Matricas

Šajā lekcijā tiek dota matricas definīcija, aplūkoti dažādi matricu specifiskie veidi, definētas lineārās darbības ar matricām, matricu reizināšana.

1. Pamatdefinīcijas

Vienkāršākās algebras operācijas – aritmētiskās darbības ar naturāliem un racionāliem skaitļiem ir sastopamas pašos agrākajos matemātiskajos tekstos. 16.gs. beigās Fransuā Vjets (1540.-1603.) sāka lietot burtus nezināmo lielumu un konstanšu apzīmēšanai. No 19.gs. vidus ar burtiem apzīmē ne tikai skaitļus, bet arī citus objektus, ar kuru pētīšanu tāpat nodarbojas algebra. Viens no pirmajiem šāda veida algebras objektiem ir matricas.

Matemātikā matricas jēdzienu pirmais ieviesa Kembridžas universitātes profesors Arturs Keili (1821 – 1895) 1857.gadā. Fizikā pirmā publikācija ar matricas pielietojumu kvantu mehānikas matemātiskajā aparātā parādījās 1925.gadā. Tās autors Verners Heizenbergs (1901.-1976.) neizmantoja viņam nezināmos A. Keili rezultātus, bet pats definēja matricas un pierādīja to īpašības.

1. Definīcija

Par **matricu** sauc taisnstūra tabulu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kura sastāv no m rindām un n kolonnām un kuras elementi a_{ij} pieder kādai kopai. Šos elementus sauc par matricas elementiem.

Šāda veida taisnstūra tabulu sauc arī par (m×n)-matricu vai saka, ka matricas izmērs ir m×n.

Lineārajā algebrā matricas elementi parasti ir reāli vai kompleksi skaitļi. Matricas parasti apzīmē ar latīņu alfabēta lielajiem burtiem A, B, C utt., bet tās elementus ar atbilstošo mazo burtu, atšķirot citu no cita ar diviem indeksiem, piemēram, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}. Pirmais indekss norāda šā elementa rindas numuru, bet otrais indekss – kolonnas numuru.

Lieto vairākus matricu pierakstu veidus. Bez jau iepriekš norādītā matricas A apzīmējuma ar apaļajām iekavām literatūrā lieto apzīmējumus

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \begin{Vmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \| a_{ij} \|_{m,n}.$$

Jāievēro, ka komatus starp matricas elementiem neliek un, ja nevar rasties neskaidrības, komatus neliek arī starp indeksiem.

2. Definīcija

Ar $\mathbf{R}^{m,n}$ ($\mathbf{C}^{m,n}$) apzīmēsim visu to matricu kopu, kuru elementi ir reāli (kompleksi) skaitļi un kuras sastāv no m rindām un n kolonnām.

3. Definīcija

Ja matricas sastāv tikai no vienas rindas vai kolonnas, tad to sauc atbilstoši par **rindas matricu** vai **kolonnas matricu**. Tās atbilstoši pieraksta

$$(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})\ ;\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Iespējama arī matrica, kura sastāv no vienas rindas un vienas kolonnas

$$A = (\ a_{11}).$$

Šeit nedrīkst sajaukt matricas elementu – skaitli, ar pašu matricu – tabulu, kura sastāv no šī vienīgā skaitļa.

4. Definīcija

Ja visi matricas elementi ir vienādi ar nulli, tad šādu matricu sauc par **nulles** matricu un apzīmē ar O.

2. Kvadrātisko matricu veidi

5. Definīcija

Matricu sauc par **kvadrātisku**, ja tās rindu skaits ir vienāds ar kolonnu skaitu (m = n). Kvadrātiskām matricām tās rindu (kolonnu) skaitu sauc par **matricas kārtu**.

Kvadrātiskas matricas elementi $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$ veido matricas galveno diagonāli:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ - galvenā diagonāle; } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ - blakus diagonāle}$$

6. Definīcija

Par **diagonālmatricu** sauc kvadrātisku matricu, ja tās visi elementi, kuri neatrodas uz galvenās diagonāles, ir vienādi ar 0.

Diagonālmatricu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

saīsināti pieraksta šādi

$$A = \mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) .$$

1. Piemērs

$$\mathrm{diag}\ (2, -3, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Definīcija

Par **skalāru** matricu sauc diagonālmatricu

$$\mathrm{diag}\ (\lambda, \lambda, \dots, \lambda),$$

kuras visi galvenās diagonāles elementi ir vienādi skaitļi.

8. Definīcija

Par **vienības** matricu E sauc diagonālmatricu diag (1, 1, …, 1), t. i.,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

kuras galvenās diagonāles elementi ir skaitļi 1.

Lai norādītu vienības matricas kārtu n, tad šo matricu apzīmē E_n. Matrica A ir vienības matrica, ja $a_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronekera simbols).

9. Definīcija

Par augšējo (apakšējo) **trijstūrveida** matricu sauc kvadrātisku matricu A = $\| a_{ij} \|_{n,n}$, kuras elementi $a_{ij} = 0,$ ja i>j (i<j).

Augšējo trijstūrveida matricu izvērsti pieraksta šādi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Darbības ar matricām

10. Definīcija

Divas matricas A = $\| a_{ij} \|_{m,n}$ un B = $\| b_{ij} \|_{k,l}$ sauc par **vienādām**, ja

1) tās ir vienāda izmēra (m = k un n = l)
2) to atbilstošie elementi ir vienādi, t.i., $a_{ij} = b_{ij}$, i=1, 2, …,m, j=1, 2, …,n.

11. Definīcija

Par matricu A = $\| a_{ij} \|_{m,n}$ un B = $\| b_{ij} \|_{m,n}$ **summu** sauc matricu $\| a_{ij} + b_{ij} \|_{m,n}$. Summu apzīmē ar A+B.

Tātad saskaitīt var tikai vienāda izmēra matricas un, saskaitot matricas, to atbilstošos elementus saskaita.

12. Definīcija

Par matricas A = $\| a_{ij} \|_{m,n}$ **reizinājumu ar skaitli** λ sauc matricu $\| \lambda\, a_{ij} \|_{m,n}$, kuru apzīmē kā λA.

Tātad, reizinot matricu ar skaitli, katrs tās elements ir jāreizina ar šo skaitli.

2. Piemērs

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matricu summai un reizinājumam ar skaitli piemīt:

1) komutatīvā īpašība
   A+B = B+A,
2) asociatīvā īpašība
   (A+B)+C = A+(B+C),
3) distributīvā īpašība
   a) λ(A+B) = λA+λB,
   b) (λ+μ)A = λA+μA.

To pierādījums seko tieši no matricu summas un matricu reizinājuma ar skaitli definīcijām.

13. Definīcija

Ja matricas A = $\| a_{ij} \|_{m,n}$ kolonnu skaits ir vienāds ar matricas B = $\| b_{ij} \|_{n,k}$ rindu skaitu, tad par šo **matricu reizinājumu** sauc matricu C = $\| c_{ij} \|_{m,k}$, kur

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ .$$

Apzīmē: C = AB

Iegaumējiet shēmu: $\| a_{ij} \|_{m,\underbrace{n}} \times \| b_{ij} \|_{\underbrace{n},k} = \| c_{ij} \|_{m,k}$

Vienādi

Reizināt var tikai tādas matricas A un B, kad matricas A kolonnu skaits ir vienāds ar matricas B rindu skaitu. Rezultātā iegūstam matricu AB, kurai rindu skaits ir vienāds ar matricas A rindu skaitu, bet kolonnu skaits – ar matricas B kolonnu skaitu.
Šo operāciju ilustrē 1. attēls.

$$\begin{array}{ccccccc}
i \to & \begin{pmatrix} \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in} \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bullet\ \bullet\ b_{1j}\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ b_{2j}\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ b_{nj}\ \bullet \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ c_{ij}\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} & \leftarrow i \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & j & & j &
\end{array}$$

1. att.

Tātad matricas C = AB elements c_{ij} ir vienāds ar matricas A i-tās rindas un matricas B j-tās kolonnas atbilstošo elementu reizinājumu summu. Turpmāk teiksim īsāk – elements c_{ij} ir vienāds ar matricas A i-tās rindas un matricas B j-tās kolonnas reizinājumu.

3. Piemērs

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+(-3)\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 1+(-3)\cdot 0 \\ 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 3+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ -1\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot 2 & -1\cdot 3+4\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kā rāda sekojošais piemērs, matricu reizināšanai neizpildās komutatīvā īpašība AB $\neq$ BA.

4. Piemērs

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kā liecina nākošais piemērs, var atrast tādas matricas A un B, ka reizinājums AB eksistē, bet BA nav definēts.

5. Piemērs

Ja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

tad $AB = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$, bet matricu reizinājums BA nav definēts.

Matricu reizināšanas īpašības:

1) matricu reizināšana nav komutatīva, t.i.,
   $\exists$A,B, ka AB $\neq$ BA.
2) A(C+B) = AC+AB — 1. distributīvā īpašība.
3) (A+B)C = AC+BC — 2. distributīvā īpašība.
4) (λA)B = λ(AB) — skaitliskā reizinātāja iznešana.
5) (AB)C = A(BC) — asociatīvā īpašība.

Norādītās īpašības ir jāsaprot tā: ja ir jēga darbībai vienādības kreisajā pusē, tad ir jēga arī darbībai vienādības labajā pusē un spēkā ir pati vienādība.

Secinājums

Matricu reizinājumā **matricas nedrīkst mainīt vietām!**

Eksistē arī tādas matricas A un B, kurām spēkā ir vienādība AB = BA. Tādas matricas sauc par komutatīvām matricām.

14. Definīcija

Kvadrātisku matricu **pozitīvās pakāpes** definē šādas vienādības

$$A^0 = E,$$
$$A^n = A^{n-1}A,$$

kur $n \in \mathbf{N}$.

6. Piemērs

Matricu reizinājuma specifiku nedaudz atsedz šādas matricu otrās pakāpes (kvadrāti)

1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$