Integrālis un atvasinājums - - tie tik ir rīki

cibulis@lanet.lv

Rīga, 12.01.2013.

Komentāri par tēmu un tās apgūšanas iespējām

Tēmu esot izvēlējušies paši (kāda daļa?) **skolēni...**

Tēma visai nepiemērota skolas sagatavotības līmenim.

Vēsturiska informācija: pamatjēdzieni, idejas un to attīstītāji.

Krāsotāja paradokss.

Viena lekcija ir piliens iepriekš nepazīstamas matemātikas jūrā.

Cik ilgs laiks vajadzīgs robežas, atvasinājuma, integrāļa apgūšanai?

Kas ir robeža, figūras laukums, līknes garums, ...? (Vairāki simti gadu)

Par atvēlēto laiku LU Fizikas un matemātikas fakultātē u.c.

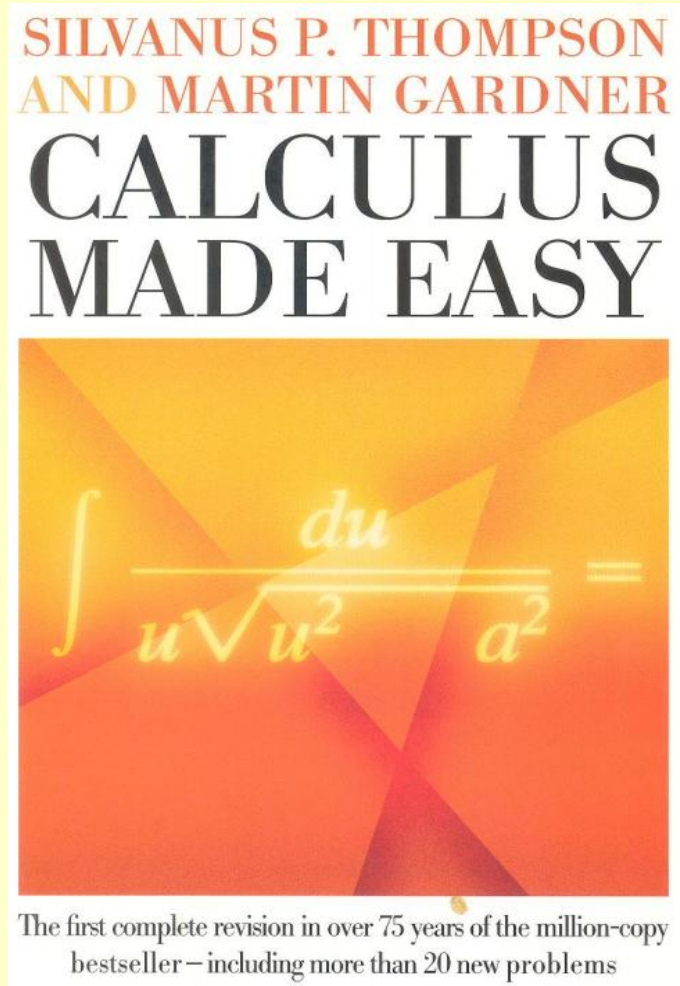
Dzirdēt un redzēt nenozīmē saprast.

Literatūra

1851-1916

Fizika, prof.,
gleznošana,
dzejošana

1. izd. 1910,
1914, 1946,
1998



1914 - 2010

Scientific American
Matemātisko spēļu
slejas vadītājs
> 25 g.
~ 60 gr. autors

Literatūra

Angļu val.

Thomas, Calculus **Stewart, Calculus**

Ļoti labs vizuālais materiāls, PDF, 1564 lpp.

J. Stillwell, ***Mathematics and its history***, Springer, 2002, 544 p.

Krievu val.

Маркушевич А. И., ***Площади и логарифмы***, Москва, ГИТТЛ, 1952, 52 с.

Виленкин Н. Я., Мордкович, А.Г, ***Производная и интеграл***, Москва, Просвещение, 1976, 96 с.

Žurnāli: *Математика в школе* *Квант*.

Latviešu val.

ž. Zvaigžņotā Debess: **1996**, **Skaitlis *e*.** (Robeža)

2011, Integrālis

Vai skolēns spēj saprast robežas, integrāļus un pat robežas no integrāļiem?

Kādreiz…

9. –10. klašu skolēniem *Площади и логарифмы*, 1952, 52 с.

Ģeometriskā progresija un robežas jēdziens esot pazīstami jau 9. klases 2. ceturksnī.

Daži tomēr spēj...

A German 16-year-old, Shouryya Ray, solved two fundamental particle dynamic theories posed by Sir Isaac Newton over 350 years ago,…
has solved a mathematical problem which has stumped mathematicians for centuries
– **tā raksta un pārspīlē žurnālisti.**

Prof. Ralph Chill, and Jürgen Voigt (TU Dresden) have released a statement about the affair (Ekspertiem tas zināms, par izdomājumu, ka *Newton over* 350…): Augstvērtīgs komentārs uz 4 lpp.

Skolēns apguvis iespaidīgu daudzumu literatūras un DFV risināšanas metodes.
Brīvi operē ar diferenciālrēķinu tehniku:
(atvasinājumi, integrāļi, diferenciālvienādojumi)!

Daži uzdevumi no Rumānijas

12th GRADE

PROBLEM 1. Compute the following integrals:

a) $$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\right)\mathrm{d}x$$

b) $$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}.$$

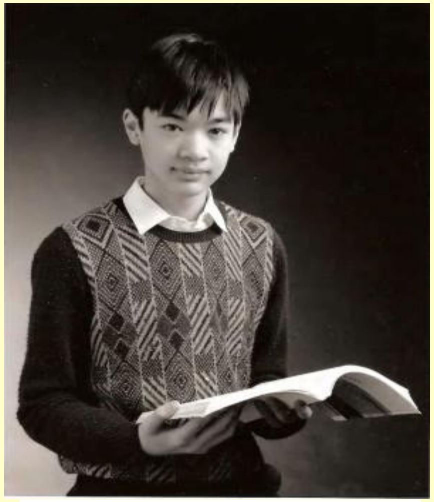
$$\lim_{n\to\infty} n\int_{1}^{a}\frac{dx}{1+x^n},\ a>1.$$

A. Cibulis, R. Ozols, *Par kādu Rumānijas skolēniem domātu integrāli*, Zvaigžņotā Debess, Pavasaris, 2012, 49.-52. lpp

Piezīme. Man nav zināms, cik rumāņu skolēnu spēja atrast šādu robežu.
Skolēni dažkārt pamanās atrisināt kādu olimpiādes uzdevumu,
maz ko saprotot no lietotajiem jēdzieniem.
Viņi vienkārši ir apmācīti lietot attiecīgo tehniku.

Daži spēj

A. Klero (1713 – 1765) jau desmit gadu vecumā esot lasījis Lopitāla grāmatu par diferenciālrēķiniem…



Terence Tao, 16

http://www.math.ucla.edu/~tao/
(homepage)

11 gados piedalījās IMO un 15 gados sarakstīja grāmatu **Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective**, New York, Oxford University Press, 2006, 103 p.

Matijasēvičs, Perelmans.

Kādreiz LMO ...

Dots, ka $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija un $\int_0^1 f(x)dx = 0, \ \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0.$

Pierādīt, ka intervālā [0; 1] eksistē vismaz divi dažādi skaitļi *a* un *b*, kuriem

$f(a) = 0$ un $f(b) = 0$ (11. klase, 8. LAMO)

Aprēķināt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}$ (9. klase, 8. LAMO)

Nepaskaidrots apzīmējums

$\lfloor x \rfloor$ – veselā daļa no apakšas.

$$\lfloor 2{,}97 \rfloor = 2 \qquad \lfloor -2{,}97 \rfloor = -3$$

Dots, ka (x_n) ir augoša virkne. Zināms, ka $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$

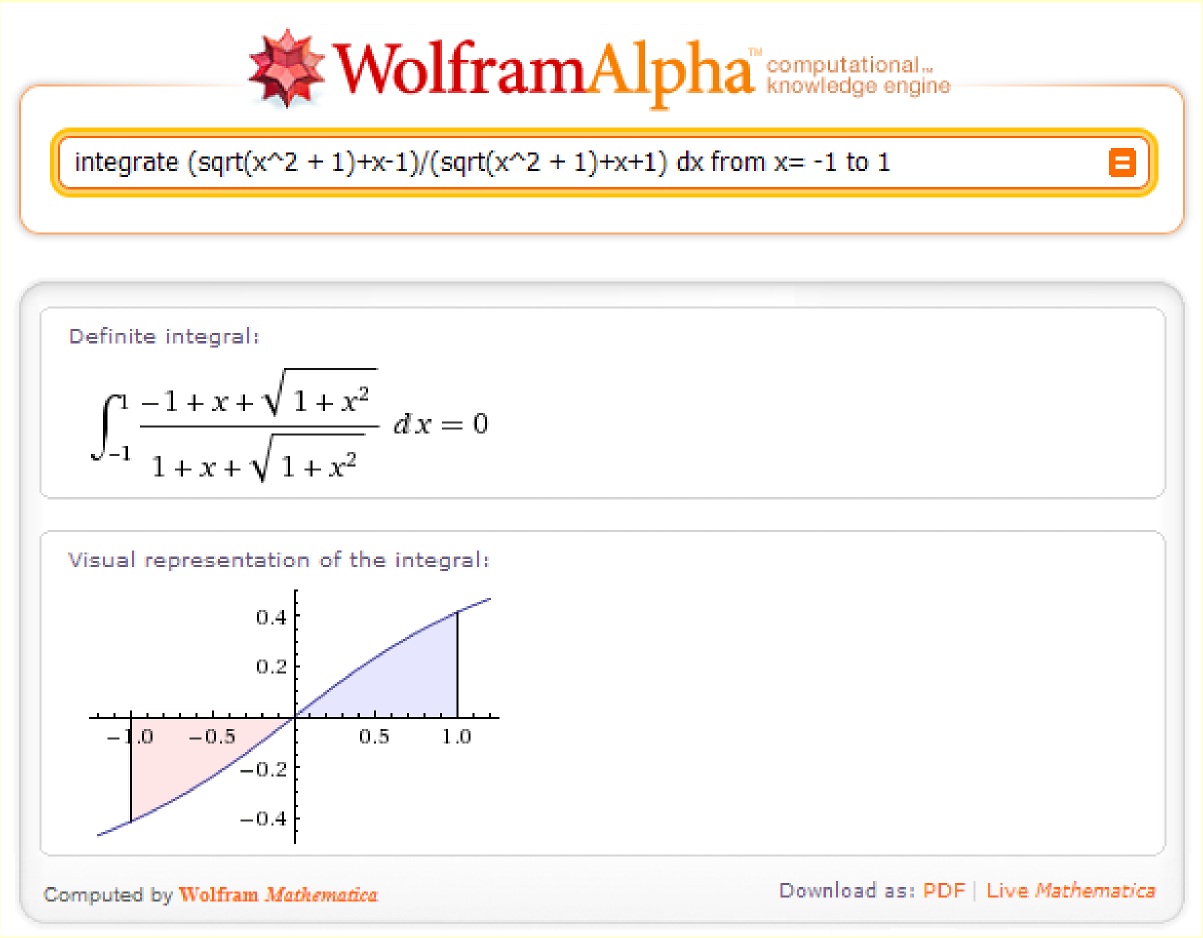
Vai noteikti eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$? (9. klase, 9. LAMO)

Tagad LU 1. kurss

Tagad

Latvijas MO uzdevumu par atvasinājumiem un integrāļiem nav

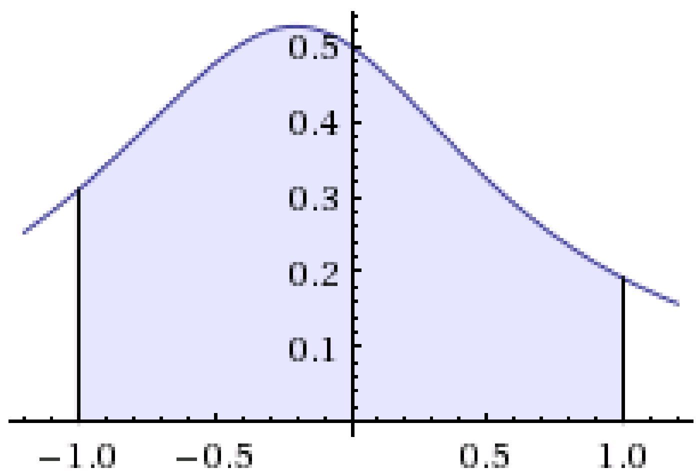
Vai skolā jāmāca robežas, atvasinājums, integrālis, …, matemātiskās analīzes elementi?



Tagad

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + x + x^2 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}}\, dx \approx 0.785398163397\ldots$$

Visual representation of the integral:



Arī modernais rēķināšanas rīks (dators) var nedot analītisku izteiksmi

Eksperimentālā matemātika

Integrāļu daudzveidība: Rīmaņa, Lebega, Stiltjesa, u.c.

Tagad…

Tagad skolās matemātikas sirds – pierādījumi – izskausti (?) kā šķira.

Uzdevumu risināšanai ir īpaša nozīme.

Neatrisinātas problēmas (*labi* uzdevumi) nereti ir pirmsākums jaunām metodēm, jaunām teorijām un jauniem uzdevumiem.

Skolas kursā informācijas nav (?) **MO**

The math we have now was invented to solve a particular problem. Some problems come from science, economics, or real life, while others are purely mathematical.
The only way to get good at math is through problem solving.
/Halmos/

Redzēt un dzirdēt nenozīmē saprast

MMU 3. nodarbība: ***Kā dalīt ar nulli un bezgalību*** (ieskats vienkāršākajās robežās).

Pastāv uzskats, ka **robežas jēdziens ir viens no cilvēces domas lielākajiem sasniegumiem**. Robežas jēdziens intuitīvā izpratnē bija pazīstams jau senajiem grieķiem. Šai sakarā minams sengrieķu filozofs **Zēnons** (apt. 490 - 430 p. m. ē.).

Kas ir atvasinājums?

Kas ir integrālis?

Īsa atbilde. Matemātikā atvasinājums ir robeža.

Integrālis (noteiktais) ir robeža.

LU FMF līdz atvasinājumam nonāk 1. semestra beigās (apt. 4 mēneši)

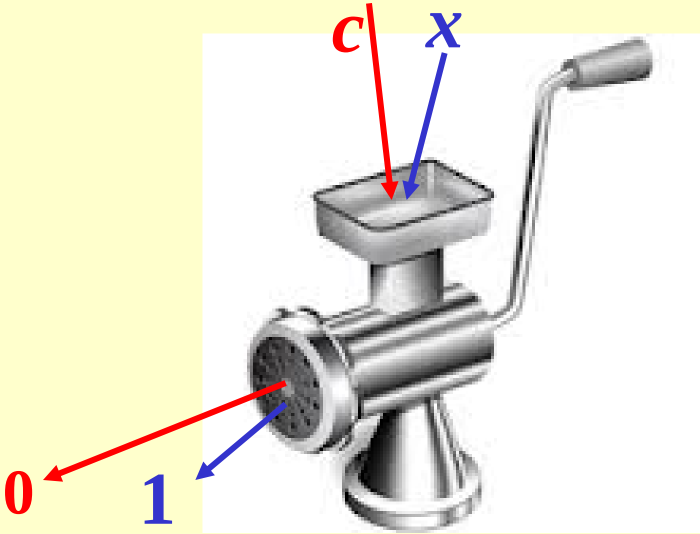
Vai mācīties, …, veikt dažādas darbības var bez saprašanas?

Analoģija: bez saprašanas, kas notiek motorā, mēs varam vadīt mašīnu, bez saprašanas mēs varam lietot un lietojam datorus.
Tas, ka mēs nesaprotam, kas notiek kuņģī, netraucē mūs ēst, utt.

Atvasināšanas *automāts*

$$f \mapsto f'$$

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f).$$



$$\sin x \mapsto \cos x$$

$$\cos x \mapsto -\sin x$$

$$x^p \mapsto px^{p-1}$$

$$e^x \mapsto e^x$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(cu)' = cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f = \frac{u}{v}, \quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Integrēšanas *automāts*

$$f \mapsto \int f(x)dx$$

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx \in R$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\cos x \mapsto \sin x$$

$$\sin x \mapsto -\cos x$$

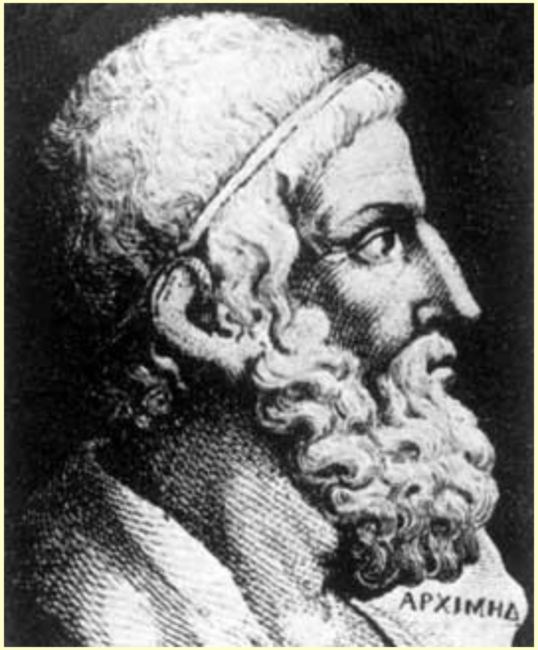
$$x^p \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$\boxed{f \mapsto F:\ F' = f}$$

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Redzam, bet vai saprotam?

∫ pamatlicēji



(287-212 p.m.ē.) **1642-1727** **1646-1716**

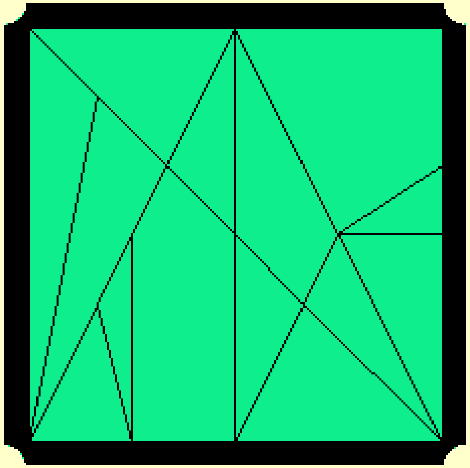
Arhimēds **Ņūtons** **Leibnics**

Arhimēds 1. MR autors

http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html

Arhimēda sacerējums

Palimpsest



1839

1907 Konstantinopoles bibl.

1998 Manuskriptu atrod atkal.
Tas pārdots izsolē par
2 milj. dolāru.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \quad 3\frac{10}{71} = 3{,}1408\ldots, \quad 3\frac{1}{7} = 3{,}142\ldots$$

Daudzus gadsimtus Arhimēda precizitāte netika pārspēta.

Tad vēl nebija decimāldaļskaitļu!

Bija vajadzīgi *smalkāki* līdzekļi

Madhava of Sangramagrama (1350-1425)
spēj atrast 11 zīmes: 3.14159265359.

Arktangensa rinda

1580. g. 20 ciparus aiz komata spēja aprēķināt Adriēns van Rūmens.
Tam viņš patērēja **vairākus gadus**.

Dažas svarīgas robežas

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Ja kāds domā, ka ..., tad lai pamēģina aprēķināt šādas robežas

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^n n$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\arcsin x}$$

V. Arnolds

Atvasinājums

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Funkcijas pieauguma pret argumenta pieaugumu attiecības robeža, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli.

Pieaugums kā vārds var maldināt, jo ar to parasti saprot kaut ko pozitīvu, bet matemātikā tas var būt arī negatīvs. Varēja šo vārdu aizstāt ar – *izmaiņas*.

Varbūt noder…

d **– diferencēšanas simbols, („a little bit of”) lieluma *x* maza daļa.**

$\int dx$ *nozīmē* visu mazo lieluma *x* daļu *dx* summu.

Integrāļa zīmi 17. gs. beigās ieviesis vācu matemātiķis Leibnics

Leibnica apzīmējumi

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Diferencēšanas operatora apzīmējums

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

Terminu **atvasinājums** esot ieteicis 18. gs. beigās Arbogasts (1759 – 1803).

Agrāk *differential coefficient*, tagad *derivative*,

Agrāk *indefinite integral*,
tagad *antiderivative* (первообразная)

Kā latviski?

~~Primitīvā~~ funkcija

Pirmfunkcija

Atvasinājuma izmantošana

Funkciju pētīšanā:

ekstrēmi, monotonitāte, izliektība

Rindu teorijā

Aproksimācijā, tuvinātos rēķinos

Vienādību un nevienādību pierādīšanā

Citos priekšmetos var sastapt pat citus nosaukumus.
Ekonomikā: *marginālās izmaksas.*

Atvasinājuma izmantošanas piemērs

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

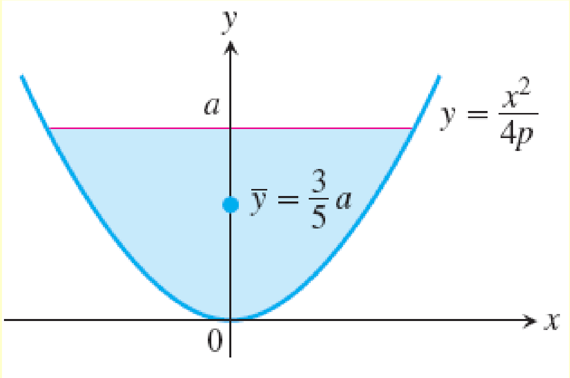
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4.$$

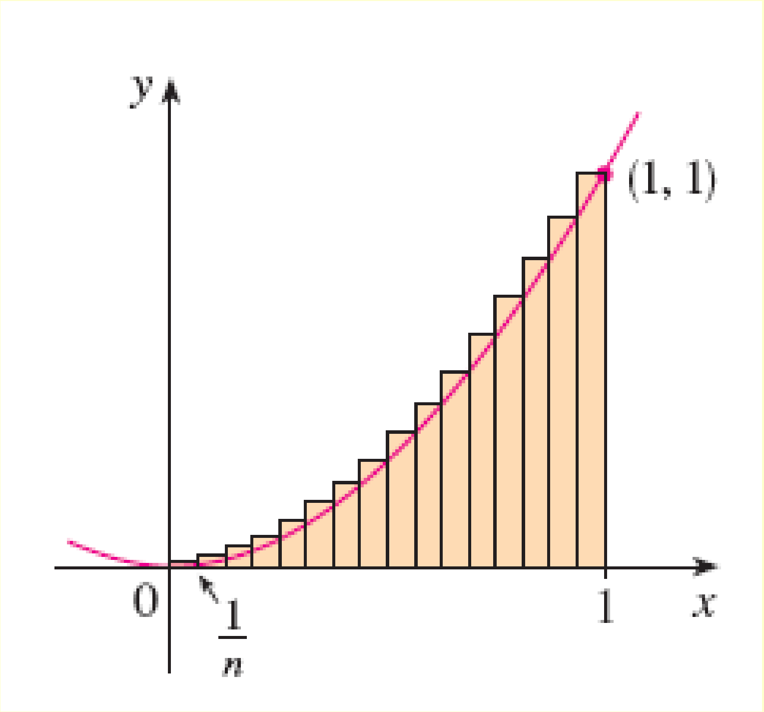
Kā iegūts?

Parabolas segmenta laukums

To pirmais pratis aprēķināt Arhimēds, turklāt vismaz trijos veidos.

Izsmelšanas metode
Eudokss
~ (406-355)
Dēmokrīts
~ (460-380)
Arhimēds
(287-212)

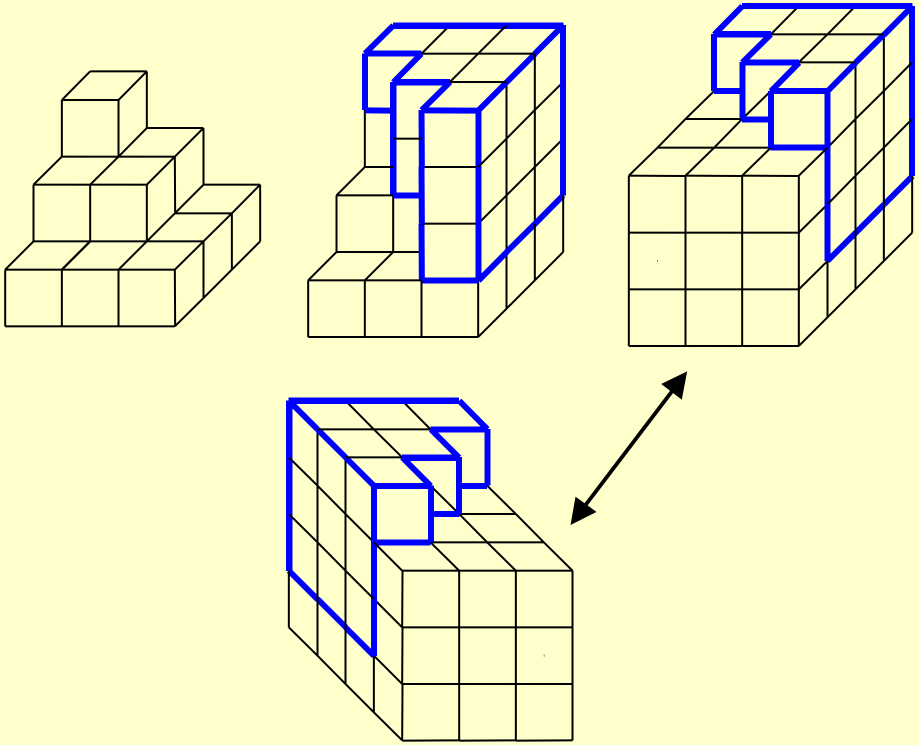




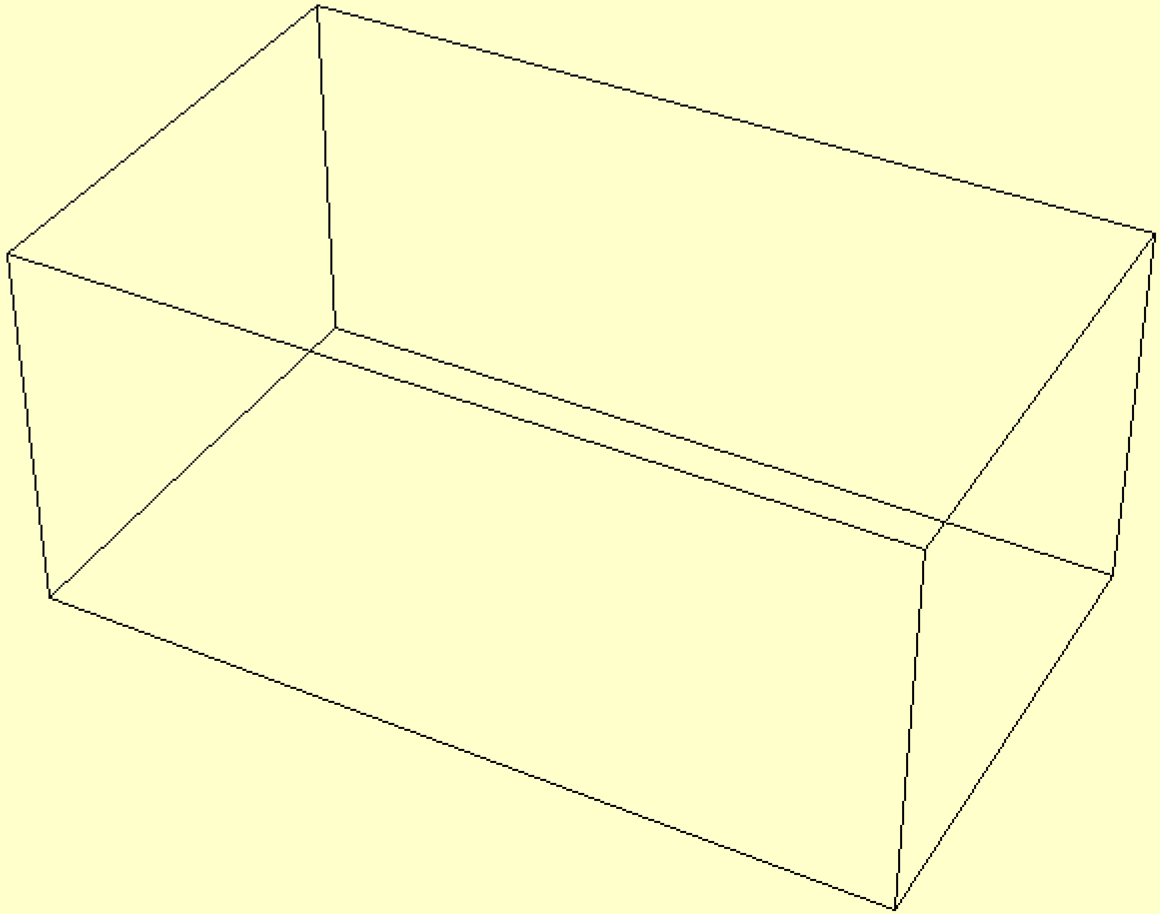
$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{4}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

Skaties!

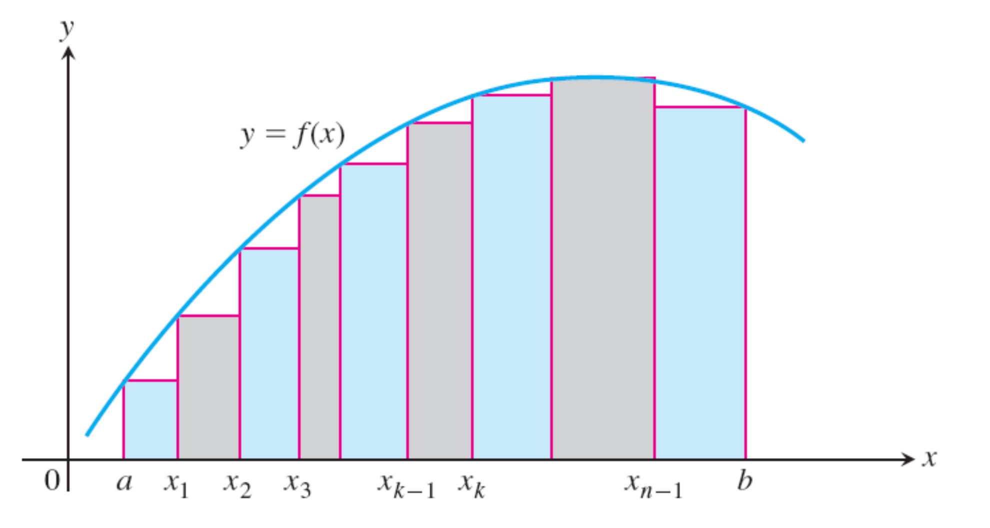
$$6(1^2+2^2+\ldots+n^2)=n(n+1)(2n+1)$$

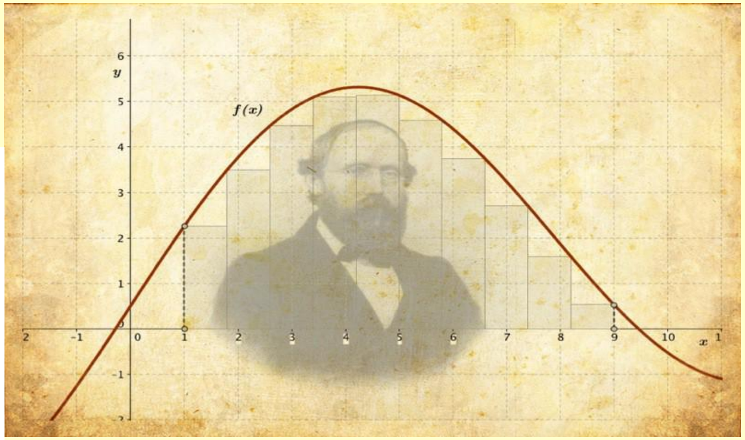


$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Integrālis un laukums





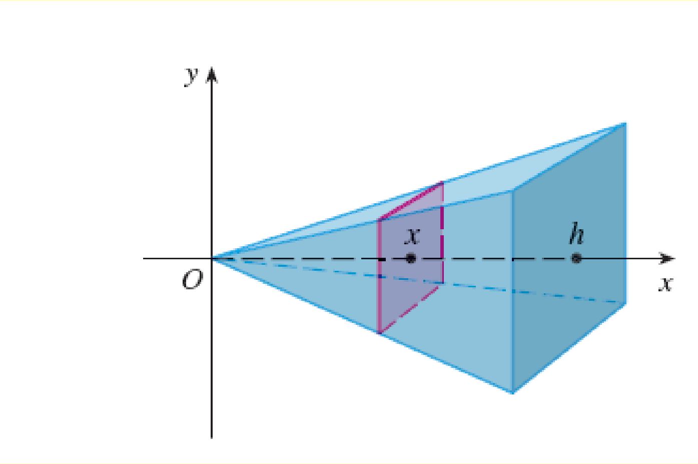
Bernhard Riemann (1826-1866)
Pirmā stingrā noteiktā integrāļa (Rīmaņa integrāļa) definīcija.

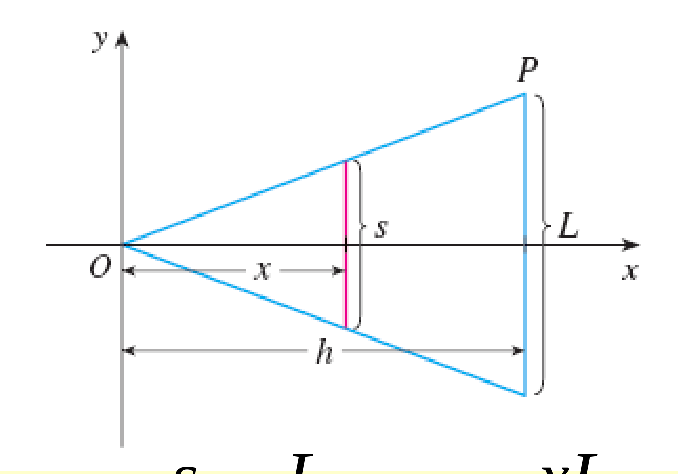
$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}, \quad \max_k \Delta x_k \to 0,$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\Delta x_k .}$$

Integrālis un tilpums

$$\boxed{V(x)=\int_a^b S(x)dx.}$$





$$\frac{s}{x}=\frac{L}{h}\Rightarrow s=\frac{xL}{h}$$

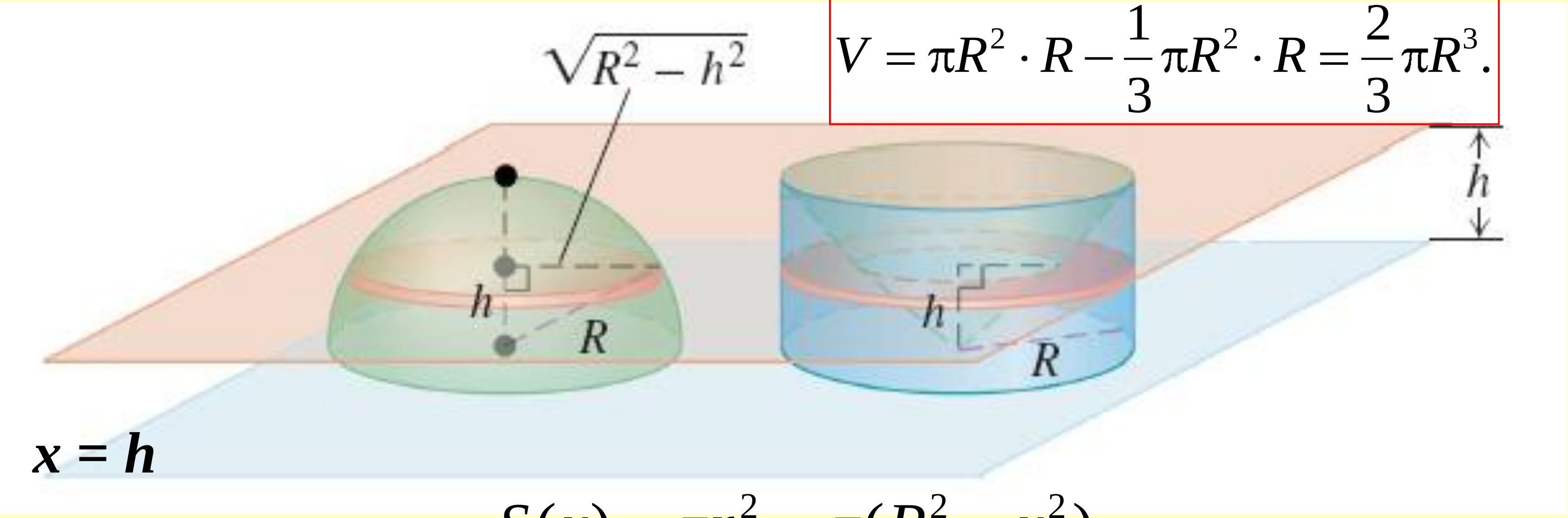
$$\int_0^h \frac{x^2L^2}{h^2}dx=\left[F(x)=\frac{x^3L^2}{3h^2}\right]=F(h)-F(0)=\frac{1}{3}L^2h.$$

Vai mēs tā varētu?

Kavaljēri (1598-1647) princips. Galileja skolēns.

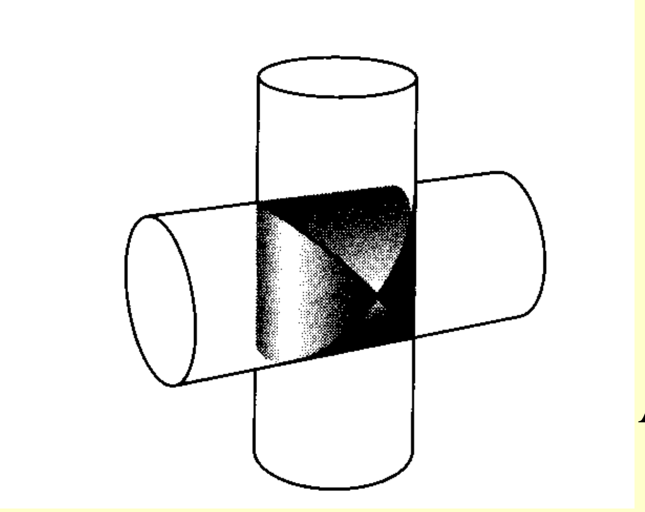
Ķermeņiem ar vienādiem šķēlumu laukumiem ir vienādi tilpumi.
Izmantojot šo principu, var eleganti iegūt lodes tilpuma formulu.

$$V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$



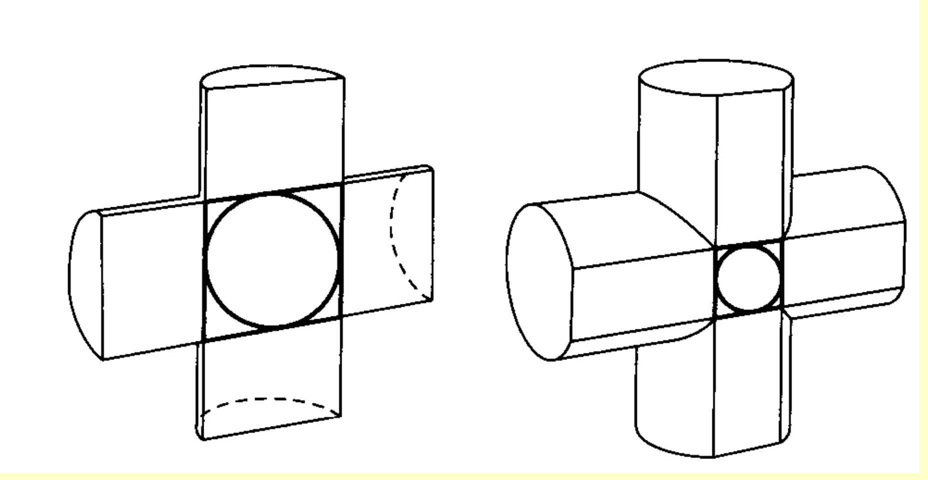
$$S(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

Vai mēs tā varētu?



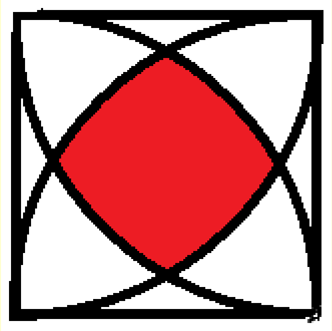
Aprēķināt divu cilindru kopējās daļas tilpumu.

Ļoti asprātīgs Arhimēda risinājums



$$\frac{4\pi r^3/3}{V} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow V = \frac{16r^3}{3}$$

Laukums



Aprēķināt sarkanās daļas laukumu,
ja kvadrāta malas garums ir 1.

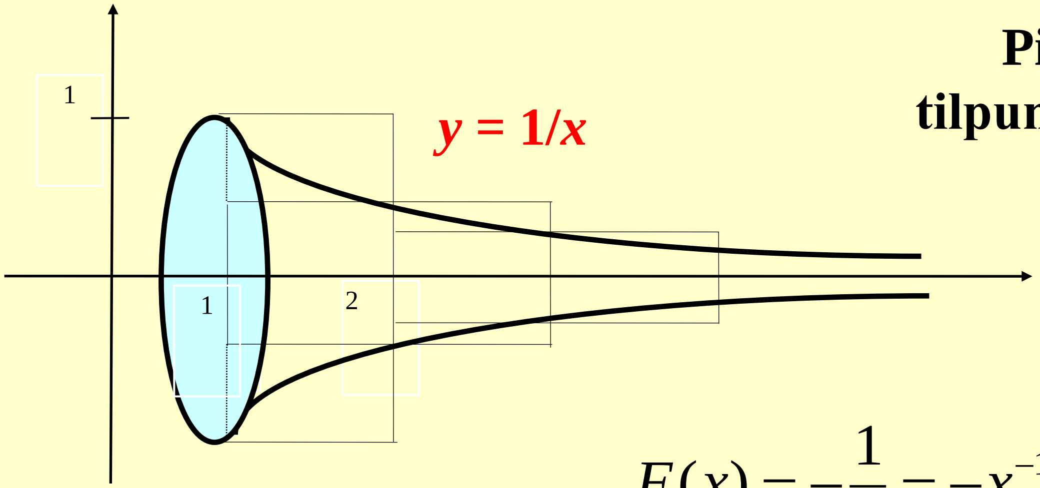
Izteikt laukumu ar integrāļa palīdzību.

$$L = \int_{0}^{0,5\sqrt{3}} (4\sqrt{1-x^2} - 2)dx.$$

Integrēšanas automāts $\sqrt{1-x^2}$ **pārveidotu par**

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$$

Krāsotāja paradokss



Piltuves tilpums ir galīgs

$$F(x) = -\frac{1}{x} = -x^{-1}, \;\; F' = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\boxed{V(x) = \int_a^b S(x)dx.} \quad \boxed{\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).}$$

$$V = \int_1^\infty \pi f^2(x)dx = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}dx = F(\infty) - F(1) = \pi.$$

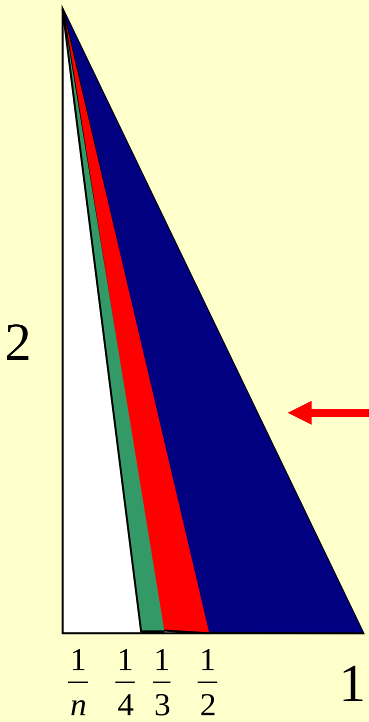
Krāsotāja paradokss

Pamatojums bez integrāļa

Piltuves tilpums ir mazāks nekā attiecīgo cilindru tilpumu summu.

$$V < \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h + \ldots = \pi\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right) < 2\pi.$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

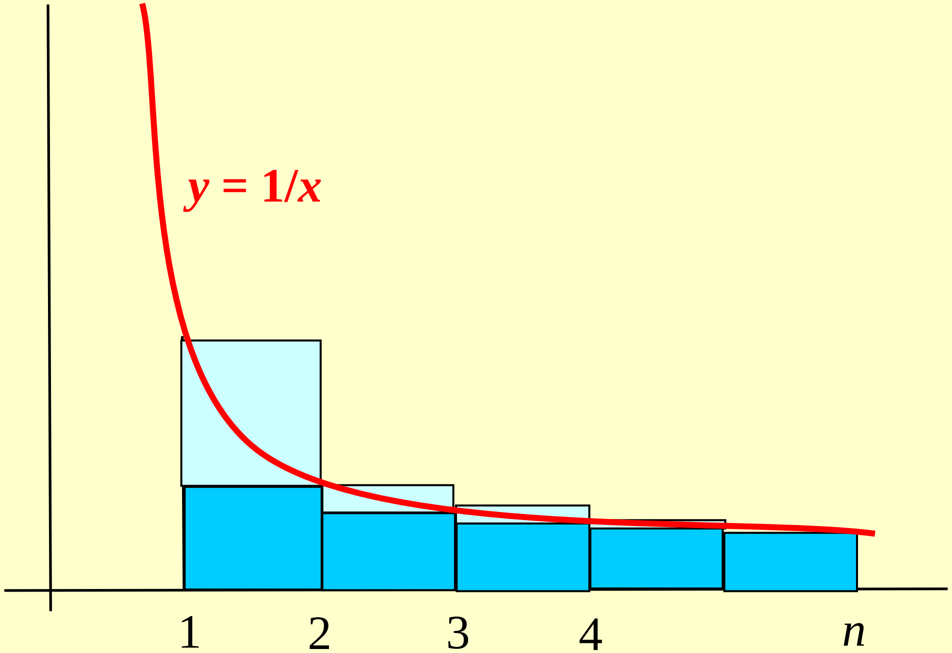


Skaties!

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Krāsotāja paradokss

Plāksnītes laukums ir bezgalīgi liels



$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$L > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.$$

$$L = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Kur kļūda?

Kā tas var būt, ka ar galīgu krāsas daudzumu var nokrāsot bezgalīgi lielu laukumu?

Piedāvāt izskaidrojumu, kur, jūsuprāt, ir kļūda.

Gaišas domas Jaunajā gadā!