MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

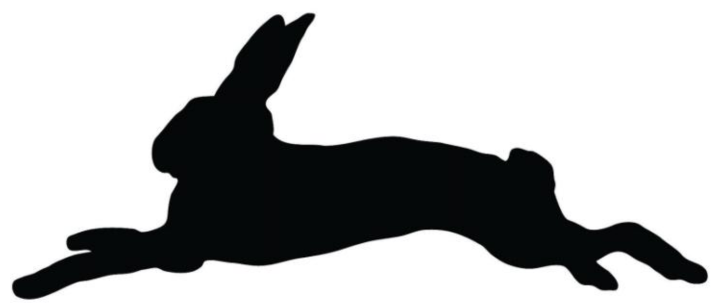
NMS
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Fazer

KLASE

FIZMATI.LV

Noķert zaķi jeb Dirihlē principa pielietojumi



LJA lektore

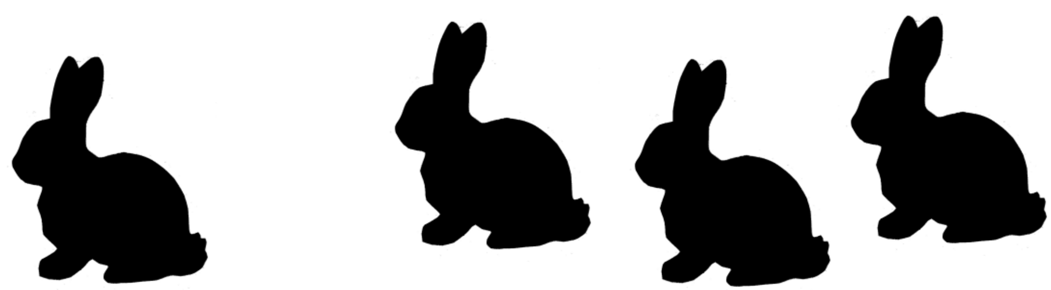
Ingrīda Veilande

Mazā matemātikas universitāte
4. nodarbība, 2013. gada 12. janvāris

Dirihlē būrīšu princips

- Ja $n+1$ zaķi ir jāizvieto n būrīšos, tad vismaz vienā būrītī atgadīsies vismaz divi zaķi.

- Ja $nm+1$ zaķis ir jāizvieto m būrīšos, tad vismaz vienā būrītī būs vismaz $n+1$ zaķis.

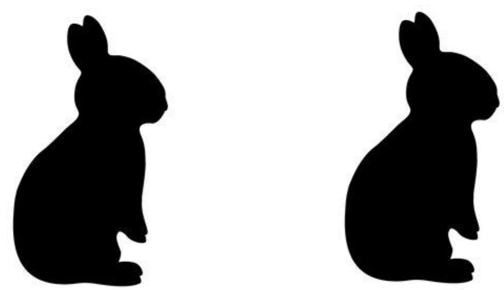


Uzdevuma atrisināšanas plāns

- Izpētīt uzdevuma nosacījumus
- Formulēt pieņēmumu, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem
- Analizēt doto elementu īpašības
- Salīdzināt un novērtēt elementu kopīgās un atšķirīgās īpašības
- Klasificēt un grupēt elementus
- Noteikt “zaķus” un “būrus”
- Veikt kvantitatīvus novērtējumus, lai izdarītu secinājumus saskaņā ar Dirihlē principu
- Iegūt pretrunu sākotnējam pieņēmumam

Uzdevums

Pierādiet, ka, ja no naturāliem skaitļiem $1, 2, 3, ..., 2n$ izvēlas kaut kādus dažādus $n+1$ skaitļus, tad starp izvēlētajiem skaitļiem būs vismaz 2 savstarpēji pirmskaitļi.



Pierādiet, ka, ja no naturāliem skaitļiem 1, 2, 3, ..., $2n$ izvēlas kaut kādus $n+1$ skaitļus, tad starp izvēlētajiem skaitļiem būs vismaz 2 savstarpēji pirmskaitļi.

Atrisinājums

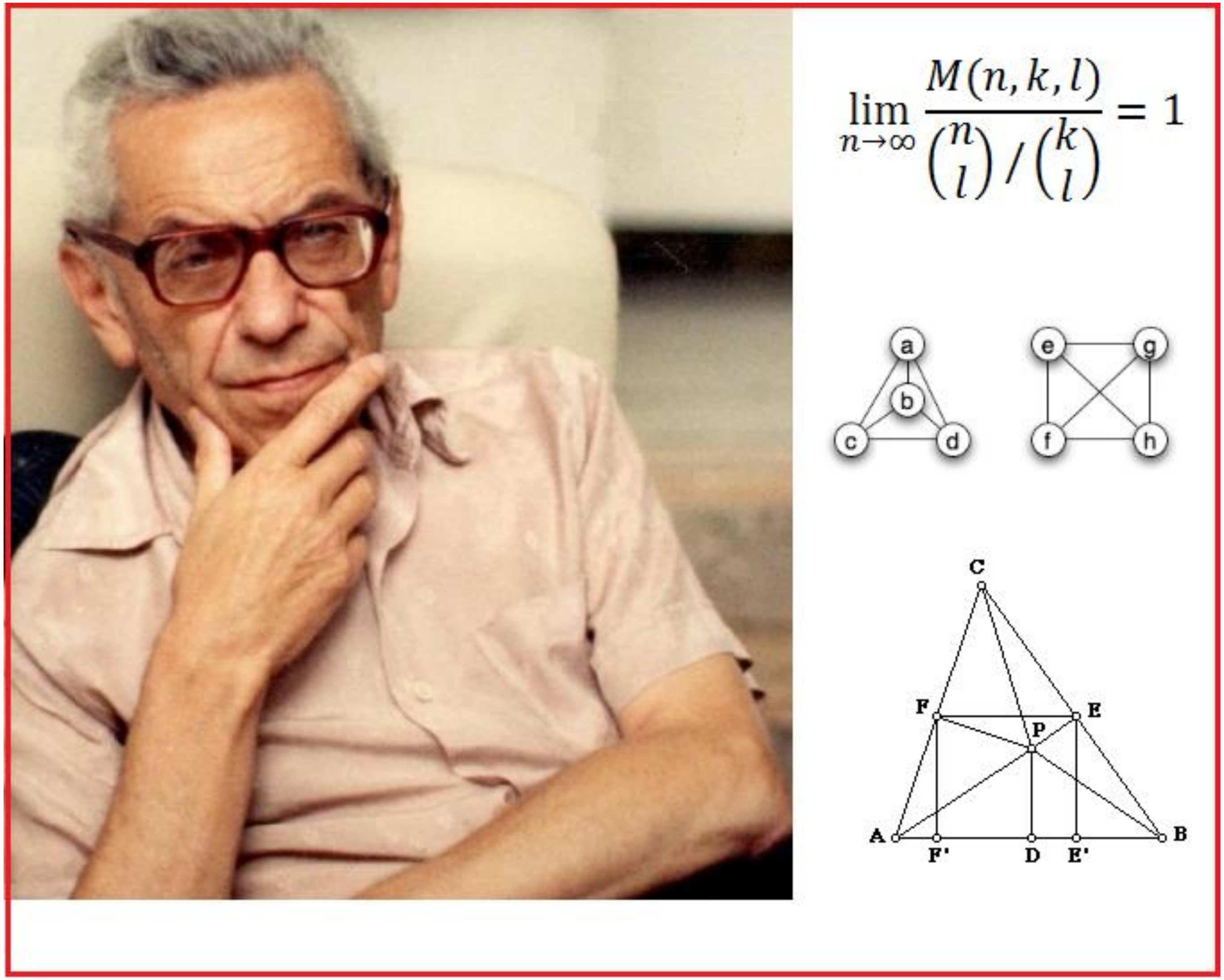
Sadalīsim visus $2n$ skaitļus pāros

(1; 2), (3; 4), (5; 6), ... $(2n-1; 2n)$

Saskaņā ar Dirihlē principu vismaz divi skaitļi no izvēlētajiem būs no viena pāra.

Paula Erdoša uzdevums

Pierādiet, ka, ja no naturāliem skaitļiem $1, 2, 3, \ldots., 2n$ izvēlas kaut kādus $n+1$ skaitļus, tad starp izvēlētajiem skaitļiem būs vismaz 2 tādi skaitļi, kur viens no tiem būs otra skaitļa dalītājs.



Pauls Erdošs (1913 – 1996)

Pierādiet, ka, ja no naturāliem skaitļiem 1, 2, 3, ..., $2n$ izvēlas kaut kādus $n+1$ skaitļus, tad starp izvēlētajiem skaitļiem būs vismaz 2 tādi skaitļi, kur viens no tiem būs otra skaitļa dalītājs.

Visus skaitļus izsakām formā $2^k m$

m – nepāra skaitlis

"Būri" – skaitļi m, tie ir 1, 2, 3, ... $2n$-1

"zaķi" – izvēlētie $n+1$ skaitļi

Johans Pēters Gustavs Ležens Dirihlē

(1805 – 1859)

Dirihlē teorēma

Ja α ir iracionāls skaitlis, bet N ir vesels pozitīvs skaitlis, tad var atrast tādu racionālu skaitli $\frac{p}{q}$, ka $1 \le q \le N$

un

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qN}$$

Teorēmas pierādījuma ideja:

Pārveidosim $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qN}$$

$$\left|\alpha q - p\right| \le \frac{1}{N}$$

Pusintervālu [0; 1) sadalīsim N daļās

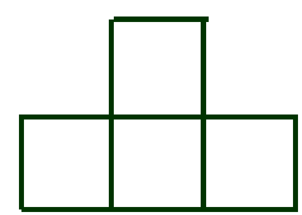
$$\left[0;\frac{1}{N}\right)\cup\left[\frac{1}{N};\frac{2}{N}\right)\cup\ldots\cup\left[\frac{N-1}{N};1\right)$$

Izvietosim te skaitļus

$$0;\{\alpha\};\{2\alpha\};\{3\alpha\};\ldots;\{N\alpha\}$$

Uzdevums

Tabulas izmērs ir 8 x 8 rūtiņas. Vai iespējams tajā izvietot visus veselos skaitļus no 1 līdz 64 tā, lai katrā dotās figūras rūtiņā ierakstīto skaitļu summa dalītos ar 10, neatkarīgi no figūras izvietojuma vai pagrieziena?



Atrisinājums

Aplūkosim dotās
tabulas kvadrātu

	1	
4		2
	3	

Skaitļu summa atzīmētajās rūtiņās

$$a_1 + a_2 + a_4 + c = 10m$$

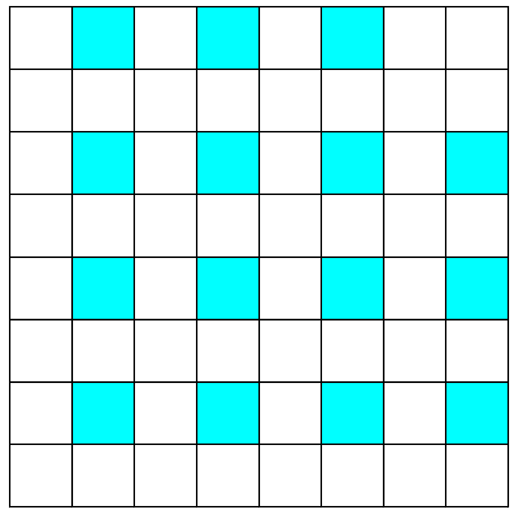
$$a_3 + a_2 + a_4 + c = 10k$$

Secinām

$$a_1 - a_3 = 10(m - k)$$

$$a_2 - a_4 = 10(i - j)$$

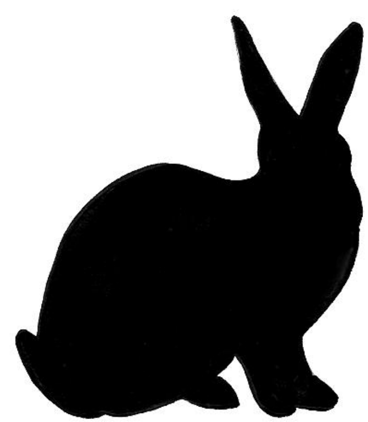
Skaitļus iedala vienā ekvivalences klasē, ja tiem sakrīt pēdējais cipars.



Nepieciešami vismaz 15 skaitļi no vienas ekvivalences klases, bet starp dotajiem skaitļiem var atrast ne vairāk kā 7 skaitļus no vienas klases.

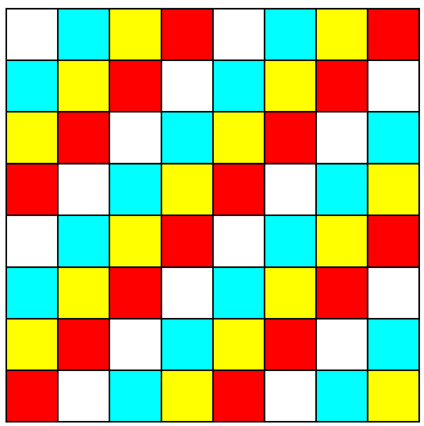
Uzdevums

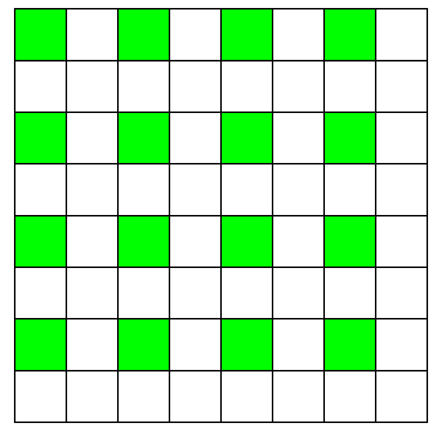
Kvadrāts ar izmēru 100 x 100 ir pilnībā noklāts ar divu veidu rūtiņu figūrām, kuru izmērs ir 2 x 2 rūtiņas un 1 x 4 rūtiņas tā, ka figūras savstarpēji nepārklājas. Vai ir iespējams noņemt vienu kvadrātisko figūru un aizvietot to ar taisnstūra figūru, lai atkal var izveidot lielā kvadrāta visu rūtiņu pārklājumu?



Rūtiņu krāsošana

Kā nokrāsot kvadrāta rūtiņas tā, lai abu veidu figūrām varētu noteikt atšķirības?





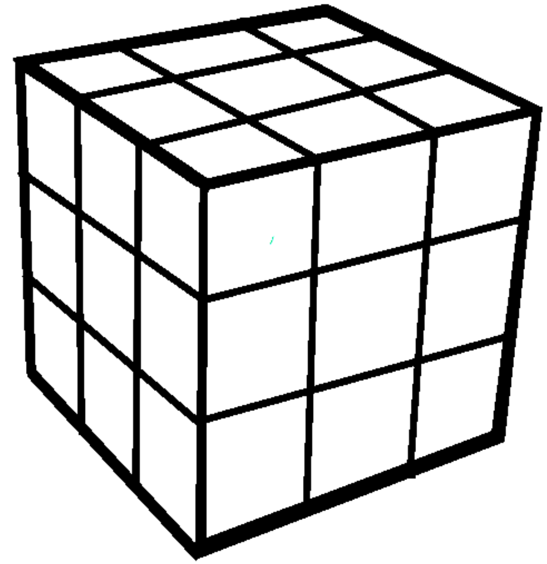
Krāsu paraugi

Kā klasificēt dotās figūras?

Uzdevums

No 27 vienības kubiem ir salikts kubs ar izmēru 3 x 3 x 3. Pelīte var pāriet no viena vienības kuba uz otru, ja kubiem ir kopīga skaldne. Vai pelīte var apstaigāt visu kubu, katrā vienības kubā nonākot tieši vienu reizi, ja katrā solī ir jāmaina kustības virziens?

Klasificēšana:



S - stūra kubi 8

M – šķautņu vidējie kubi 12

V – skaldņu centrālie kubi 6

C – iekšējais kubs

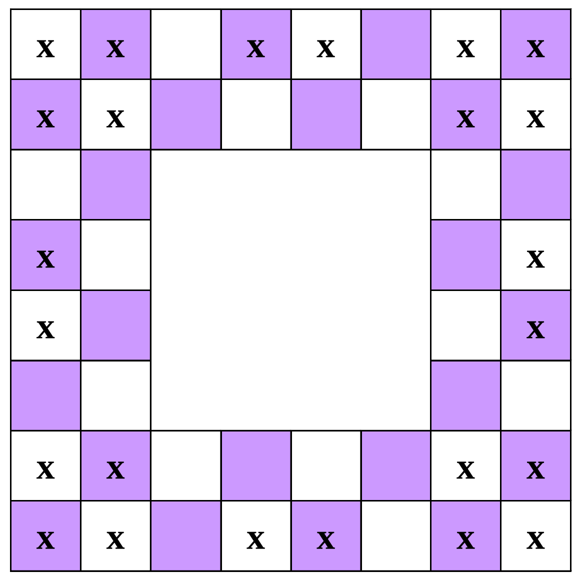
Kāds būs pelītes maršruts?

Uzdevums

Vai šaha zirdziņš var apstaigāt rāmīti, kāds rodas, ja šaha dēlītim izgriež centrālo daļu 4 x 4 lauciņi?

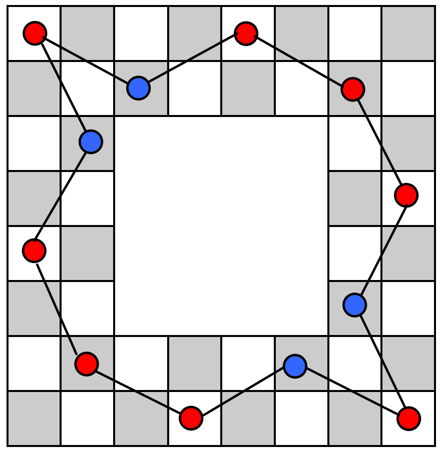
Iespējamie zirdziņa gājieni

Uz rāmīša ir lauciņi, kuros zirdziņš var ieiet un iziet tikai vienā veidā

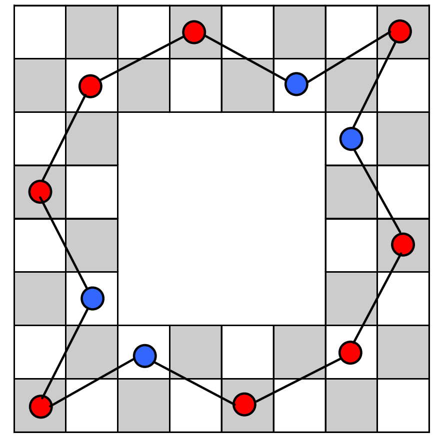


Atsevišķie cikli

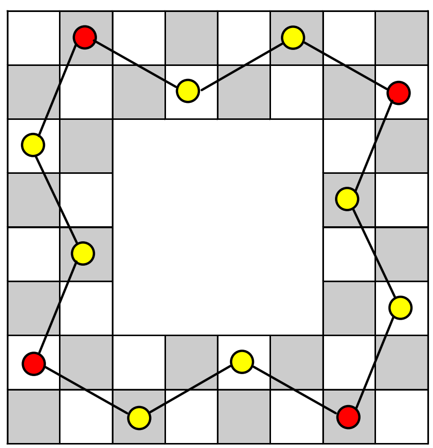
A



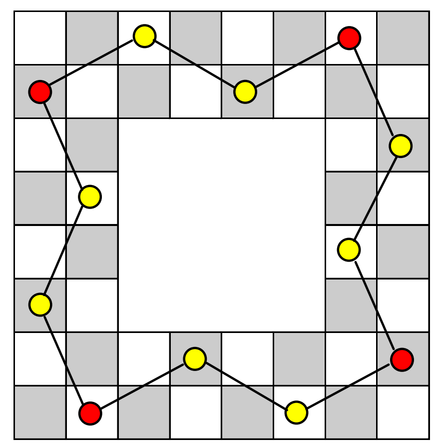
B



D



C



Pateicos par uzmanību!