Dalāmības

Mārtiņš Kokainis

Latvijas Universitāte, NMS

Rīga, 2013

Pamatjēdzieni

Dalāmība

1. definīcija

Saka, ka vesels skaitlis m dalās ar veselu skaitli n ($n \neq 0$) un pieraksta $m \,\vdots\, n$, ja eksistē tāds vesels skaitlis k, ka $m = n \cdot k$.

Saka arī, ka skaitlis n ir skaitļa m dalītājs.

Piemēram,

- $9 \,\vdots\, 3$, jo $9 = 3 \cdot 3$.
- $142 \,\vdots\, 71$, jo $142 = 71 \cdot 2$.
- $142 \,\vdots\, (-71)$, jo $142 = (-71) \cdot (-2)$.
- $(-35) \,\vdots\, (-7)$, jo $-35 = (-7) \cdot 5$.

Dalīšana ar atlikumu

2. definīcija

Izdalīt veselu skaitli m ar **naturālu skaitli** n ar atlikumu nozīmē atrast tādus veselus skaitļus q un r, kuriem izpildās vienādība $m = q \cdot n + r$, turklāt $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Ja $r = 0$, tad saka, ka m dalās ar n bez atlikuma (jeb m dalās ar n).

- 29 dalot ar 5, iegūst dalījumu 5 un atlikumu 4, jo $29 = 5 \cdot 5 + 4$.
- -29 dalot ar 5, iegūst dalījumu -6 un atlikumu 1, jo $-29 = (-6) \cdot 5 + 1$.
- -24 dalot ar 3, iegūst dalījumu -8 un atlikumu 0, jo $-24 = (-8) \cdot 3 + 0$.

Kongruences jēdziens

3. definīcija

Doti veseli skaitļi a un b un naturāls skaitlis $n \geq 2$. Saka, ka skaitļi a un b ir kongruenti pēc moduļa n un pieraksta $a \equiv b \pmod{n}$, ja a un b, dalot tos ar n, dod vienādus atlikumus.

1. teorēma

$a \equiv b \pmod{n}$ *tad un tikai tad, ja starpība* $a - b$ *dalās ar* n.

- $3 \equiv 5 \pmod{2}$, jo 5 un 3 abi dod atlikumu 1, dalot ar 2;
- $4 \equiv -2 \pmod{3}$, jo 4 un -2 abi dod atlikumu 1, dalot ar 3;
- $-4 \equiv 87 \pmod{7}$, jo -4 un 87 abi dod atlikumu 3, dalot ar 7.

1. piemērs

Vai sekojošās kongruences ir pareizas?

- $3 \equiv 7 \pmod 4$?
  Jā, jo gan 3, gan 7 dod atlikumu 3, dalot ar 4;
- $3 \equiv 7 \pmod 3$?
  Nē, jo 3 dod atlikumu 0, dalot ar 3, bet 7 dod atlikumu 1, dalot ar 3;
- $17 \equiv 73 \pmod{14}$?
  Jā, jo gan 17, gan 73 dod atlikumu 3, dalot ar 14;
- $44 \equiv -15 \pmod 7$?
  Nē, jo 44 dod atlikumu 2, dalot ar 7, bet -15 dod atlikumu 6, dalot ar 7.

Dalāmības pazīmes

Dalāmība ar 9

- Apzīmēsim ar $S(m)$ naturāla skaitļa m ciparu summu.
- Labi zināma šāda dalāmības pazīme ar 9:

Skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9.

- Analoģiska pazīme dalāmībai ar 3:

Skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3.

- 2013 dalās ar 3, jo $S(2013) = 6$ dalās ar 3;
- 79136 nedalās ar 3, jo $S(79136) = 26$ nedalās ar 3.

Dalāmības pazīmes ar 9 vispārinājums

- Ir spēkā vispārīgāks apgalvojums: skaitlis, dalot ar 9, dod tādu pašu atlikumu, kā šī skaitļa ciparu summa, dalot ar 9.
- Pierakstot to ar kongruencēm, var formulēt šādu teorēmu:

2. teorēma

Katram naturālam skaitlim m ir spēkā $S(m) \equiv m \pmod 9$.

Kādus atlikumus dod šie skaitļi, dalot ar 9?

- $2013 \equiv 2 + 0 + 1 + 3 \equiv 6 \pmod 9$;
- $6511522 \equiv 6 + 5 + 1 + 1 + 5 + 2 + 2 \equiv 11 + 2 + 9 \equiv 4 \pmod 9$.
- $89803 \equiv 8 + 9 + 8 + 0 + 3 \equiv (-1) + 0 + (-1) + 3 \equiv 1 \pmod 9$.

Kāpēc šāda teorēma ir spēkā?
(NB! Šis nav teorēmas pierādījums – tikai atsevišķs piemērs!)

Izmanto faktu, ka $10 \equiv 1 \pmod 9$.

2. piemērs

$$6511522 \equiv ? \pmod 9$$

$$6511522 = 6000000 + 500000 + 10000 + 1000 + 500 + 20 + 2 =$$

$$= 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \equiv$$

$$\equiv 6 \cdot 1^6 + 5 \cdot 1^5 + 1 \cdot 1^4 + 1 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^1 + 2 =$$

$$= 6 + 5 + 1 + 1 + 5 + 2 + 2 = 22 \pmod 9.$$

- No tā, ka $m \equiv S(m) \pmod 9$, izriet, ka $m \equiv S(m) \pmod 3$.

3. piemērs

- Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļa n^2 ciparu summa būtu 2012?
- Atbilde: nē, neeksistē.
- Pieņem pretējo, ka n ir tāds naturāls skaitlis, ka $S(n^2) = 2012$.
- Tad $n^2 \equiv S(n^2) \equiv 2012 \equiv 2 \pmod 3$.
- Taču nevienam naturālam n nevar izpildīties kongruence $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ – pretruna.

1. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis, kas satur tikai ciparus 1, 2 un 3. Ar šo skaitli ļauts veikt sekojošas darbības:

- patvaļīgi mainīt uzrakstīto ciparu kārtību;
- ja skaitlis beidzas ar cipariem '12', tos drīkst nodzēst;
- ja skaitlī pēc kārtas uzrakstīti cipari '21', tos drīkst aizstāt ar '112233';
- ja skaitlī pēc kārtas uzrakstīti cipari '223', tos drīkst aizstāt ar '1';
- izsvītrot trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus ciparus.

Vai, atkārtojot šādus gājienus, iespējams iegūt skaitli 121, ja sākotnēji ir uzrakstīts skaitlis

1. 1122312112;
2. 1221?

1. uzdevums

Ja sākotnēji ir uzrakstīts 1122312112, tad iegūt 121 ir iespējams, piemēram,

$$
\begin{array}{c}
1122312112 \\
\downarrow \\
1111122223 \\
\downarrow \\
1122223 \\
\downarrow \\
11221 \\
\downarrow \\
12112 \\
\downarrow \\
121
\end{array}
$$

1. uzdevums

- Ja sākotnēji ir uzrakstīts 1221, tad iegūt 121 nav iespējams.
- Veicot atļautos gājienus, skaitļa ciparu summa mainās šādi:
  - mainot ciparu secību – nemainās;
  - nodzēšot '12' – samazinās par 3;
  - '21' $\rightarrow$ 112233 – palielinās par 9;
  - '223' $\rightarrow$ '1' – samazinās par 6;
  - izsvītrojot trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus ciparus – samazinās par 3, 6 vai 9.
- Veicot atļautos gājienus, $S(m) \pmod 3$ nemainās, kur m – uz tāfeles uzrakstītais skaitlis.
- Sākotnēji $S(m) = S(1221) \equiv 0 \pmod 3$, bet beigās prasīts iegūt skaitli, kam $S(m) = S(121) \equiv 1 \pmod 3$.
- Tātad nav iespējams no 1221 iegūt 121.

1. uzdevums

Šis piemērs ilustrē kādu pierādījuma tehniku:

- Ja cenšamies pierādīt, ka, izpildot noteiktas operācijas, **nevar** iegūt vēlamo rezultātu,
- var mēģināt lietot invariantu metodi: mēģinām atrast tādu īpašību, kas
  1. **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem;
  2. ir invarianta, t.i., **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas;
  3. **nepiemīt** tiem lielumiem, kas ir jāiegūst galarezultātā.

1. uzdevums

NB! Ja izvēlētā īpašība piemīt arī galarezultātā iegūstamajiem lielumiem, tas vēl **nenozīmē**, ka šos lielumus patiešām var iegūt!

Dalāmība ar 11

Naturāls skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja skaitļa to ciparu summa, kas atrodas pāra pozīcijās, mīnus ciparu summa, kas atrodas nepāra pozīcijās, dalās ar 11.

- "Pāra" un "nepāra" pozīcijas sāk skaitīt *no labās puses uz kreiso*, t.i., vienu skaits – nepāra pozīcija, desmitu skaits – pāra pozīcija, simtu skaits – nepāra pozīcija utt.

Vai skaitlis 43725 dalās ar 11?

- $S_1(43725) = 5 + 7 + 4 = 16$ – ciparu summa **nepāra** pozīcijās;
- $S_2(43725) = 2 + 3 = 5$ – ciparu summa **pāra** pozīcijās.
- Starpība $16 - 5 = 11$ dalās ar 11, tātad skaitlis 43725 dalās ar 11.

Dalāmības pazīmes ar 11 vispārinājums

- Ir spēkā vispārīgāks apgalvojums: skaitlis m, dalot ar 11, dod tādu pašu atlikumu kā starpība $S_1(m) - S_2(m)$, dalot to ar 11.
- Pierakstot to ar kongruencēm, var formulēt šādu teorēmu:

3. teorēma

Katram naturālam skaitlim m ir spēkā $S_1(m) - S_2(m) \equiv m \pmod{11}$.

Kādus atlikumus dod šie skaitļi, dalot ar 11?

- $2014 \equiv (4+0) - (1+2) \equiv 1 \pmod{11}$;
- $6511522 \equiv (2+5+1+6) - (2+1+5) \equiv 14 - 8 \equiv 6 \pmod{11}$;
- $89803 \equiv (8+8+3) - (9+0) \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}$.

Kāpēc šāda teorēma ir spēkā?

Izmanto faktu, ka $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

4. piemērs

$$6511522 \equiv ? \pmod{11}$$

$$6511522 = 6000000 + 500000 + 10000 + 1000 + 500 + 20 + 2 =$$
$$= 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \equiv$$
$$\equiv 6 \cdot (-1)^6 + 5 \cdot (-1)^5 + 1 \cdot (-1)^4 + 1 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 +$$
$$+ 2 \cdot (-1)^1 + 2 \equiv$$
$$\equiv 6 - 5 + 1 - 1 + 5 - 2 + 2 \equiv 6 \pmod{11}.$$

2. uzdevums

Dots, ka n ir naturāls skaitlis, kas dalās ar 99. Pierādiet, ka skaitļa n ciparu summa ir vismaz 18!

- $99 = 9 \cdot 11$. Izmantot dalāmības pazīmes ar 9 un 11! Ko var pateikt par $S_1(n)$ un $S_2(n)$?
- No tā, ka n dalās ar 11, seko, ka $S_1(n) - S_2(n)$ dalās ar 11.
- No tā, ka n dalās ar 9, seko, ka $S_1(n) + S_2(n)$ dalās ar 9.
- Jāpierāda, ka $S_1(n) + S_2(n) \geq 18$.

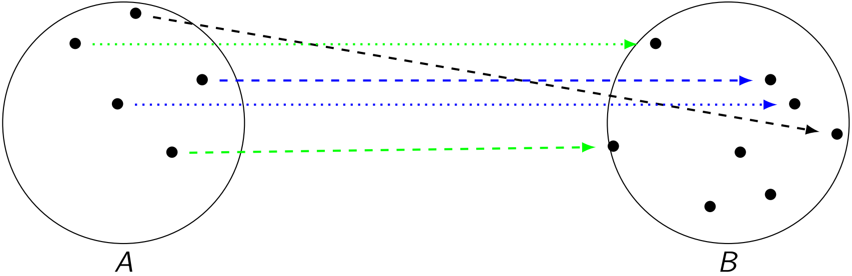
2. uzdevums

- Tā kā $S_1(n) + S_2(n)$ dalās ar 9, tad $S_1(n) + S_2(n)$ var pieņemt vērtības 9, 18, 27, ...
- Jāpierāda, ka $S_1(n) + S_2(n) \neq 9$.
- Ja $S_1(n) + S_2(n) = 9$, tad $|S_1(n) - S_2(n)| \leq 9 - 0 = 9$.
- Tā kā $S_1(n) - S_2(n)$ dalās ar 11, tad $S_1(n) - S_2(n) = 0$.
- Taču tad $S_1(n) + S_2(n)$ ir pāra skaitlis – pretruna.

5. piemērs

- Autobusu biļetei ir sešciparu numurs no 000000 līdz 999999. Kādu biļešu ir vairāk: tādu, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa ir vienāda ar pēdējo trīs ciparu summu, vai tādu, kuru numurs dalās ar 11?
- Atbilde: vairāk ir biļešu, kuru numurs dalās ar 11.
- Ievērosim, ka katrai biļetei $a_6a_5a_4a_3a_2a_1$, kurai izpildās vienādība $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$ varam piekārtot biļeti $a_6a_1a_5a_2a_4a_3$, kuras numurs dalās ar 11 saskaņā ar dalāmības pazīmi.
- Dažādām biļetēm, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa ir vienāda ar pēdējo trīs ciparu summu, tiek piekārtotas dažādas biļetes, kuru numurs dalās ar 11.
- Bet ir vēl tādas biļetes, kuru numuri dalās ar 11, taču tās netiek iegūtas šādā veidā, piemēram, biļete 605000. Tātad biļešu, kuru numurs dalās ar 11, ir vairāk.

5. piemērs

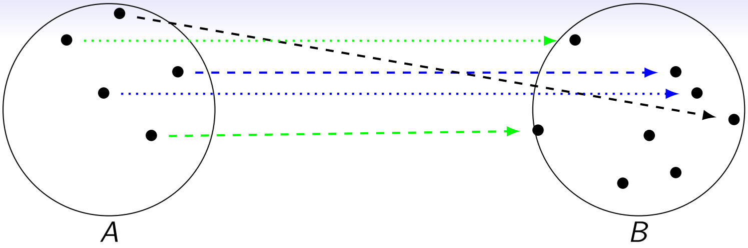


5. piemērs

Šis piemērs ilustrē vēl kādu pierādījuma tehniku:

- ja ir divas (galīgas) kopas A un B
- un jāpierāda, ka kopā B ir vairāk elementu nekā kopā A,
- tad pietiek uzrādīt tādu atbilstību, lai
  1. **katram** kopas A elementiem ir piekārtots tieši viens kopas B elements;
  2. **dažādiem** A elementiem **piekārtoti dažādi** B elementi,
  3. un ir vēl tādi B elementi, **kuriem nav piekārtoti** kopas A elementi.

5. piemērs



- Kopa A – biļetes, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa sakrīt ar pēdējo trīs ciparu summu; kopa B – biļetes, kuru numuri dalās ar 11.
- Katrai biļetei $a_6a_5a_4a_3a_2a_1$, kuru numuru pirmo trīs ciparu summa sakrīt ar pēdējo trīs ciparu summu (no kopas A), piekārtota biļete $a_6a_1a_5a_2a_4a_3$, kuras numurs dalās ar 11 (no kopas B).
- Dažādām biļetēm no A ir piekārtotas dažādas biļetes no kopas B.
- Kopā B ir vēl tādas biļetes, kurām nav piekārtota neviena biļete no A (piemēram, 605000).

Dalāmība ar 7

- Pieņemsim, ka dots (liels) naturāls skaitlis n un ir jānoskaidro, vai tas dalās ar 7.
- Sadalīsim n decimālo pierakstu blokos pa trim cipariem, piemēram, ja $n = 62105998913$, tad

$$62105998913 = \underbrace{062}\underbrace{105}\underbrace{998}\underbrace{913}.$$

- Apzīmēsim ar $N(n)$ bloku nepāra pozīcijās summu; ar $P(n)$ apzīmē bloku pāra pozīcijās summu (**skaitot no labās puses uz kreiso**). Piemērā: $N(n) = 913 + 105 = 1018$; $P(n) = 998 + 62 = 1060$.

Skaitlis n dalās ar 7 tad un tikai tad, ja starpība $N(n) - P(n)$ dalās ar 7.

- Šajā gadījumā $N(n) - P(n) = 1018 - 1060 = -42$ dalās ar 7, tātad arī n dalās ar 7.

Dalāmība ar 13

Skaitlis n dalās ar 13 tad un tikai tad, ja starpība $N(n) - P(n)$ dalās ar 13.

Skaitlis n dalās ar 11 tad un tikai tad, ja starpība $N(n) - P(n)$ dalās ar 11.

- Šajā piemērā $N(n) - P(n) = 1018 - 1060 = -42$ nedalās ar 13, ne 11, tātad arī n dalās ne ar 13, ne 11.

4. teorēma

Katram naturālam skaitlim n ir spēkā kongruences

$$N(n) - P(n) \equiv n \pmod{7};$$
$$N(n) - P(n) \equiv n \pmod{13};$$
$$N(n) - P(n) \equiv n \pmod{11}.$$

- $62105998913 \equiv 1018 - 1060 = -42 \equiv -42 + 4 \cdot 13 \equiv 10 \pmod{13};$
- $62105998913 \equiv 1018 - 1060 = -42 \equiv -42 + 4 \cdot 11 \equiv 2 \pmod{11}.$

Kāpēc šāda teorēma ir spēkā?

Izmanto faktu, ka $1001 = 7 \cdot 13 \cdot 11$, tāpēc

$$10^3 = 1000 \equiv -1 \pmod 7.$$

6. piemērs

$$62105998913 \equiv ? \pmod 7$$

$$62105998913 = 62000000000 + 105000000 + 998000 + 913 =$$

$$= 62 \cdot 10^9 + 105 \cdot 10^6 + 998 \cdot 10^3 + 913 =$$

$$= 62 \cdot (10^3)^3 + 105 \cdot (10^3)^2 + 998 \cdot 10^3 + 913 \equiv$$

$$\equiv 62 \cdot (-1)^3 + 105 \cdot (-1)^2 + 998 \cdot (-1) + 913 \equiv$$

$$\equiv -62 + 105 - 998 + 913 \equiv -1060 + 1018 \equiv -42 \equiv 0 \pmod 7.$$

3. uzdevums

Vai skaitlis

$$\underbrace{111000111000\ldots111000111}_{\text{72 vieninieki}}$$

ir kāda naturāla skaitļa kubs?

- Izmantot dalāmības pazīmi ar 7! Kādi ir $N(n)$ un $P(n)$?
- $N(n) = 111 \cdot 24, \; P(n) = 0;$
- $n \equiv N(n) - P(n) \equiv 111 \cdot 24 - 0 \equiv 41 \cdot 3 \equiv (-1) \cdot 3 \equiv 4 \pmod 7;$
- Veselu skaitļu kubi nevar pieņemt vērtību 4 pēc moduļa 7.

Un vēlreiz par dalīšanos ar 11

- Pieņemsim, ka dots naturāls skaitlis n, un ir jānoskaidro, vai tas dalās ar 11.
- Sadalīsim n decimālo pierakstu blokos pa diviem cipariem, piemēram, ja $n = 62105998913$, tad

$$62105998913 = \underbrace{06}\underbrace{21}\underbrace{05}\underbrace{99}\underbrace{89}\underbrace{13}.$$

- Apzīmēsim ar $A(n)$ visu bloku summu.

- Skaitlis n dalās ar 11 tad un tikai tad, ja $A(n)$ dalās ar 11.
- Katram naturālam skaitlim n ir spēkā kongruence $A(n) \equiv n \pmod{11}$.

- Šajā piemērā $A(n) = 6 + 21 + 5 + 99 + 89 + 13 \equiv 6 - 1 + 5 + 0 + 1 + 2 \equiv 2 \pmod{11}$, tātad arī $n \equiv 2 \pmod{11}$.

Kāpēc šāda teorēma ir spēkā?

Izmanto faktu, ka $99 = 9 \cdot 11$, tāpēc

$$10^2 = 100 \equiv 1 \pmod{11}.$$

7. piemērs

$$62105998913 \equiv ? \pmod{11}$$

$$\begin{aligned}
&62105998913 = \\
&= 6 \cdot 10^{10} + 21 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^6 + 99 \cdot 10^4 + 89 \cdot 10^2 + 13 = \\
&= 6 \cdot (10^2)^5 + 21 \cdot (10^2)^4 + 5 \cdot (10^2)^3 + 99 \cdot (10^2)^2 + 89 \cdot 10^2 + 13 \equiv \\
&\equiv 6 \cdot 1^5 + 21 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 + 99 \cdot 1^2 + 89 \cdot 1 + 13 \equiv \\
&\equiv 6 + 21 + 5 + 99 + 89 + 13 \equiv 2 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Paldies par uzmanību!