

leskats olimpiāžu matemātikā

LU A. Liepas NMS kolektīvs

Sagrupēt dotos uzdevumus!

1. Kāpēc šie uzdevumi ir vienā grupā?
2. Kas jāievēro risinot šos uzdevumus?/
Ko es zinu par šāda veida uzdevumiem?
3. Kā es varu paredzēt vai apsvērt šo uzdevuma iznākumu?
4. Kāds plāns būtu vislabākais šī uzdevuma risināšanai?

Kāpēc vienā grupā?

10

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar 2 un 7?

20

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar a) ar 2 vai 7; b) ar 2 vai 3?

29

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?

Atrisini!

10

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar 2 un 7?

20

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar a) ar 2 vai 7; b) ar 2 vai 3?

29

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?

UN; VAI; VAI NU..., VAI

Es gribu

- zirgu **un** mašīnu
- zirgu **vai** mašīnu
- **vai nu** zirgu, **vai** mašīnu



Saikļu nozīme

UN	Jāizpildās visiem minētajiem nosacījumiem
VAI	Jāizpildās vismaz vienam minētajam nosacījumam
VAI NU..., VAI	Jāizpildās tieši vienam minētajam nosacījumam

Kāpēc vienā grupā?

1

Cik 4 santīmu pastmarkas nenieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 santīmi, izmantojot 5 santīmu un 9 santīmu pastmarkas?

8

Kādus naturālos skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $(x-2) \cdot (y-2) = 4$?

13

Cik ir tādu naturālu skaitļu n , ka n un $n \cdot n \cdot n + 3$ ir pirmskaitļi?

15

No papīra izgrieza divus izliektus piecstūrus un kaut kā uzlika vienu otram virsū. Kāda figūra var būt abu piecstūru kopīgā daļa?

16

Cik daļās riņķa līnija un kvadrāta kontūrs var sadalīt plakni?

18

Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Piezīme: $x+y$ un $y+x$ nav dažādi veidi.)

33

Cik dažādos veidos var sakārtot 4 melnas lodītes tā, lai tās neatrastos blakus, ja
a) vienas krāsas lodītes ir vienādas;
b) visas lodītes ir atšķirīgas?

Atrisini!

18

Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Piezīme: $x + y$ un $y + x$ nav dažādi veidi.)

Uzdevumu veidi

- **Kāds var būt? Cik var būt?**
 - *Visas iespējamās vērtības*
 - *Pamatojums, ka citu nav*

Risinājums

Visas iespējamās vērtības

Skaitli 50 kā divu pirmskaitļu summu var izteikt 4 veidos:

$$50=47+3;$$

$$50=43+7;$$

$$50=37+13;$$

$$50=31+19.$$

Pamatojums, ka citu nav

Pirmskaitļi, kas nepārsniedz 50:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47.

41 – neder, jo $50=41+9$;

29 – neder, jo $50=29+21$;

23 – neder, jo $50=23+27$;

17 – neder, jo $50=17+33$;

11 – neder, jo $50=11+39$;

5 – neder, jo $50=5+45$;

2 – neder, jo $50=2+48$.

Kāpēc vienā grupā?

2

Vai eksistē slēgta laužta līnija, kura katru savu posmu krusto tieši a) 2 reizes;

3

Vai kvadrātu var sagriezt šaurleņķa trijstūros?

6

Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

9

Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 11 krustpunkti?

32

Vai eksistē tāds negatīvs skaitlis, ka tam pieskaitot tā kvadrātu, tiek iegūts pozitīvs skaitlis?

4

Vai attēlā redzamo šokolādes tēliņu var sadalīt 4 vienādās daļās, laužot tikai gabaliņiem?



23

Vai var izdarīt tā, lai visi trīs puķu podi ar zemi atrastos blakus cits citam, izkustinot tikai vienu no podiem? (Zeme ir 2., 4. un 6. podā.)



Atrisini!

6

Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

9

Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 11 krustpunkti?

Uzdevumu veidi

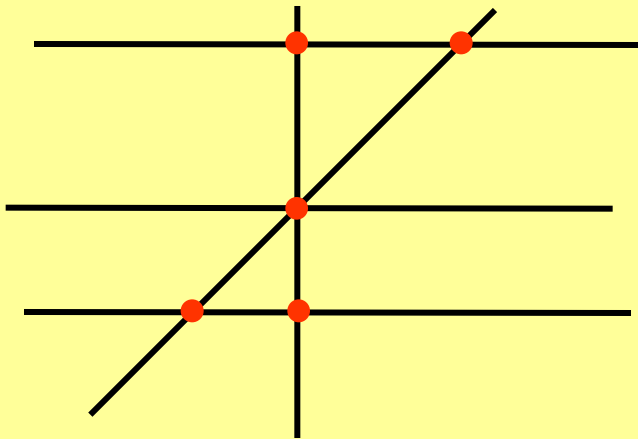
- Kāds var būt? Cik var būt?
 - *Visas iespējamās vērtības*
 - *Pamatojums, ka citu nav*
- Vai... ?
 - Vai iespējams? Vai eksistē?
 - *Jā + piemērs*
 - *Nē + pierādījums, kāpēc nē*

Risinājumi

Jā + piemērs

6. uzdevums

Jā, ir iespējams, skat., piemēram, zīmējumā.



Nē + pierādījums, kāpēc nē

9. uzdevums

Nē, nav iespējams.

Apzīmēsim taisnes ar a, b, c, d un e.

Piecām taisnēm maksimālais krustpunktu skaits ir 10:

ab; ac; ad; ae;

bc; bd; be;

cd; ce;

de.

Kāpēc vienā grupā?

11

Pirtiņā ir četras lāvas. Pirtī pērties iegāja deviņi cilvēki. Vai noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēdēs vismaz trīs cilvēki tad, kad visi būs apsēdušies?

28

Vai vienmēr ir patiess apgalvojums, ka negatīvam skaitlim pieskaitot tā kvadrātu, tiek iegūts pozitīvs skaitlis?

30

Klasē ir 40 skolēnu. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā četri šīs klases skolēni?

36

Vai noteikti visām a un b vērtībām izpildās $a^2 + b^2 \geq 2ab$?

Atrisini!

28

Vai vienmēr ir patiess apgalvojums, ka negatīvam skaitlim pieskaitot tā kvadrātu, tiek iegūts pozitīvs skaitlis?

36

Vai noteikti visām a un b vērtībām izpildās $a^2 + b^2 \geq 2ab$?

Uzdevumu veidi

- Kāds var būt? Cik var būt?

- *Visas iespējamās vērtības*
- *Pamatojums, ka citu nav*

- Vai... ?

- Vai iespējams? Vai eksistē?

- *Jā + piemērs*
- *Nē + pierādījums, kāpēc nē*

- Vai vienmēr? Vai katram? Vai noteikti?

- *Jā + pierādījums*
- *Nē + pretpiemērs*

Risinājums

Jā + pierādījums

36. uzdevums

Jā.

Pierādījums:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &\geq? 2ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq? 0 \\ (a - b)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Nē + pretpiemērs

28. uzdevums

Nē, piemēram,

$$-1 + (-1)^2 = 0$$

Kāpēc vienā grupā?

5

Kāda ir mazākā iespējamā starpība diviem dažādiem deviņciparu skaitļiem, kas katrs satur visus ciparus no 1 līdz 9?

10

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar 2 un 7?

29

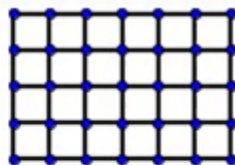
Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?

20

Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās ar a) ar 2 vai 7; b) ar 2 vai 3?

14

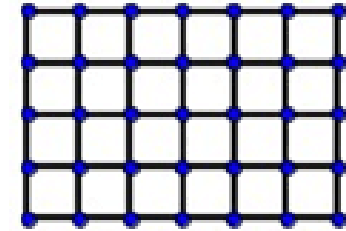
Attēlā redzams zvejošanas tīkls. Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās?



Atrisini!

14

Attēlā redzams zvejošanas tīkls. Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās?



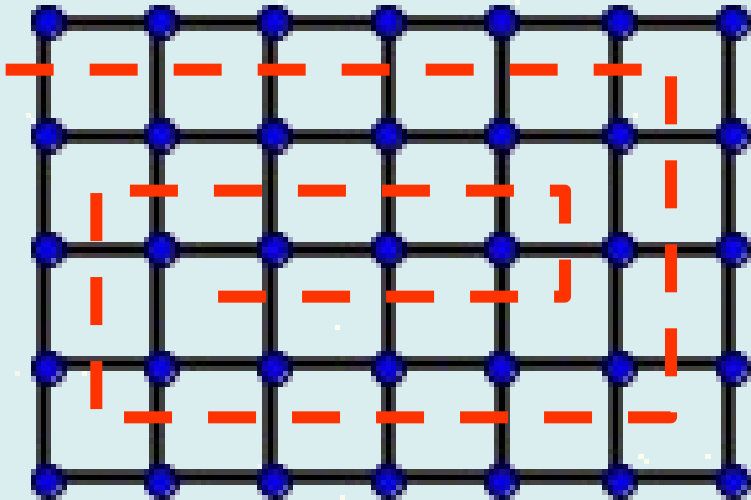
Uzdevumu veidi

- **Kāds var būt? Cik var būt?**
 - *Visas iespējamās vērtības*
 - *Pamatojums, ka citu nav*
- **Vai... ?**
 - Vai iespējams? Vai eksistē?
 - *Jā + piemērs*
 - *Nē + pierādījums, kāpēc nē*
 - Vai vienmēr? Vai katram? Vai noteikti?
 - *Jā + pierādījums*
 - *Nē + pretpiemērs*
- **Kāds ir lielākais? Kāds ir mazākais?**
 - *Lielākā/mazākā vērtība*
 - *Pierādījums, ka vēl lielāka/mazāka vērtība nevar būt*

Risinājums

Lielākā/mazākā vērtība

Lielākais skaits ir 24 griezieni, skat. zīmējumā.



Pierādījums, ka vēl lielāka/mazāka vērtība nevar būt

Tīklam ir 35 mezgli. Lai tīkls paliktu vienā gabalā, mazākais nepieciešamais skaits posmiņu starp mezgliem ir 34. Pavisam starp mezgliem ir $5 \cdot 6 = 30$ horizontāli un $7 \cdot 4 = 28$ vertikāli posmi, tātad kopā $30 + 28 = 58$ posmi.

Līdz ar to lielākais skaits griezienu ir $58 - 34 = 24$.

Kāpēc vienā grupā?

12

Pierādīt, ka kvadrātu var sadalīt vairākos platleņķa trijstūros!

19

Pierādīt, ka neviens no skaitļiem 2347108569; 123457754321; 359999 nav pirmskaitlis!

25

Pierādīt nevienādību $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 > 0$.

21

Izliktā četrstūrī $ABCD$ ir novilkta divas bisektrises – leņķiem ABC un CDA . Abas bisektrises ir paralēlas. Pierādīt, ka leņķi BCD un BAD ir vienādi.

22

Futbola turnīrā piedalās 10 komandas. Katrai komandai ar katru citu jāspēlē vienu reizi. Pierādīt, ka jebkurā brīdī ir divas komandas, kas spēlējušas vienādu spēļu skaitu.

Uzdevumu veidi

- **Kāds var būt? Cik var būt?**
 - *Visas iespējamās vērtības*
 - *Pamatojums, ka citu nav*
- **Vai... ?**
 - Vai iespējams? Vai eksistē?
 - *Jā + piemērs*
 - *Nē + pierādījums, kāpēc nē*
 - Vai vienmēr? Vai katram? Vai noteikti?
 - *Jā + pierādījums*
 - *Nē + pretpiemērs*
- **Kāds ir lielākais? Kāds ir mazākais?**
 - *Lielākā/mazākā vērtība*
 - *Pierādījums, ka vēl lielāka/mazāka vērtība nevar būt*
- **Pierādīt!**

Dalījums pēc matemātikas apakšnozarēm

- Algebra
- Ģeometrija
- Kombinatorika
- Skaitļu teorija
- Algoritmika

Algebras uzdevumi

25 Pierādīt nevienādību $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 > 0$.

26 Atrodi tādus četrus dažādus naturālus skaitļus a , b , c , d , ka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$.

27 Skaitlis a ir vienādojuma $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ sakne. Pierādīt, ka $a > -\frac{1}{2}$.

Ģeometrijas uzdevumi

3 Vai kvadrātu var sagriezt šaurleņķa trijstūros?

6 Vai ir iespējams uzzīmēt 5 taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

15 No papīra izgrieza divus izliektus piecstūrus un kaut kā uzlika vienu otram virsū. Kāda figūra var būt abu piecstūru kopīgā daļa?

16 Cik daļās riņķa līnija un kvadrāta kontūrs var sadalīt plakni?

21 Izliektā četrstūrī $ABCD$ ir novilkta divas bisektrises – leņķiem ABC un CDA . Abas bisektrises ir paralēlas. Pierādīt, ka leņķi BCD un BAD ir vienādi.

Kombinatorikas uzdevumi

1

Cik 4 santīmu pastmarkas nepieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 santīmi, izmantojot tikai 4 santīmu un 9 santīmu pastmarkas?

18

Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Piezīme: $x + y$ un $y + x$ nav dažādi veidi.)

33

Cik dažādos veidos var sakārtot rindā 5 baltas un 4 melnas lodītes tā, lai melnās lodītes neatrastos blakus, ja

- vienas krāsas lodītes ir vienādas;
- visas lodītes ir atšķirīgas?

Skaitļu teorijas uzdevumi

8

Kādus naturālos skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $(x-2) \cdot (y-2) = 4$?

18

Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Piezīme: $x+y$ un $y+x$ nav dažādi veidi.)

19

Pierādīt, ka neviens no skaitļiem 2347108569; 123457754321; 359999 nav pirmskaitlis!

34

Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $n^3 + 5n$ dalās ar 6.

Algoritmikas uzdevumi

24

Uz galda atrodas 7 pēc ārēja izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām un sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai starp dotajām monētām ir atšķirīgā monēta. Ja tāda ir, tad noskaidrot, vai tā ir vieglāka vai smagāka par citām?

35

Četri kungi un četras dāmas atrodas vienā upes krastā. Viņu rīcībā ir laiva, kurā drīkst braukt ne vairāk kā divi cilvēki. Vai viņi visi var nokļūt otrā krastā, ja 1) airēt prot tikai kungi, 2) dāma var palikt krastā vai nu viena pati, vai vēl vismaz vienas dāmas sabiedrībā (t.i., vairākas dāmas krastā ir ar mieru uzturēties kungu sabiedrībā, bet dāma viena pati kungu sabiedrībā nepaliek)?

Vispārīgās pierādīšanas metodes matemātikā

- Vidējās vērtības metode
(*lai paveiktu lielas lietas, vismaz vienā virzienā jākoncentrē pietiekami lieli līdzekļi*)
 - **Dirihlē princips**
- Matemātiskās indukcijas metode
(*domino princips*)
- Invariantu metode
(*meklē nemainīgo!*)
- Ekstremālā elementa metode
(*meklē īpašo!*)
- Interpretāciju metode
(*“tulko” citā valodā*)



Uzdevumi, kas risināmi, izmantojot Dirihlē principu

11

Pirtiņā ir četras lāvas. Pirtī pērties iegāja deviņi cilvēki. Vai noteikti būs tāda lāva, uz kuras sēdēs vismaz trīs cilvēki tad, kad visi būs apsēdušies?

17

Tabulā 3×3 rūtiņas ierakstīti skaitļi -1 , 0 un 1 , katrā rūtiņā viens skaitlis. Aprēķināja katrā rindiņā, katrā kolonnā un galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas. Pierādiet, ka starp iegūtajām summām ir vismaz divas vienādas.

22

Futbola turnīrā piedalās 10 komandas. Katrai komandai ar katru citu jāspēlē vienu reizi. Pierādīt, ka jebkurā brīdī ir divas komandas, kas spēlējušas vienādu spēļu skaitu.

30

Klasē ir 40 skolēnu. Vai noteikti ir tāds mēnesis, kurā savu dzimšanas dienu atzīmē ne mazāk kā četri šīs klases skolēni?

Uzdevumi, kas risināmi, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi

31

Pierādīt, ka katram naturālam n izpildās vienādība $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

34

Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $n^3 + 5n$ dalās ar 6.

Paldies par uzmanību!

