MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Fazer

KLASE

FIZMATI.LV


MAP OF LATVIA
SCALE 1:2 350 000
0
23.5
47 km
21°00´
24°00´
27°00´
58°00´
56°00´
BALTIJAS JŪRA
BALTIC SEA
Rīgas jūras līcis
Gulf of Riga
Irbes šaurums
Stockholm
Västervik
Rostock Karlshamn
EST
RUS
LT
BY
TALLINN
ST. PETERSBURG
MOSCOW
VITEBSK, SMOLENSK
VILNIUS, KAUNAS
KALININGRAD
RĪGA
Jūrmala
Ventspils
Liepāja
Jelgava
Daugavpils
Rēzekne
Valmiera
Cēsis
Sigulda
Ogre
Salaspils
Tukums
Talsi
Kuldīga
Saldus
Bauska
Jēkabpils
Madona
Gulbene
Alūksne
Balvi
Ludza
Preiļi
Krāslava
Limbaži
Valka
Valga
Smiltene
Aizkraukle
Dobele
Aizpute
Kolka
Ainaži
Salacgrīva
Saulkrasti
Kuressaare
Saaremaa
Viljandi
Tartu
Võru
Pskov
Ostrov
Šiauliai
Panevėžys
Klaipėda
Palanga
Mažeikiai
Biržai
Rokiškis
Visaginas
Ruhnu
Kihnu
Daugava
Gauja
Venta
Lielupe

Soli pa solim ģeometrijas uzdevumi

Zinātniskā grāda pretendente

Aija Cunska

Mazā matemātikas universitāte
5. nodarbība, 2013. gada 2. februāris

Matemātiskās indukcijas metode

- Ja dots izteikums A, kas definēts katram $n \in N$, un ir jāpierāda tā patiesums, tad, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādījumu veic pēc šāda algoritma.

  1) **Bāze.** Pamato, ka izteikums A ir patiess, ja $n = 1$.

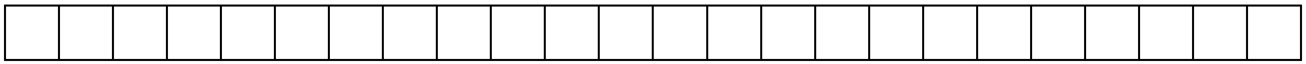
  2) **Induktīvais pieņēmums**. Pieņem, ka izteikums A ir patiess, ja $n = k$, kur $k \in N$.

  3) **Induktīvā pāreja.** Pierāda, ka tādā gadījumā A ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$.

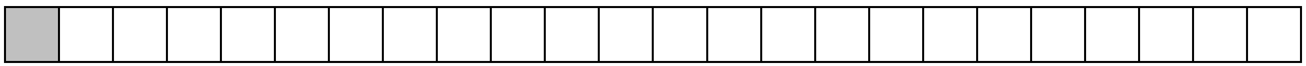
  4) **Secinājums.** Secina, ka A ir patiess visiem $n \in N$.

Kā ģeometriski varētu ilustrēt MIP?

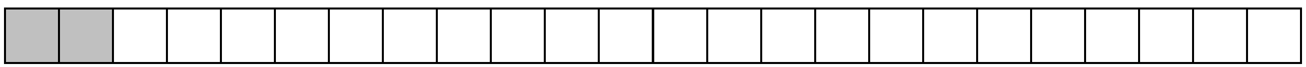
- Apgalvojumu A(n) attēlosim ar rūtiņu rindu



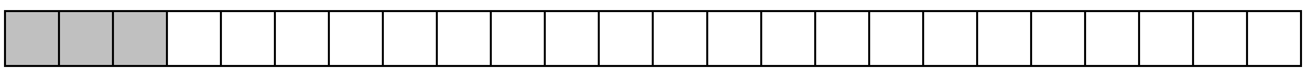
Ja A(1) ir patiess, tad varam aizkrāsot pirmo rūtiņu (BĀZE):



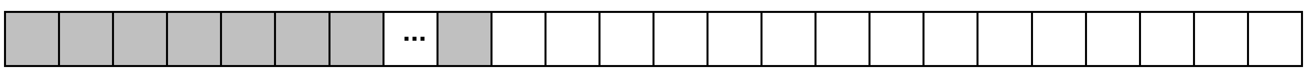
Ja A(2) ir patiess, tad varam aizkrāsot otro rūtiņu (BĀZE):



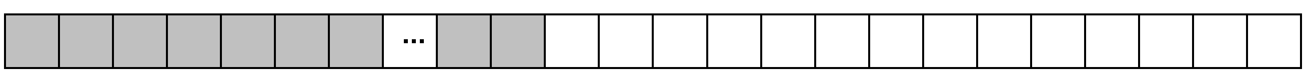
Ja A(3) ir patiess, tad varam aizkrāsot trešo rūtiņu (BĀZE):



Ja A(k) ir patiess, tad varam aizkrāsot k-to rūtiņu (PIEŅĒMUMS):

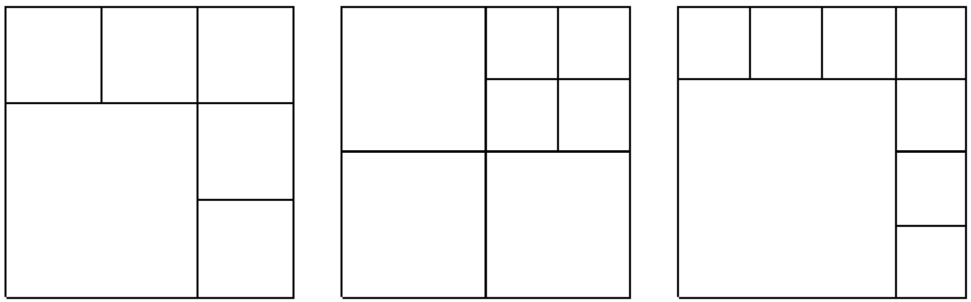


Ja A(k+1) ir patiess, tad varam aizkrāsot k+1-mo rūtiņu (PĀREJA):



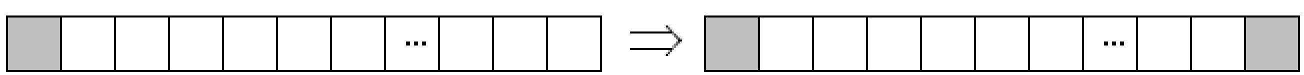
UZDEVUMS. Pierādīt, ka jebkuru kvadrātu var sagriezt n kvadrātos, ja n>=6.

1. Bāze. Zīmējumā parādīts, kā kvadrātu var sagriezt 6, 7, un 8 kvadrātos.

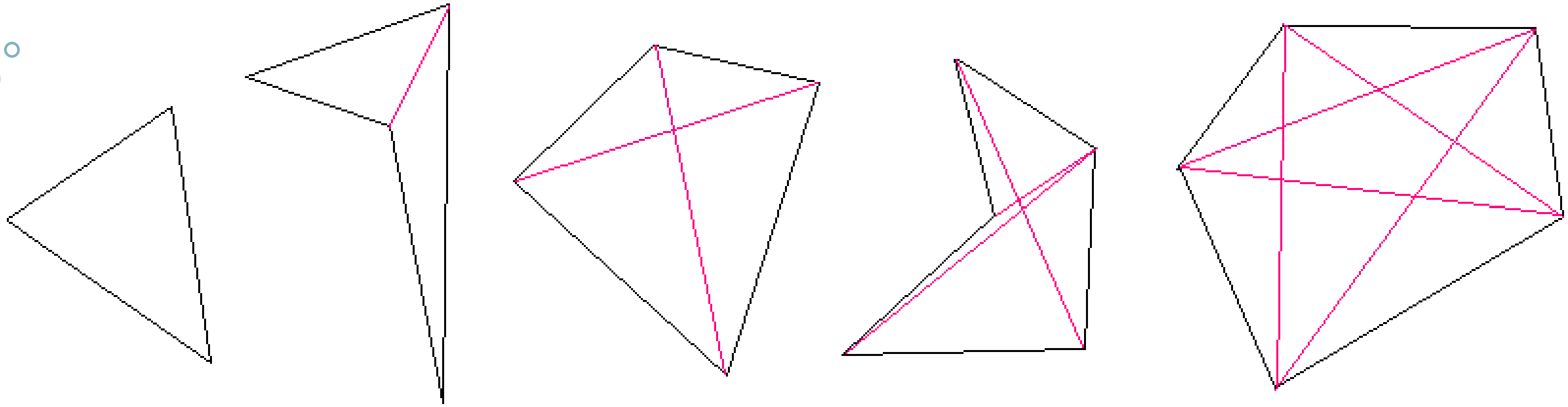


2. Pieņēmums. Kvadrātu var sagriezt m kvadrātos.
3. Pāreja. Ja kvadrātu var sagriezt m kvadrātos, tad to var sagriezt arī m+3 kvadrātos: pietiek vienu no m kvadrātiem sagriezt 4 vienādos kvadrātos.
4. Secinājums. Jebkuru kvadrātu var sagriezt n kvadrātos, ja n>=6.

Sarežģītāka viendimensiju indukcijas shēma:

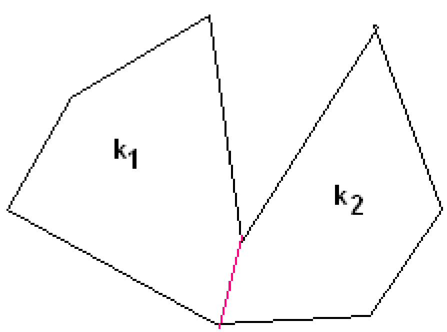


UZDEVUMS. Pierādīt, ka katram n-stūrim (ne noteikti izliektam) var novilkt vismaz n-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē.

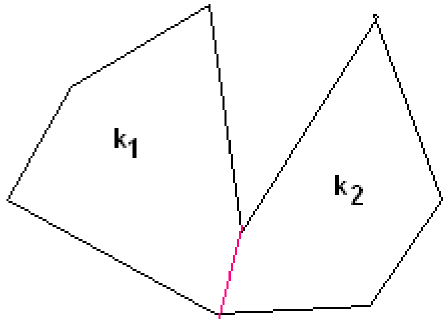


1. **Bāze.** Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess trijstūrim, četrstūrim, piecstūrim, ..., (m-1)-stūrim.

2. **Pieņēmums.** Aplūkosim kaut kādu m-stūri. Ja tas ir izliekts, tad no katras šī daudzstūra virsotnes iziet m-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē. Ja daudzstūris ir ieliekts, apskatām virsotni, pie kuras m-stūra iekšējais leņķis lielāks nekā 180 grādi.



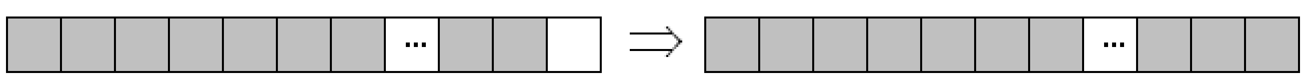
No šīs virsotnes iziet vismaz viena diagonāle, kas atrodas m-stūra iekšpusē: šī diagonāle sadala m-stūri k_1-stūrī un k_2-stūrī, pie tam $k_1<m$, $k_2<m$ un $k_1+k_2=m+2$.



3. Pāreja. Pēc induktīvā pieņēmuma k_1-stūra iekšpusē atrodas vismaz k_1-3 tā diagonāles (tās ir arī dotā m-stūra diagonāles) un k_2-stūra iekšpusē atrodas vismaz k_2-3 tā diagonāles (kas arī ir dotā m-stūra diagonāles), tāpēc dotā m-stūra iekšpusē atrodas vismaz $(k_1-3) + (k_2-3) + 1 = k_1 + k_2 - 5 = (m+2) - 5 = m - 3$ diagonāles, ko arī vajadzēja pierādīt.

4. Secinājums. Katram n-stūrim (ne noteikti izliektam) var novilkt vismaz n-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē.

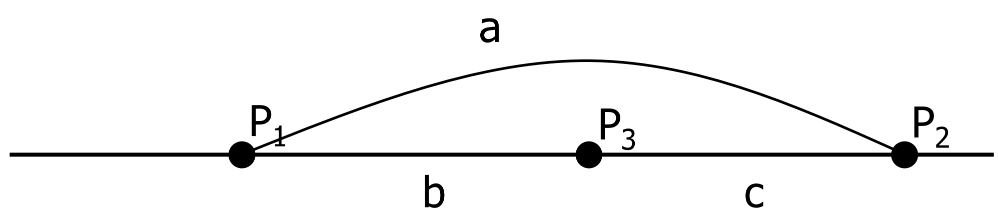
Izmantota ir sarežģītāka vienvirziena indukcijas shēma:



$3, 4, \ldots, m-1 \Rightarrow m$

UZDEVUMS. Uz taisnes doti n≥2 nogriežņi; ik diviem no tiem ir kopējs punkts. Pierādīt, ka visiem n nogriežņiem ir kopējs punkts.

1. Bāze. Ja n=2, apgalvojums acīmredzot ir patiess. Aplūkosim trīs nogriežņus a, b un c. Pieņemsim, ka $P_1 € a \cap b$, $P_2 € a \cap c$, $P_3 € b \cap c$. Aplūkosim P_1, P_2 un P_3 novietojumu uz taisnes. Vismaz viens no tiem pieder nogrieznim, kura galapunkti ir abi pārējie. Pieņemsim, ka $P_3 € [P_1P_2]$. Tā kā $P_1 € a \cap b$ un $P_2 € a \cap c$, tad arī $P_1 € a$ un $P_2 € a$, tāpēc $[P_1P_2] € a$. Tā kā $P_3 € [P_1P_2]$, tad arī $P_3 € a$. Tātad P_3 ir kopējs visiem trim nogriežņiem.



2. Pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs k nogriežņiem.

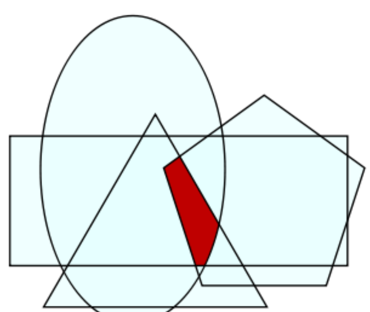
3. Pierādīsim, ka tas patiess arī k+1 nogriežņiem $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, ja ik diviem no tiem ir kopējs punkts. Aplūkosim k nogriežņus $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k \cap a_{k+1}$. Tā kā nogriežņiem a_k un a_{k+1} ir kopēji punkti, tad $a_k \cap a_{k+1}$ arī ir nogrieznis (var būt 1 punkts).

Pierādīsim, ka arī katriem diviem no šiem k nogriežņiem ir kopējs punkts. Tiešām, ik diviem no nogriežņiem $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ ir kopējs punkts saskaņā ar doto k+1 nogriežņu īpašībām; nogriežņiem $a_k \cap a_{k+1}$ un a_i $(1 \le i \le k-1)$ ir kopējs punkts saskaņā ar jau pierādīto gadījumu, kad n=3.

Tātad pēc induktīvās hipotēzes k nogriežņiem $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k \cap a_{k+1}$ ir kopējs punkts; tas pats punkts ir kopējs arī dotajiem k+1 nogriežņiem.

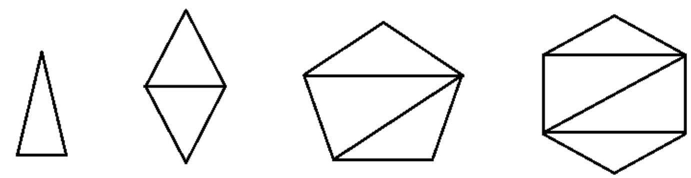
Helli (Eduard Helly) teorēma plaknē (telpā):

a) Ja plaknē dotas n, $n \ge 3$ izliektas figūras un jebkurām trim no tām ir kopējs punkts, tad visām n figūrām ir kopējs punkts;
b) Ja telpā dotas n, $n \ge 4$ izliektas figūras un jebkurām četrām no tām ir kopējs punkts, tad visām n figūrām ir kopējs punkts.



UZDEVUMS. Cik trijstūros izliektu n-stūri var sadalīt diagonāles, kuras savstarpēji nekrustojas.

1.Bāze. Mazākais ir trijstūris (n=3 un viens trijstūris). Četrstūrim – viena diagonāle un divi trijstūri. Piecstūrim – divas diagonāles un trīs trijstūri. ...



2. Pieņēmums. Pie n=k k-stūri var sadalīt k-2 trijstūros.

3. Pierādījums. Apskatīsim n-stūri $A_1A_2A_3...A_n$, kurš sadalīts trijstūros. Pieņemsim, ka A_1A_k – viena no n-stūra diagonālēm. Tā sadala n-stūri divās daļās:

k-stūrī $A_1A_2A_3...A_k$ un n-k+2-stūrī $A_1A_kA_{k+1}...A_n$

Atbilstoši pieņēmumam kopējais trijstūru skaits būs

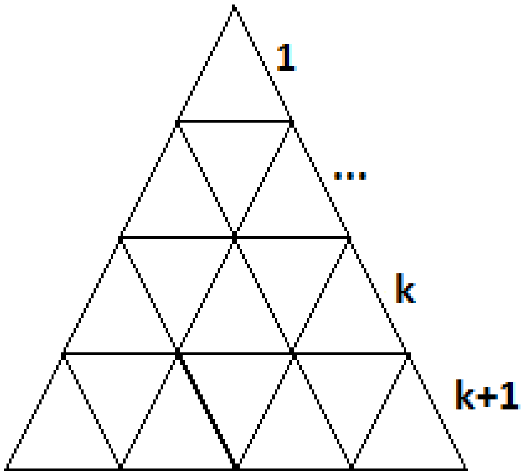
$(k - 2) + [(n - k + 2) - 2] = n - 2$

4. Secinājums. Izliektu n-stūri diagonāles var sadalīt n–2 trijstūros.

UZDEVUMS. Regulāra trijstūra katra mala sadalīta n vienādās daļās. Caur dalījuma punktiem novilktas taisnes paralēli trijstūra malām. Pierādīt, ka tās sadala doto trijstūri n^2 trijstūros.

1.Bāze. Ja n=1, tad rodas viens trijstūris. Ja n=2, tad rodas četri trijstūri. Ja n=3, tad rodas deviņi trijstūri.
2.Pieņēmums, ka pie n=k trijstūris tiks sadalīts k^2 trijstūros.
3.Pāreja. Ja n=k+1, tad trijstūru skaits būs

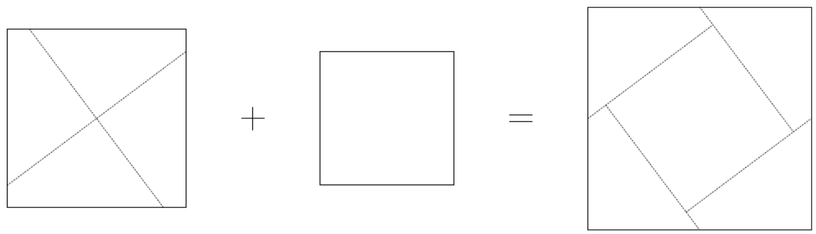
k^2 (pēc pieņēmuma) $+ 2(k + 1) - 1 =$
$k^2 + 2k + 2 – 1 =$
$k^2 + 2k + 1 =$
$(k + 1)^2$



4. Secinājums. Trijstūris, kuram katra mala sadalīta n vienādās daļās, tiek sadalīts n^2 trijstūros.

UZDEVUMS. Doti n dažādi kvadrāti. Pierādīt, ka tos var sagriezt daļās tā, ka no iegūtajām daļām var izveidot jaunu kvadrātu.

1.Bāze. Ja n=1, tad vienīgais kvadrāts nav jāgriež daļās. Ja n=2, tad apgalvojums ir spēkā – Apskatīsim kvadrātu ABCD un abcd, kuru malas atbilstoši apzīmēsim ar x un y, kur $x \geq y$.

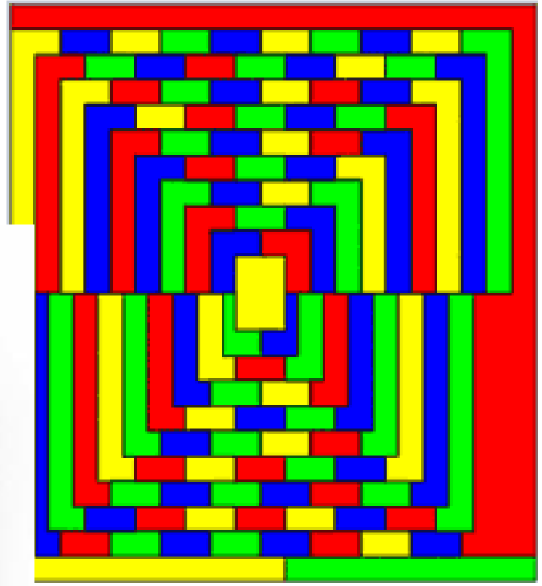


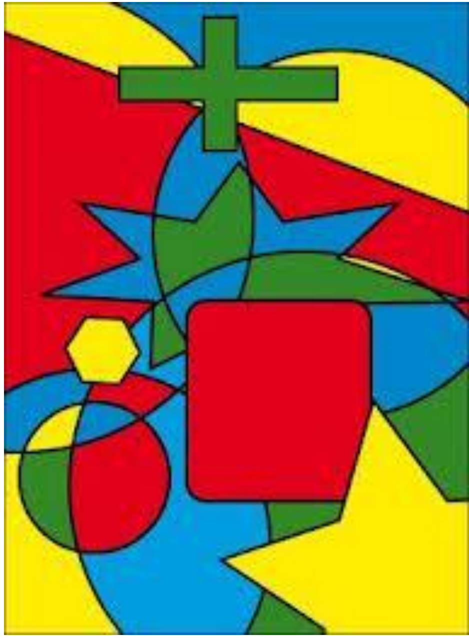
Uz kvadrāta ABCD malām atliksim nogriežņus AM = BN = CP = DQ = (x + y) / 2 un sagriezīsim kvadrātu ABCD pa taisnēm MP un NQ, kuras krustojas punktā O un veido taisnus leņķus. Kvadrātu sadala 4 vienādās daļās. Iegūtās daļas pieliksim kvadrātam abcd kā parādīts zīmējumā. Iegūtā figūra arī ir kvadrāts, jo leņķi un malas ir vienādi.

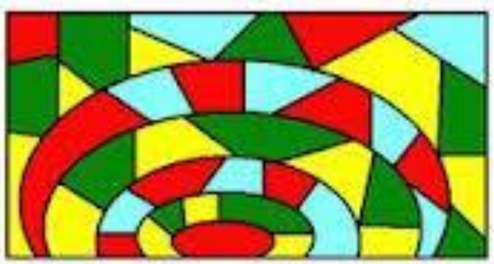
2. Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā pie n=k.

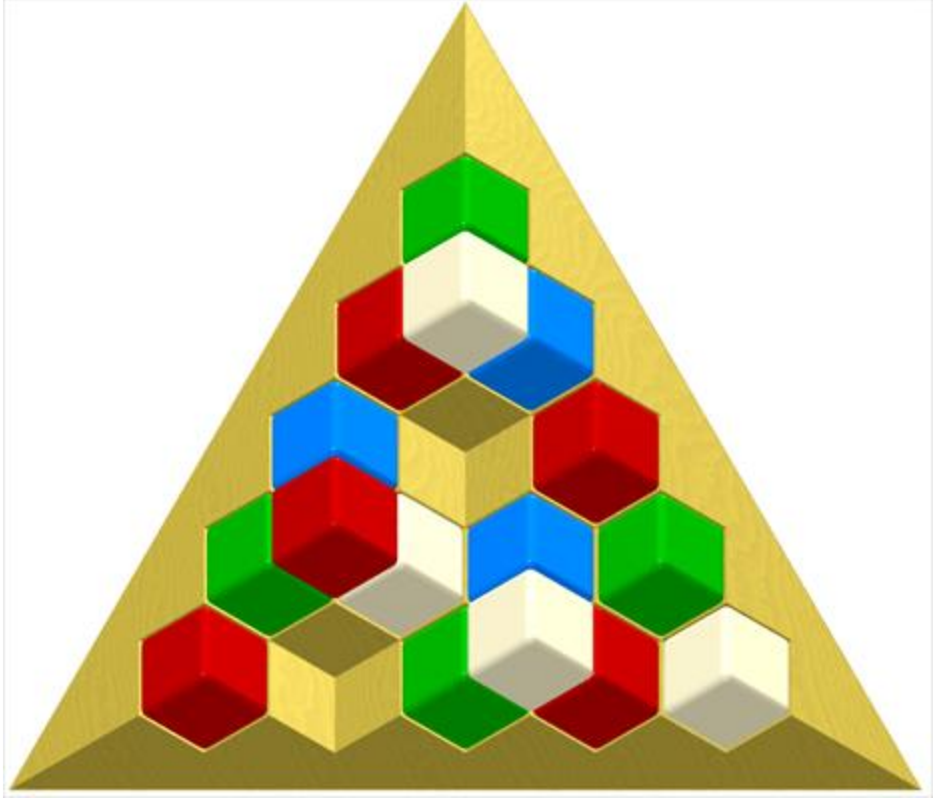
3. Pāreja. Apskatīsim n=k+1 kvadrātus K_1, K_2, ..., K_k, K_{k+1}. Izvēlēsimies jebkurus divus no šiem kvadrātiem un vienu sagriezīsim tā, lai izveidotos jauns kvadrāts K\`. Tālāk atbilstoši pieņēmumam k kvadrātus $K_1$, $K_2$, ..., $K_{k-1}$, K\` var sagriezt daļās tā, lai izveidotu jaunu kvadrātu.

KRĀSU PASAULE







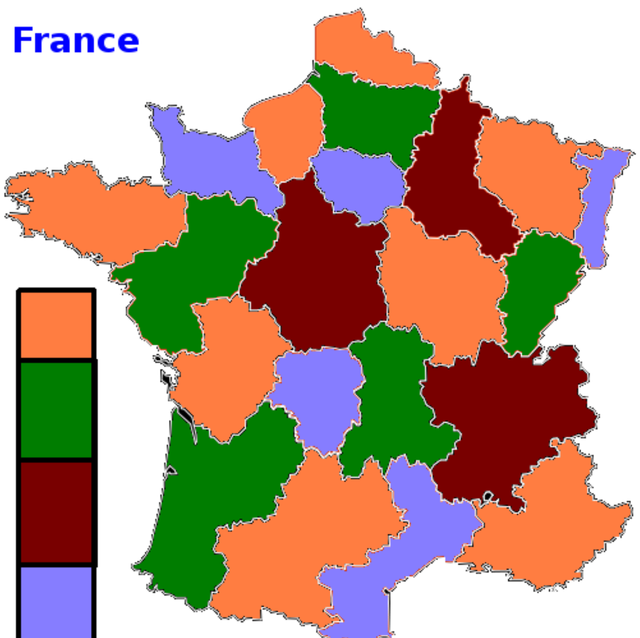


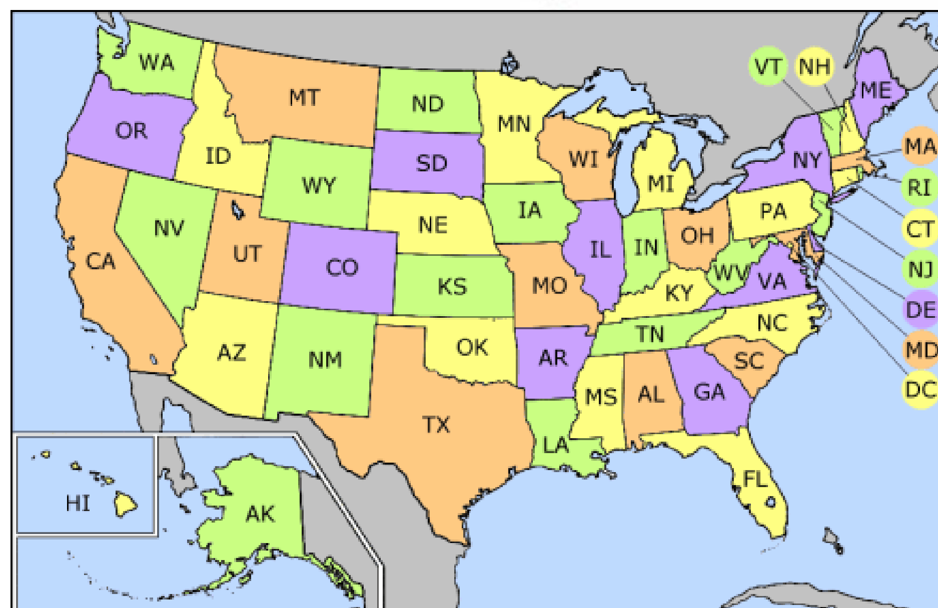
Plaknē dota karte, kuru sauksim par pareizi izkrāsotu, ja katra valsts ir izkrāsota kādā krāsā tā, lai valstis, kas robežojas, būtu izkrāsotas atšķirīgās krāsās.

Jautājums – kāds ir mazākais krāsu skaits, kurās var izkrāsot valstu karti?


Germany
Poland
Czech Republic
Slovakia
Austria
Hungary
Switzer land
Slovenia
Italy

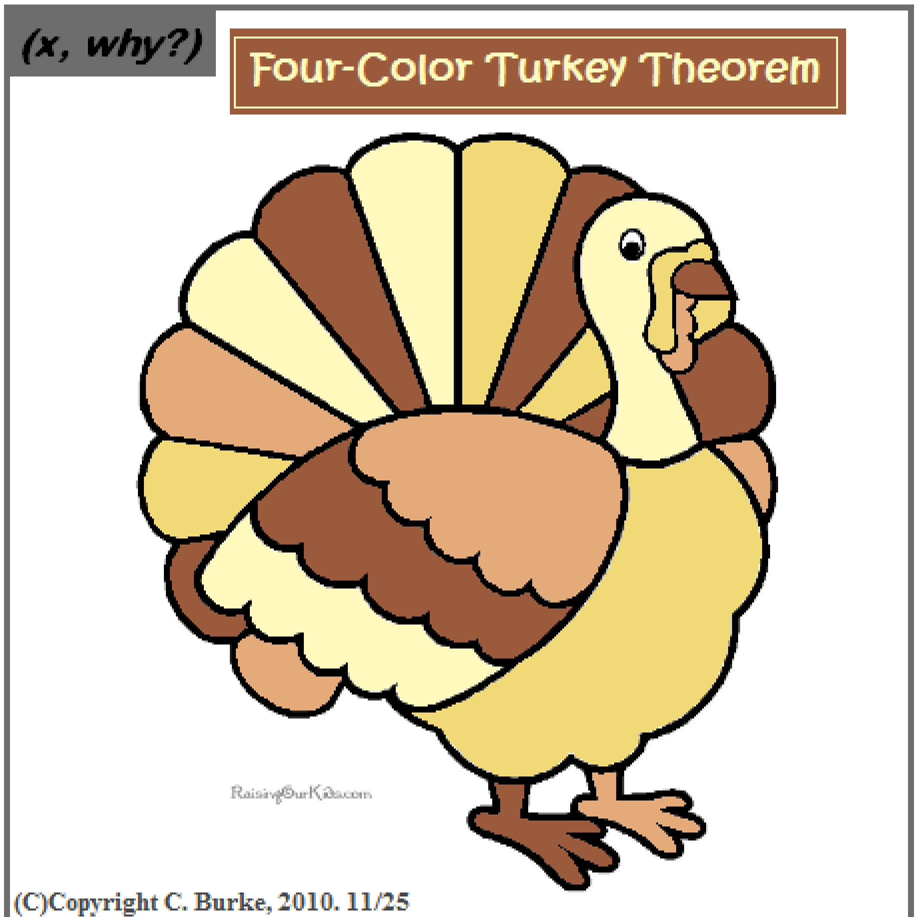

Poland
Czech Republic
Germany
Slovakia
Switzer land
Austria
Hungary
Italy
Slovenia


France


WA
MT
ND
MN
VT
NH
ME
OR
ID
SD
WI
NY
MA
WY
MI
RI
IA
PA
CT
NV
NE
IL
IN
OH
CA
UT
CO
NJ
KS
MO
WV
VA
KY
DE
TN
NC
MD
OK
AR
SC
AZ
NM
MS
AL
GA
DC
TX
LA
FL
HI
AK

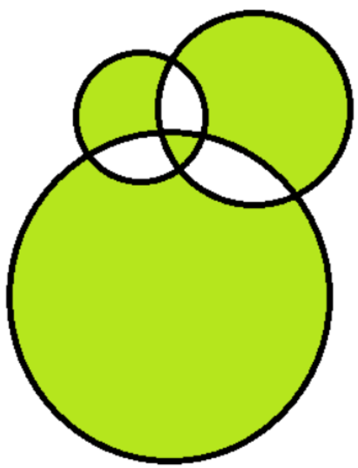
1852. gadā radās četru krāsu teorēma:

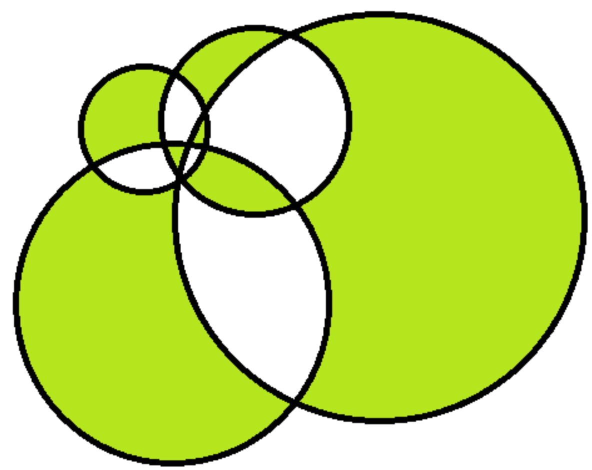
Jebkuras kartes izkrāsošanai pietiek ar 5 krāsām.
Līdz šim nav atrasta neviena karte, kuru nevarētu izkrāsot ar 4 krāsu palīdzību.
Mūsdienās pierādījumam tiek izmantotas speciālas datorprogrammas.



UZDEVUMS. Plaknē doti n riņķi. Pierādīt, ka valstu karti, kuru veido riņķu apgabali, var izkrāsot 2 krāsās.

1.Bāze. Ja n=1, tad apgalvojums ir spēkā.
2.Pieņēmums. Ja n=k, tad k riņķu veidoto apgabalu karti var izkrāsot 2 krāsās.



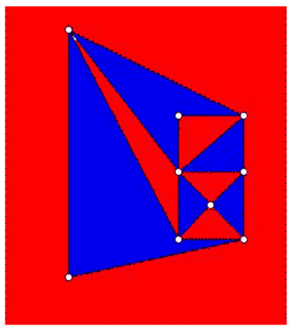


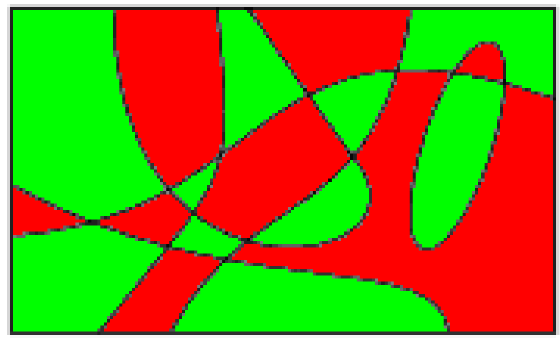
3. Pierādījums. Pie esošajiem k riņķiem pievienosim k+1-mo riņķi un tā iekšpusē visas krāsas mainīsim uz pretējo. Redzam, ka k+1 riņķu veidoto apgabalu karti var izkrāsot 2 krāsās.

4. Secinājums. Valstu karti, kuru veido n riņķu apgabali, var izkrāsot 2 krāsās.

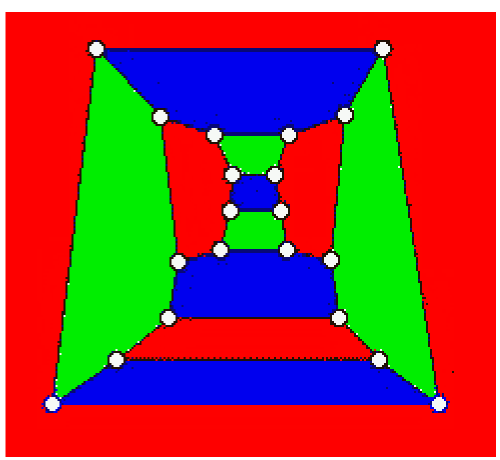
Divu krāsu teorēma:

Lai valstu karti varētu izkrāsot divās krāsās ir nepieciešami un pietiekami, lai katrā virsotnē satiktos pāra skaits valstu.





Trīs krāsu teorēma:

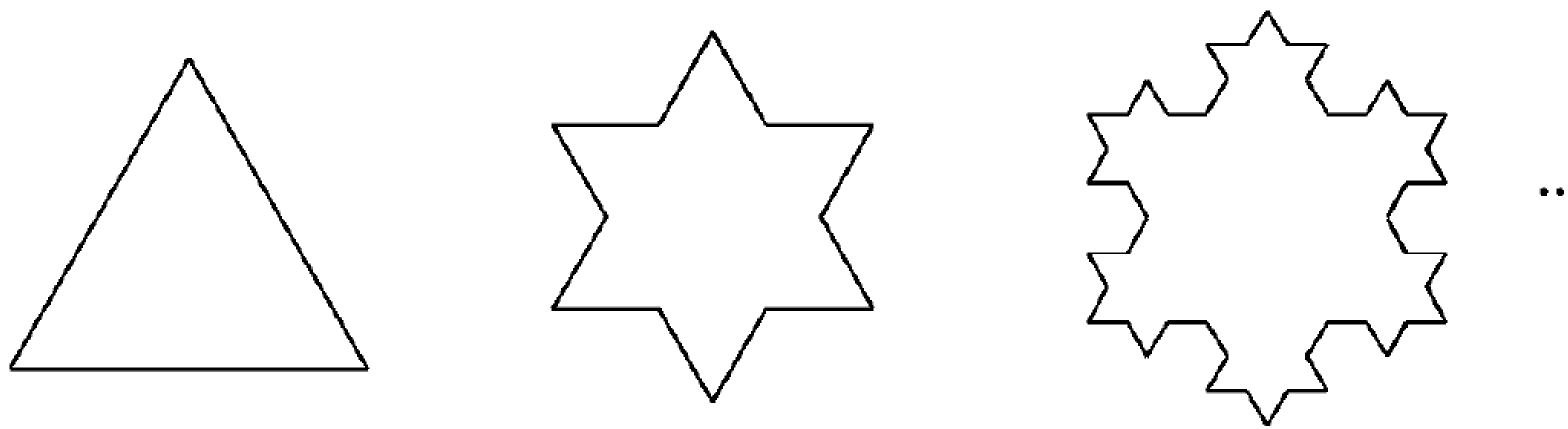


Piecu krāsu teorēma:

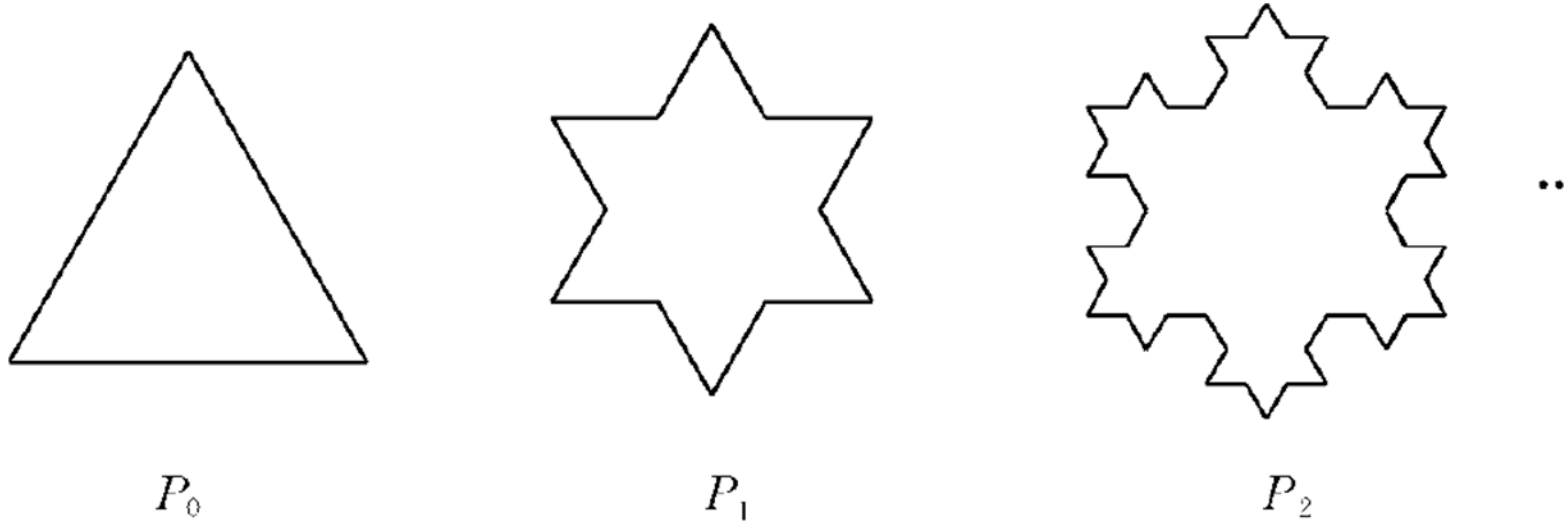
Jebkuru valstu karti var pareizi izkrāsot ar piecām krāsām.

UZDEVUMS. Ir dota daudzstūru P_0, P_1, P_2, ... virkne. Ir zināms, ka P_0 ir regulārs trijstūris ar laukumu 1. Daudzstūri P_{k+1} iegūst no daudzstūra P_k pēc sekojoša algoritma: katru P_k malu sadala trīs vienādās daļās, un uz katras malas vidējās daļas konstruē regulāru trijstūri, un šo vidējo daļu nodzēš.

1) Noteikt daudzstūra P_n laukuma aprēķināšanas formulu S_n.
2) Atrast $\lim_{n\to\infty} S_n$.



P_0 P_1 P_2



Zīmējumā redzams, ka katra P_0 mala kļūst par četrām P_1 malām un daudzstūrim P_1 ir $3 \cdot 4$ malas. Daudzstūrim P_2 ir $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ malas. Seko, ka daudzstūrim P_n ir $3 \cdot 4^n$ malas.

Ir zināms, ka $S_0 = 1$.

Ja salīdzina daudzstūrus P_0 un P_1, ir redzams, ka P_1 rodas no daudzstūra P_0, kuram katrai malai pievienoti regulāri trijstūri ar laukumu $\frac{1}{3^2}$. Seko $S_1 = S_0 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{3}$.

P_2 rodas no daudzstūra P_1, kuram katrai malai pievienoti regulāri trijstūri ar laukumu $\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^2}$. Seko $S_2 = S_1 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}$.

Līdzīgi $S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5}$

$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{4^{k-1}}{3^{2k-1}} = 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k$

$S_n = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{4}{9} \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{3}{5} \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Pierādīsim ar Matemātiskās indukcijas metodi.

1. **Bāze**. Ja n = 1, tad $S_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1 = 1 + \frac{1}{3}$
2. **Pieņēmums**. Ja n = k, tad pieņemsim, ka spēkā ir

$S_k = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k$

3. **Pāreja**. Ja n = k + 1, tad jāpierāda, ka

$S_{k+1} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}$

Figūra P_{k+1} rodas no figūras P_k, kur figūras P_k laukumam jāpievieno regulāri trijstūri katrai malai. Malu skaits ir $3 \cdot 4^k$ un trijstūru laukums ir $\frac{1}{3^{2(k+1)}}$.

Seko $S_{k+1} = S_k + 3 \cdot 4^k \cdot \frac{1}{3^{2(k+1)}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k + 3 \cdot 4^k \cdot \frac{1}{3^{2(k+1)}} =$

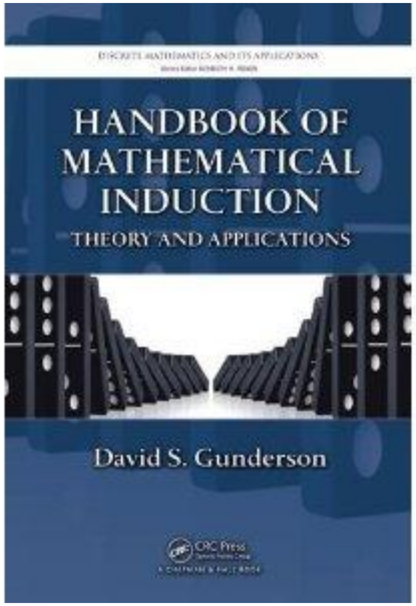
$= \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}$

4. Secinājums. $S_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{8}{5}.$

Izmantotā un ieteicamā literatūra

A. Andžāns, P. Zariņš. Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi. Rīga, Zvaigzne, 1983.



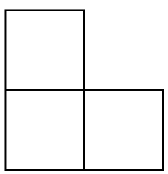
http://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/induction.pdf
http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/algebra/ae_A2.pdf
http://www.stanford.edu/class/cs103a/handouts/42%20Mathematical%20Induction.pdf
http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/Induction.pdf
http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/Induction.pdf
http://sydney.edu.au/stuserv/documents/maths_learning_centre/induction.pdf
https://www.thiel.edu/mathproject/atps/PDF/Chapt05.PDF
http://www.math.northwestern.edu/~mlerma/problem_solving/putnam/training-induc.pdf

UZDEVUMI:

1. Pierādīt, ka n-stūra iekšējo leņķu summa ir $180(n-2)^0$, ja $n \geq 3$.

2. Dots nogrieznis ar garumu 1, lineāls un kompass. Uzkonstruēt nogriezni ar garumu $\sqrt{n}$, ja $n \geq 2$.

3. Pierādīt, ka jebkuru kvadrātu 2 x 2, 4 x 4, 8 x 8, ..., 2^n x 2^n, no kura izgriezts stūrītis ar izmēru 1 x 1, var sagriezt 3 rūtiņu stūrīšos, kā parādīts attēlā.



Paldies par uzmanību!

Aija Cunska
aijac@lu.lv