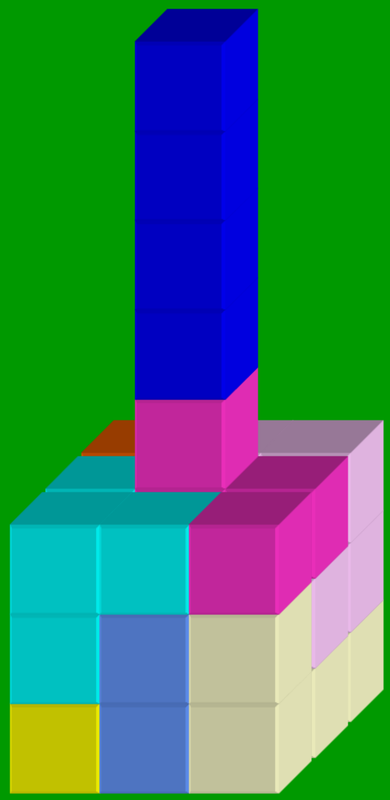


H = 8

Salikt stabilu torni ar H = 9.

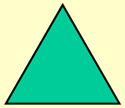
Ļoti grūts uzdevums.

Nākamais slaids - no B.B. prezentācijas

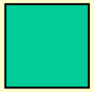


Poliformas

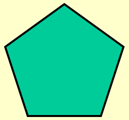
- figūras, kas iegūtas no vienādiem elementiem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām.



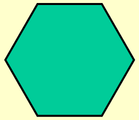
Polimondi (Polyiamonds) **(1, 1, 1, 3, 4, 12)**



Polimino (Polyominoes) **(1, 1, 2, 5, 12, 35, 108)**

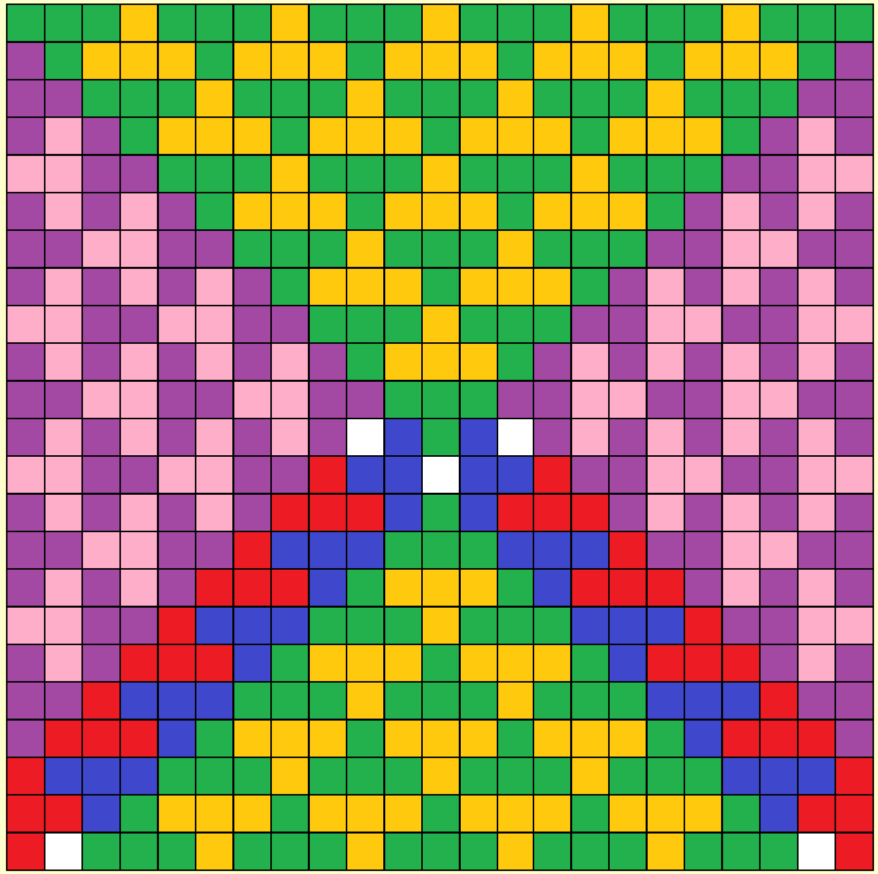


Polipenti (Polypents) **(1, 1, 2, 7, 25, 118)**



Poliheksi (Polyhex) **(1, 1, 2, 7, 22, 82)**

Blīvākie pakojumi

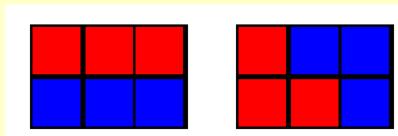


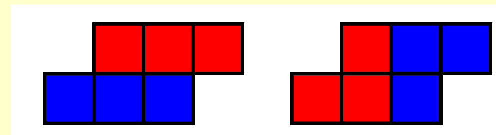
Vai varat
atrast vēl
blīvāku
pakojumu?

Vai eksistē vienkāršs pierādījums,
ka kvadrātu $(2n + 1)$ $(2n + 1)$
blīvākais pakojums satur 5 brīvas rūtiņas?

Poliformu dalāmības būtiskas atšķirības

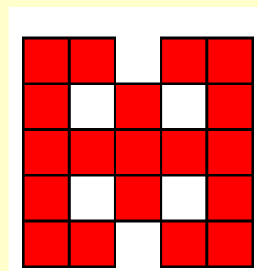
1. Poliformām var eksistēt vairāki MKD





2. Divām poliformām var neeksistēt KD

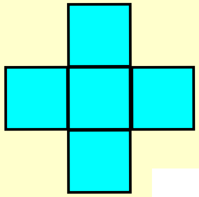
21-mino



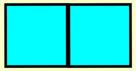
3. Poliformu saderības attiecība nav transitīva

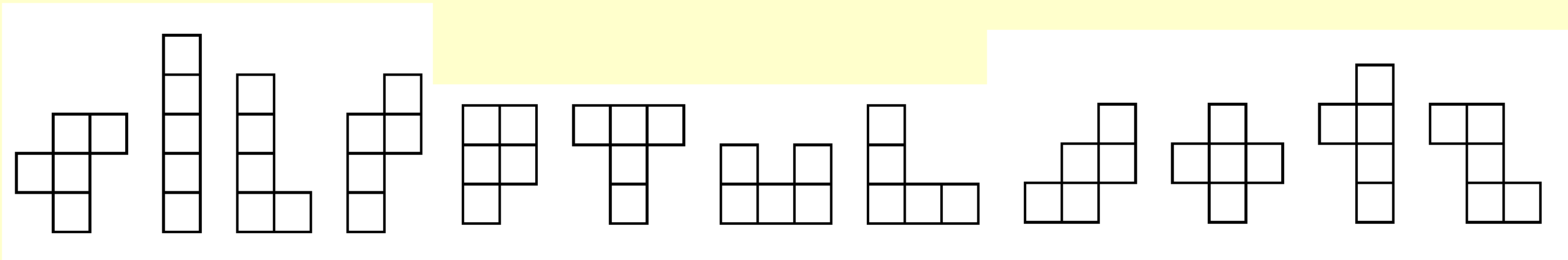
$$A \sim B,\ B \sim C \not\Rightarrow A \sim C$$

4. Nav zināms algoritms ne KD, ne MKD atrašanai



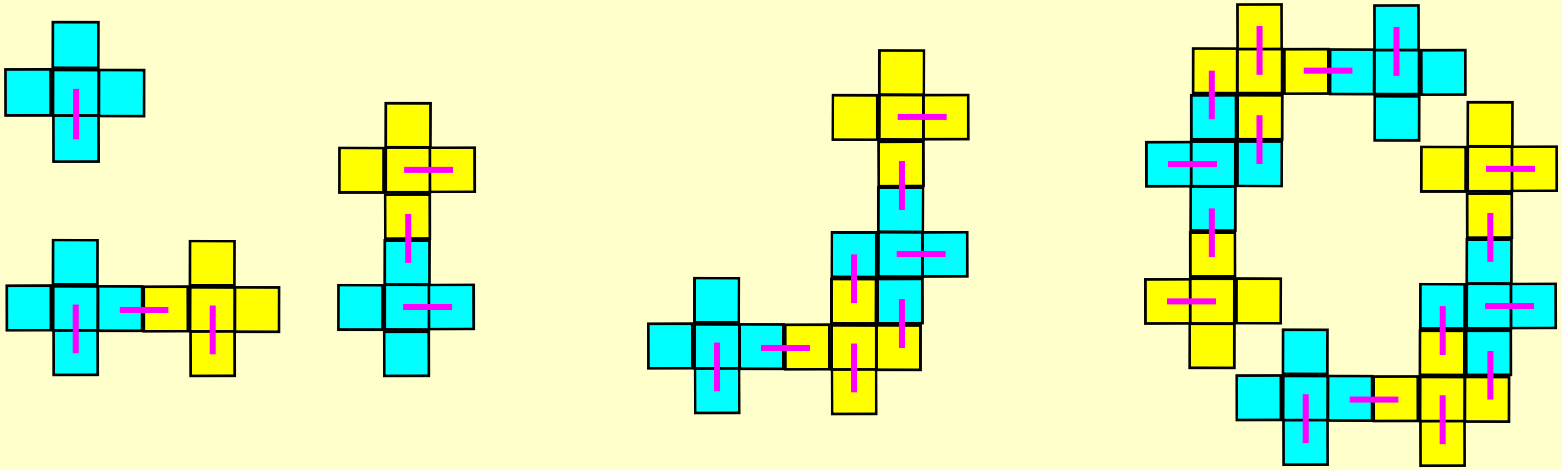
Polimino dzīvotspējas problēma

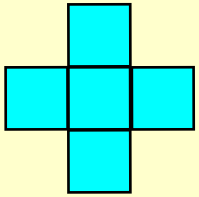




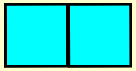
2 2 2 2 2 2 2 2 2 4 2 2

Polimino sauc par **dzīvotspējīgu**, ja tas ir saderīgs ar domino, t. i., ja tam ar domino eksistē kopīgs dalāmais.

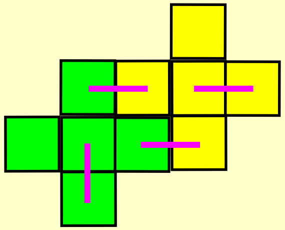




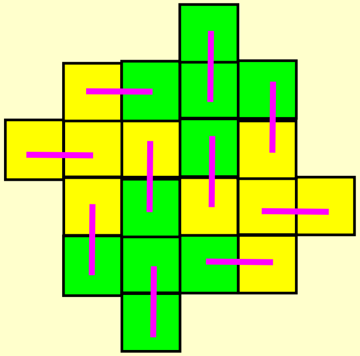
Polimino dzīvotspējas problēma



Vai atrastais KD ir MKD? No cik kopijām sastāv MKD: 2, 4, 6, 8?



Ir tikai viens pentamino, kura MKD sastāv no 4 kopijām.

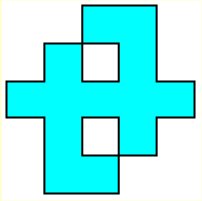


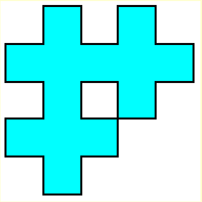
Pagājušais gads (2013)

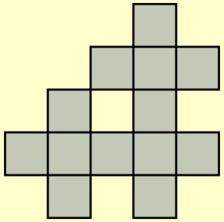
Ar n = **13** sākas nopietnas grūtības. Parādās tādi 13-mino, kuru dzīvotspējai vairs nepietiek ar 8 kopijām, kā tas ir visiem mazākiem n-mino, $n \leq 12$.

Parādās pirmais nedzīvotspējīgais *n*-mino.

Eksistē tikai divi 13-mino, kas nav saderīgi ar domino. Tie abi ir **simetriski**



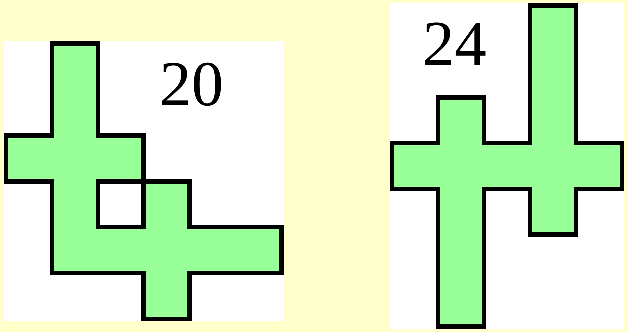




Visi pilnie 13-mino ir dzīvotspējīgi.

Sarežģītākie 13-mino

238 591



Zihermans
pirmais
(9. Jan. 2012)
atrada KD.

Kura no šīm šūnām ir sarežģītāka izpētei?

MKD = ?

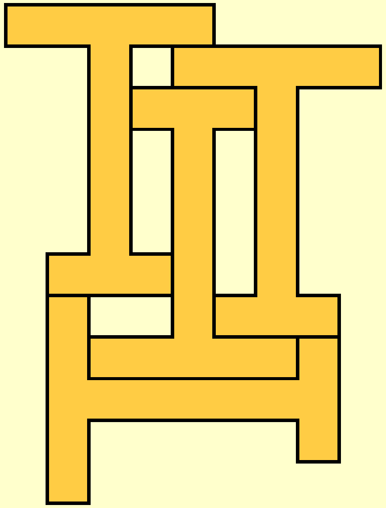
Visiem dzīvotspējīgiem 13-mino pietiek ar 24 kopijām.

Visi *n*-mino, *n* $\leq$ 12, ir dzīvotspējīgi un pietiek ar 8 kopijām.

Pagājušais gads (2013)

The smallest tetrad for a polyomino with mirror symmetry uses 13-ominoes:

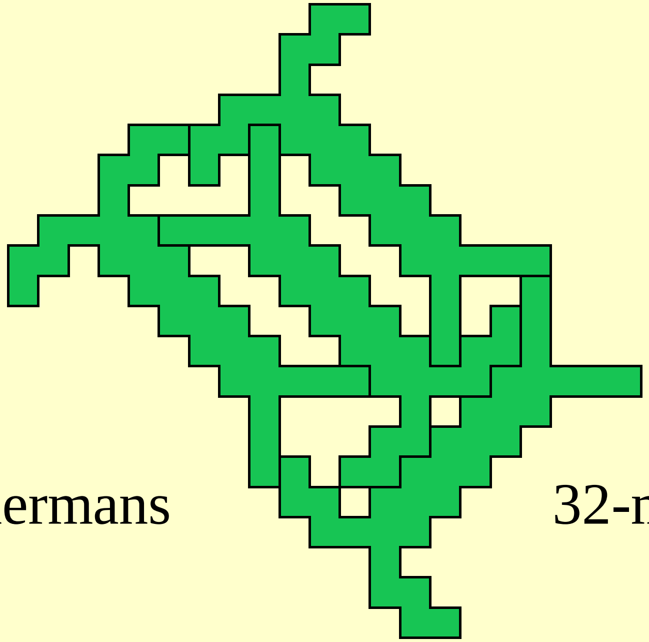
[T] http://userpages.monmouth.com/~colonel/tetrads/tetrads.html#b



Kāds
ir mazākais
tetrads, kas veidots
no polimino ar diagonālsimetriju?

2014 gads

Zihermans



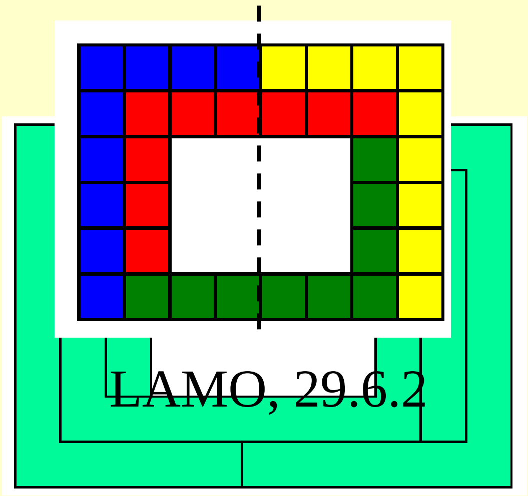
32-mino

25.01.2014. uzdevums atrisināts pilnībā

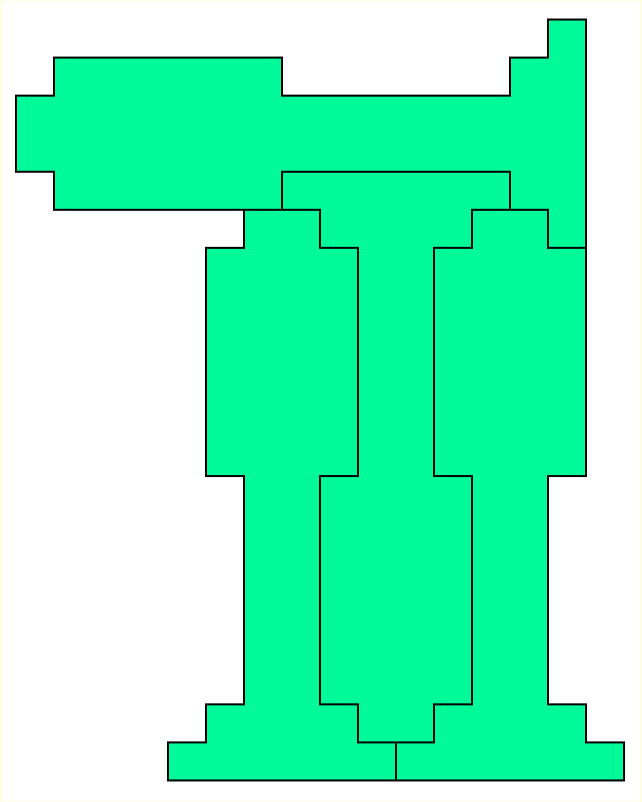
Tagad [T] šāds ieraksts: Juris Čerņenoks found the smallest tetrads for polyominoes with diagonal symmetry, which use 19-ominoes:

2014 - tetradu pēdējie jaunumi

Juris Čerņenoks, 31.01.2014.



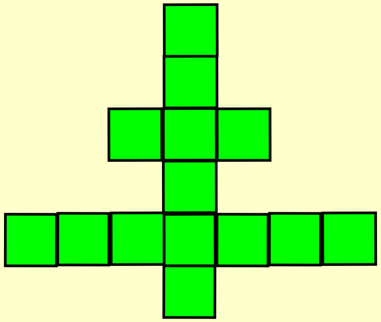
Tetrads ar 2 simetrijas asīm no 17-mino.



Pirmais zināmais pilnais tetrads no simetriska 48-mino.

Problēma. Atrast pilnu tetradu no polimino ar diagonālsimetriju un rotācijas simetriju.

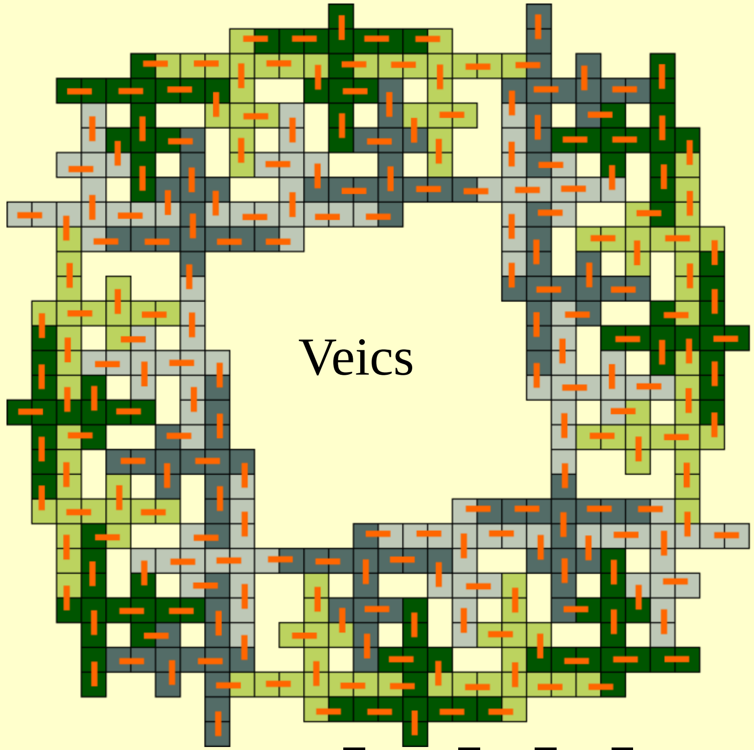
2014 gads

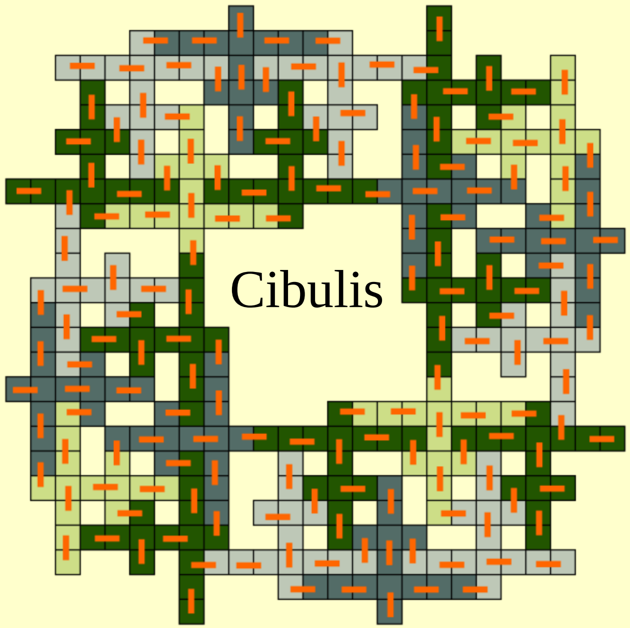


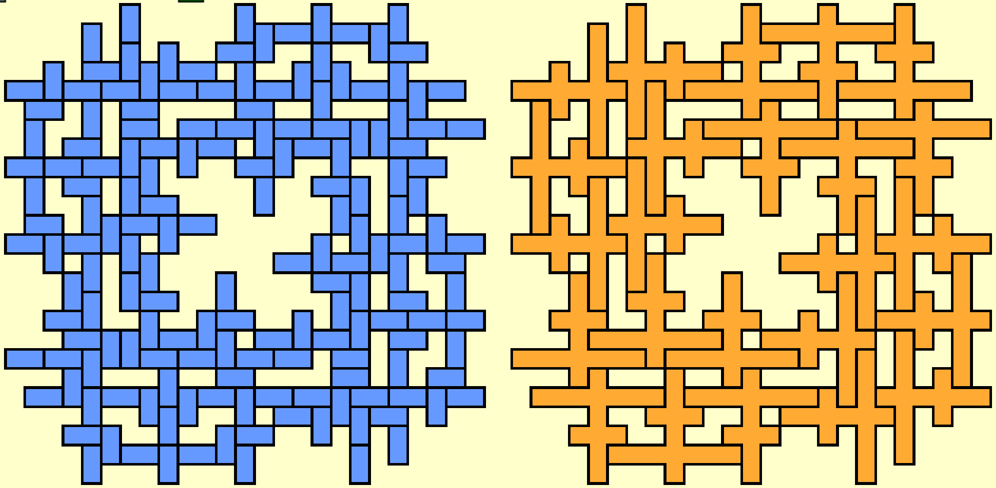
Pierādīt eglītes *dzīvotspēju*, t.i. saderību ar domino

Kāds ir mazākais kopiju skaits?

64 $\longrightarrow$ 32 $\longrightarrow$ 24

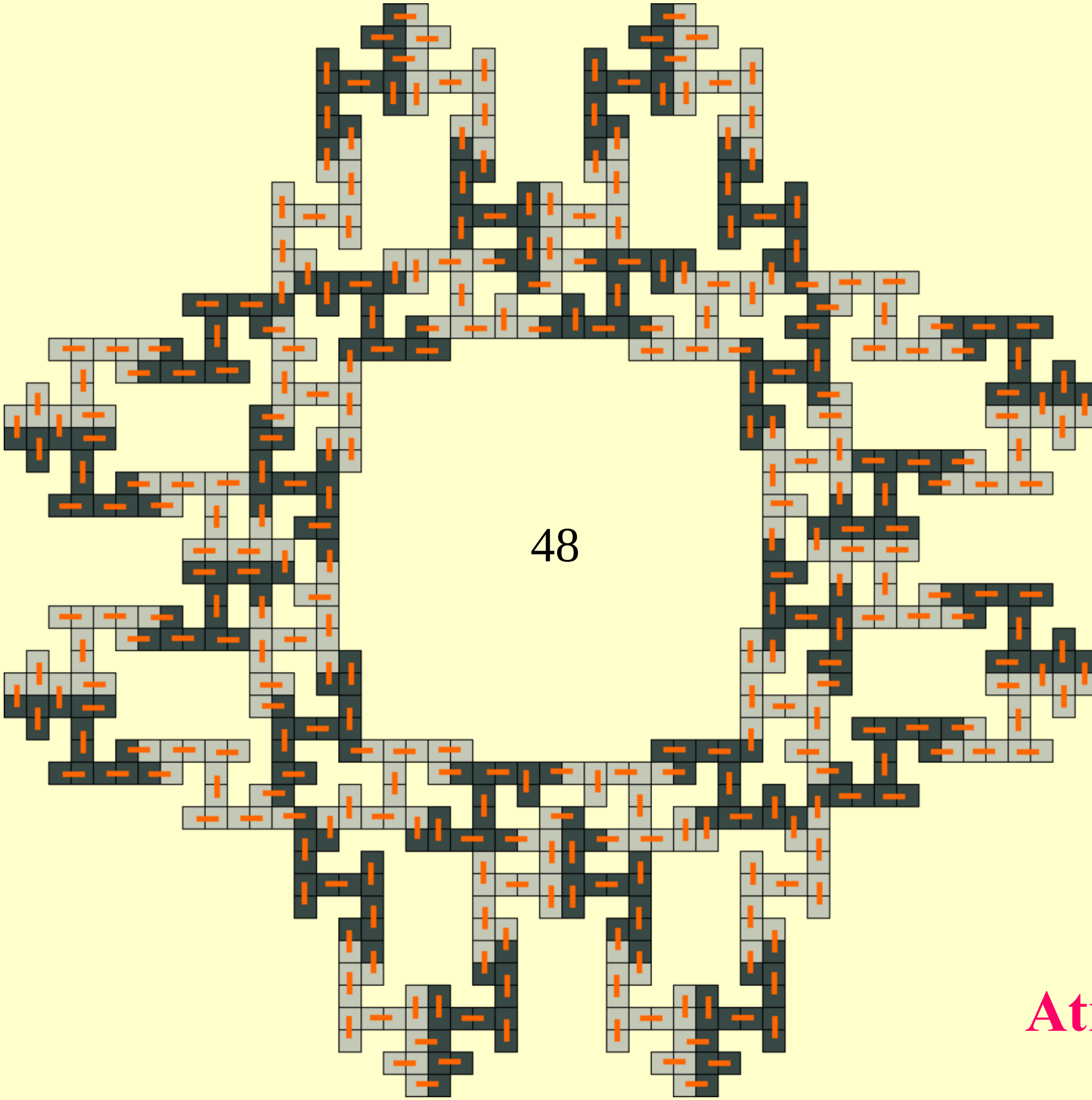


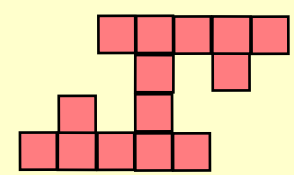




G. Sicherman

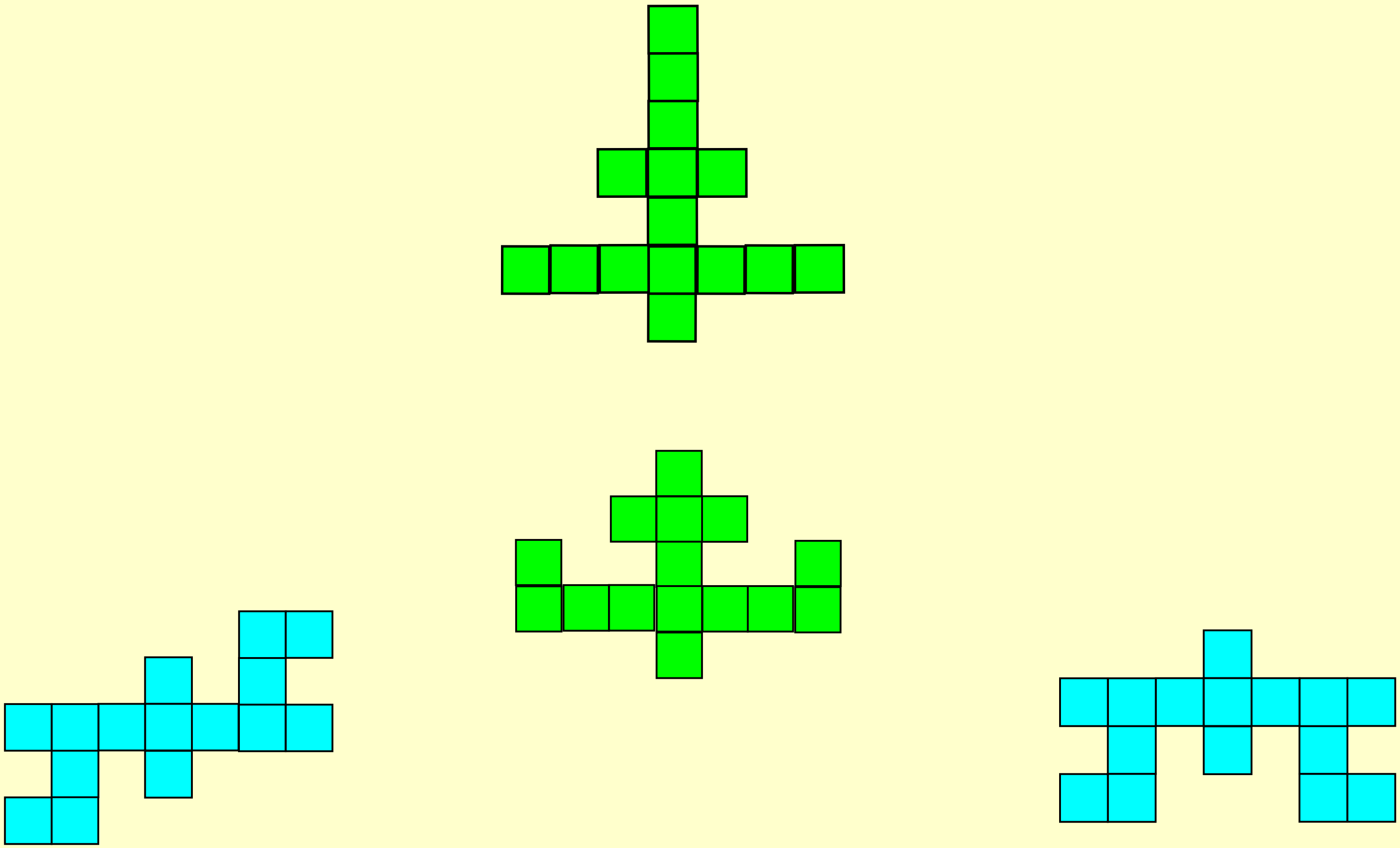
R. Veics,
RFL, 12. kl.



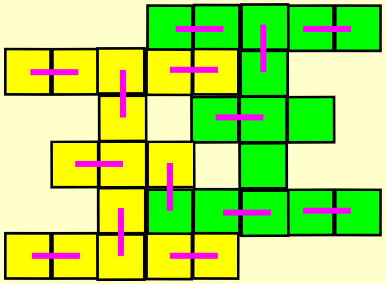


Atrast mazāku KD

Nākamais 2015



Vai simetrija veicina dzīvotspēju?



Tās nedrīkst būt pārāk daudz. Līdzīgi kā citur – *zelta vidusceļš*.

Simetrisku polimino veidošana

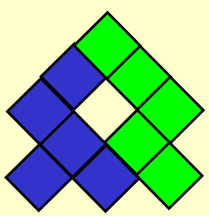
Vai no trīs simetriskiem pentamino vienmēr var salikt simetrisku figūru?

Vai pareizs apgalvojums:

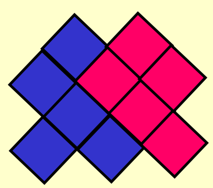
ja no katriem diviem pentamino (no dotās pentamino kopas) var salikt simetrisku figūru, tad to var salikt arī no visiem pentamino.

Triviāls piemērs, kas apstiprina apgalvojumu: ITX

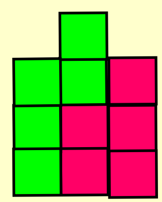
Sarežģītāks piemērs, kas apstiprina apgalvojumu: FNP.



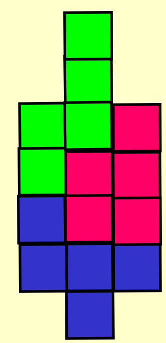
FN



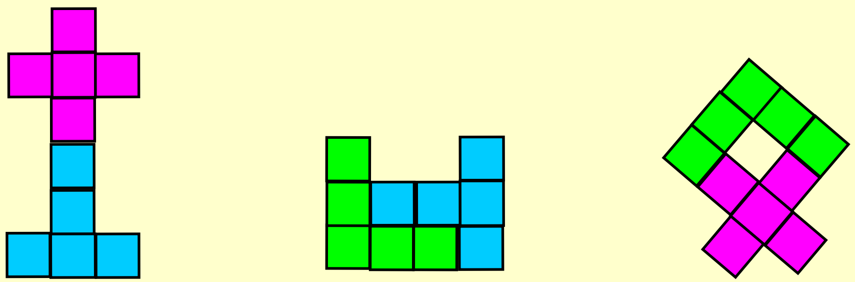
FP



NP



Pretpiemērs: TVX -0



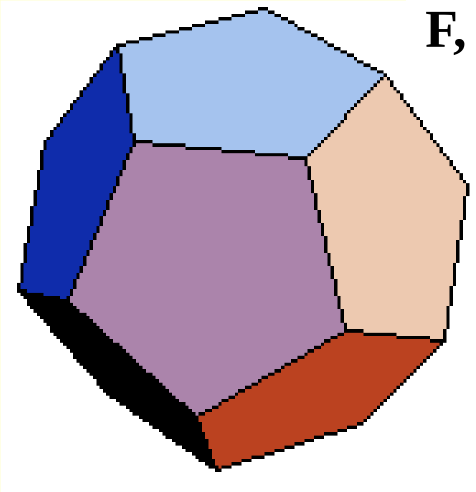
**1. Vai eksistē tāda četru pentamino kombinācija,
ka no katriem trijiem var salikt simetrisku figūru,
bet no visiem četriem tomēr nevar?**

**2. Vai eksistē tāda četru pentamino kombinācija,
ka no katriem trijiem nevar salikt simetrisku figūru,
bet no visiem četriem tomēr var?**

Kura no atbildēm: (+ +); (+ –); (– +); (– –) ir pareiza?

(INTW).

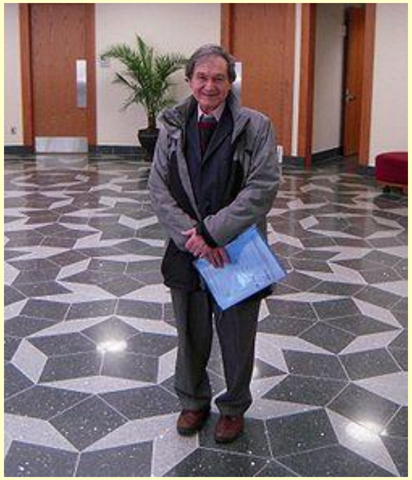
Pentamino uz dodekaedra

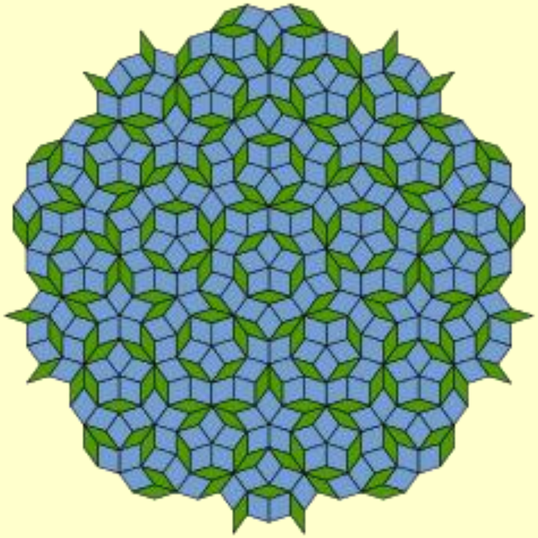


F, I, L, N, P, T, U,V, W, X, Y, Z

Uz katras no 12 skaldnēm izvietot 12 pentamino tā, lai katru trīs vienai virsotnei incidento skaldņu pentamino veidotu veiksmīgu trijnieku.

Penrouza pārklājums





Roger Penrose in the foyer of the Mitchell Institute for Fundamental Physics and Astronomy, Texas A&M University, standing on a floor with a Penrose tiling.

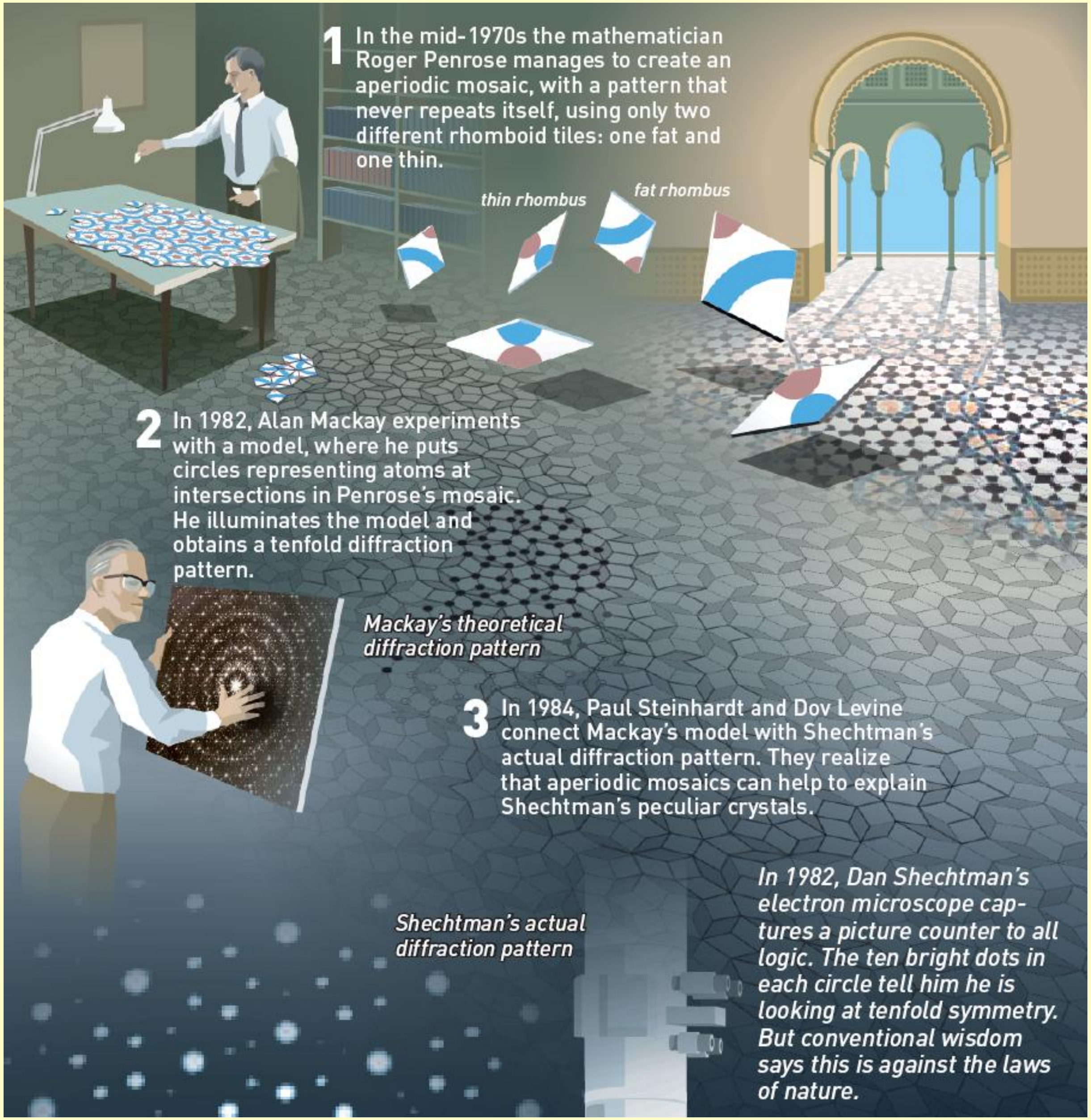
Ietver gan spoguļsimetriju (reflection symmetry)
Gan piektās kārtas rotācijas simetriju (fivefold rotational symmetry)
1970-tie gadi.

Martin Gardner, Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers.

Roger Penrose's work on small sets of tiling shapes…but only nonperiodically, was found to underlie the entire vast field of "quasicrystals."

Golombs
par Bušu

Bush wanted to know why the result would still hold if you didn't color the board in that particular way!



Penrouza pārklājumi un kvazikristāli

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/popular-chemistryprize2011.pdf

Dan Shechtman

Fighting established knowledge

The golden ratio – a key provided

The mosaics of explanation

Quasicrystals in nature…

An important lesson for science