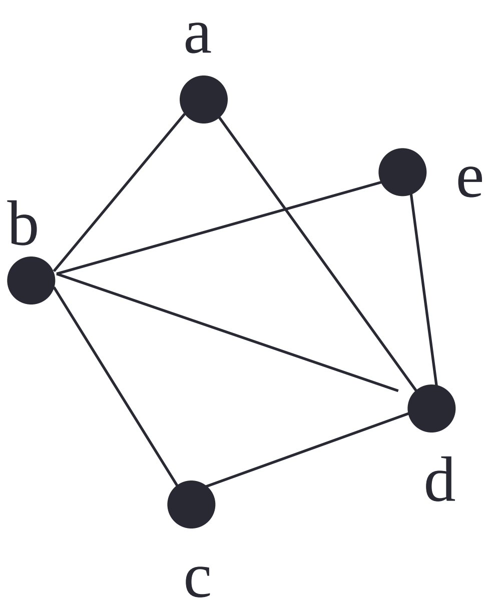
GRAFU TEORIJA UN TĀS PIELIETOJUMI

Andris Ambainis

Latvijas Universitāte

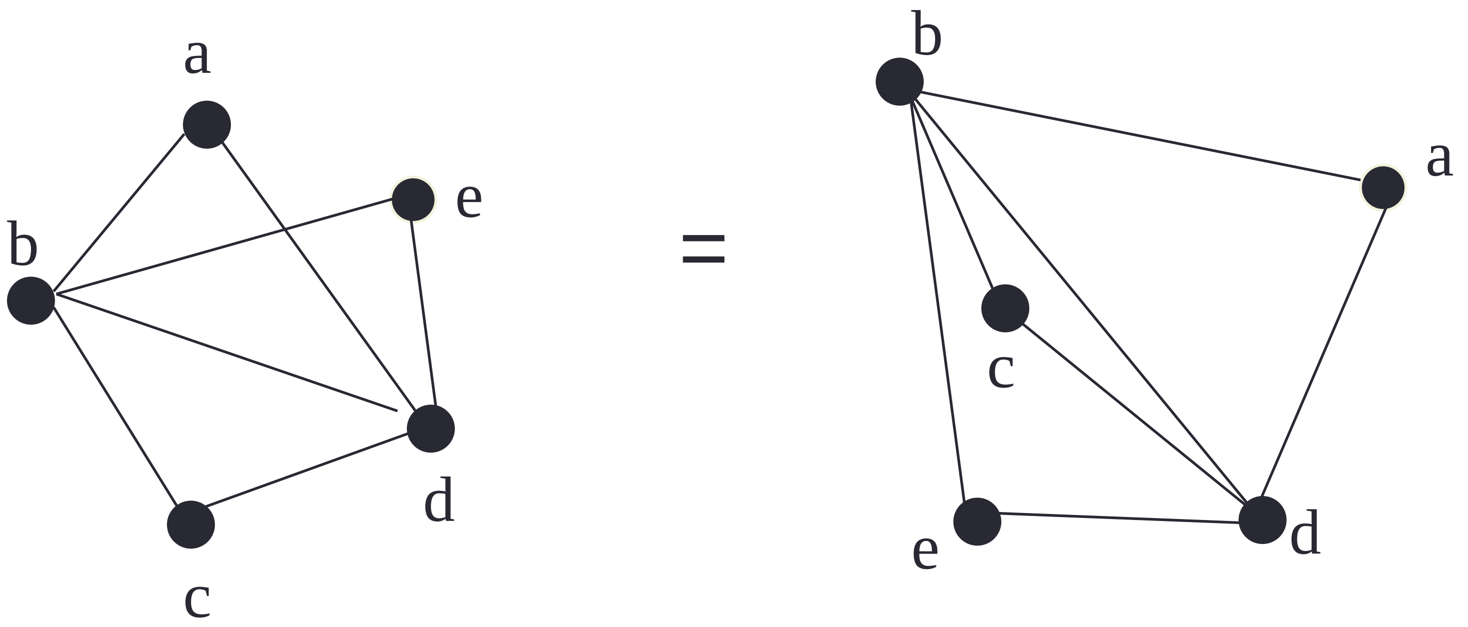
Grafu teorija



- Virsotnes = pilsētas;
- Šķautnes = ceļi.

- Virsotnes = jēdzieni;
- Šķautnes = saiknes.

Grafu izomorfisms

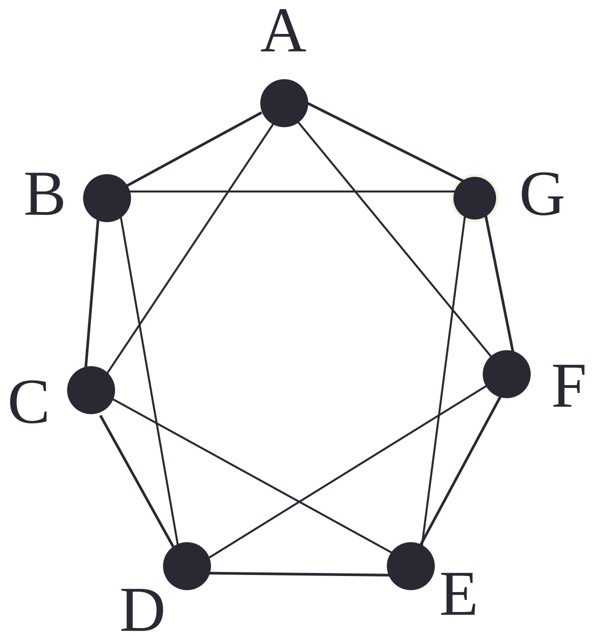


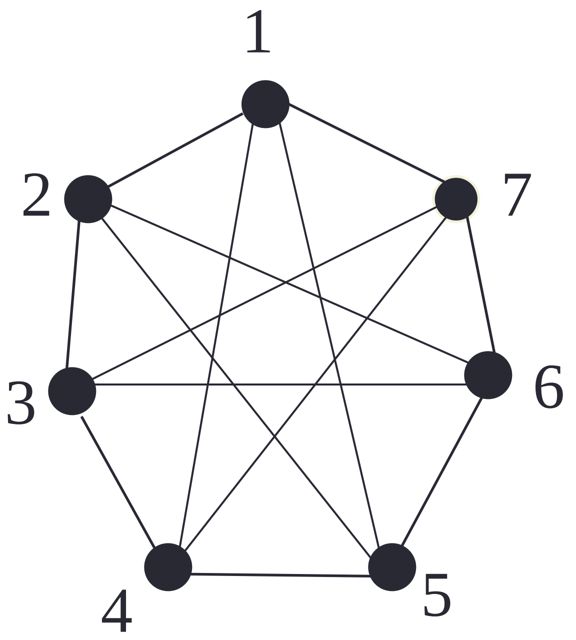
- Virsotnes = {a, b, c, d, e}.
- Šķautnes = {ab, ad, bc, bd, be, cd, de}.

Grafu izomorfisms

Definīcija Grafi G un H ir izomorfi, ja G virsotnes var pārdēvēt tā, lai iegūtu grafu H.

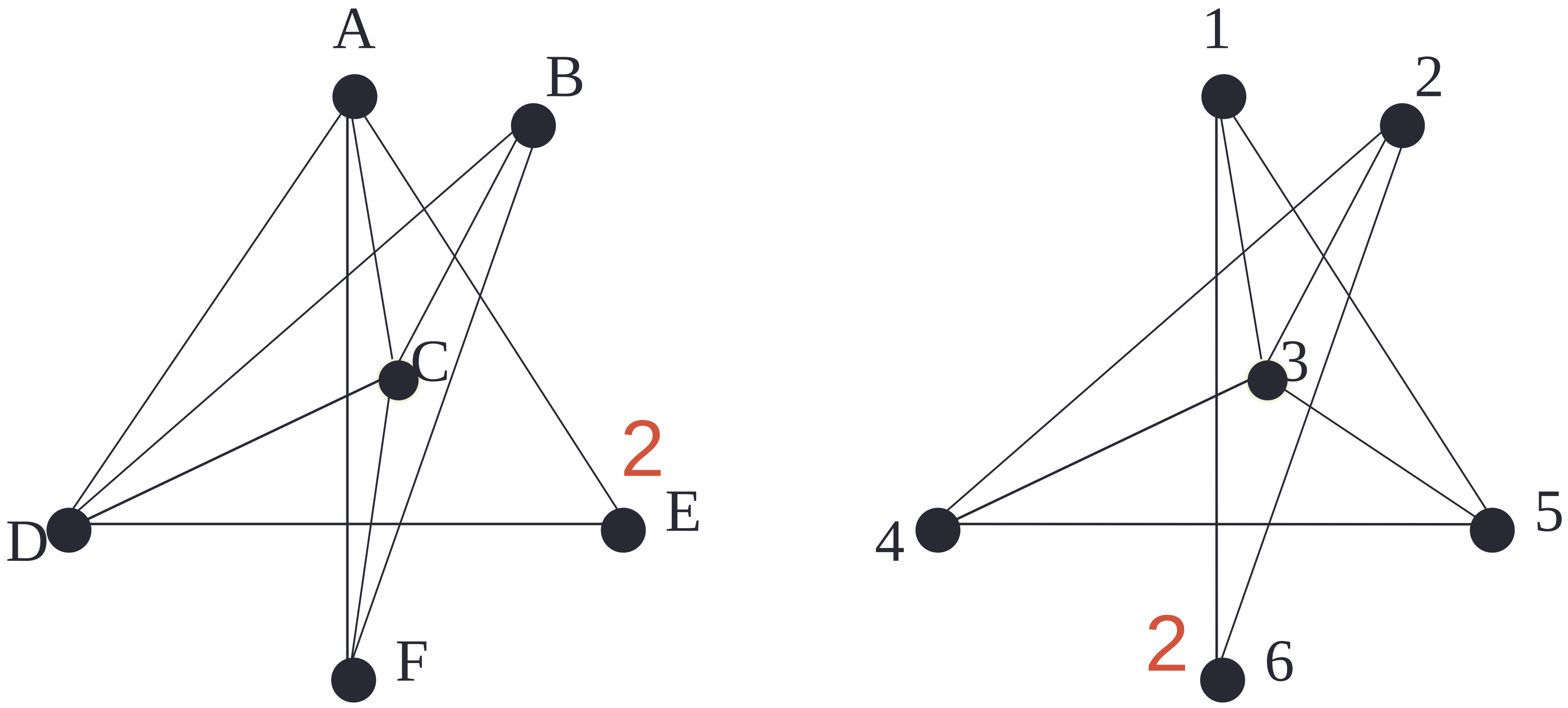
Vai šie 2 grafi ir izomorfi?





A-1, B-4, C-7, D-3, E-6, F-2, G-5.

Vai šie 2 grafi ir izomorfi?



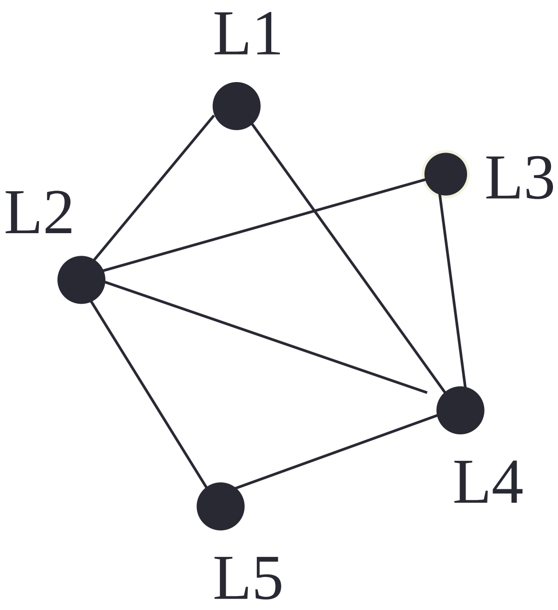
Nav izomorfi

Plānošana

- Lekcijas L1, ..., Lm.
- Studenti, katrs students grib apmeklēt dažas lekcijas Li.
- Saplānot lekcijas tā, lai nevienam studentam nebūtu vienlaikus jāapmeklē 2 lekcijas.

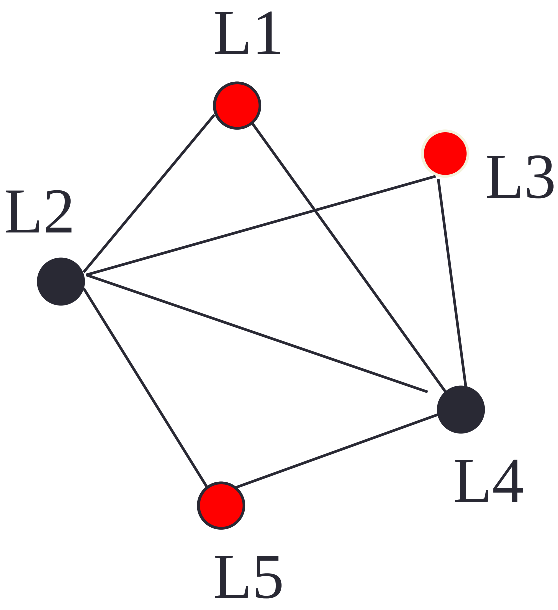
Grafu krāsošana

- Grafa virsotnes = lekcijas L1, ... Lm.
- Šķautne (Li, Lj), ja kāds students grib apmeklēt gan Li, gan Lj.



Lekcijas, kas drīkst notikt vienlaikus = grafa virsotnes, starp kurām nav šķautņu.

Neatkarīga kopa



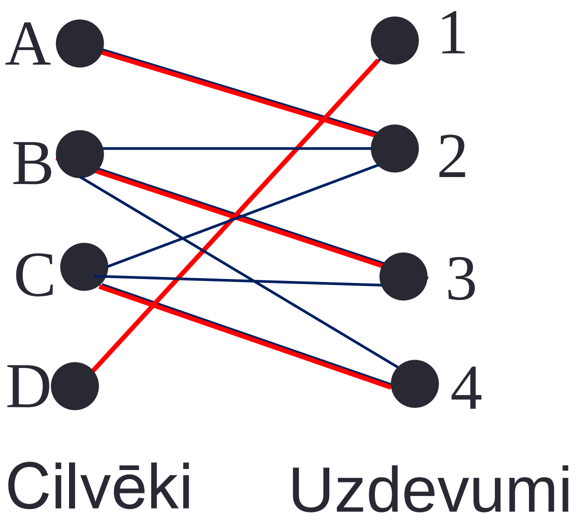
Neatkarīga kopa = virsotnes, starp kurām nav nevienas šķautnes.

- Kāda ir lielākā neatkarīgā kopa šajā grafā?

Uzdevumu sadale starp cilvēkiem

- N cilvēki, N darbi.
- Nosacījumi: vai cilvēks i prot/grib veikt darbu j.
- Sadalīt darbus tā, lai:
  - Katram cilvēkam – 1 darbs;
  - Katram darbam – 1 cilvēks;
  - Katram cilvēkam – darbs, kuru tas prot/grib veikt.

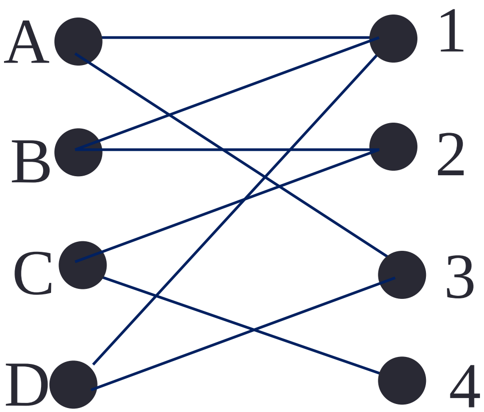
Sapārojumi

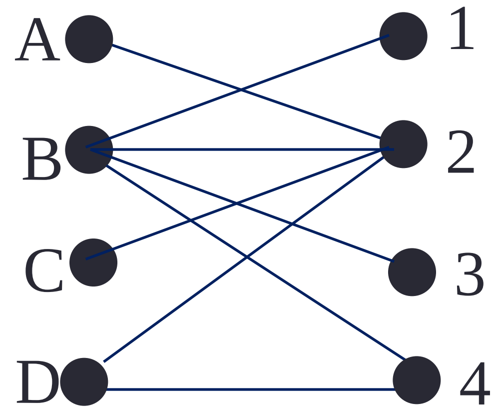


- Sapārojums = šķautņu kopa, katra virsotne – galapunkts ≤ 1 šķautnei.
- Piemēram, šķautnes B2 un C3.
- Pilns sapārojums: katra virsotne – galapunkts tieši 1 šķautnei.

Piemēri

Vai šajā grafā ir pilns sapārojums?

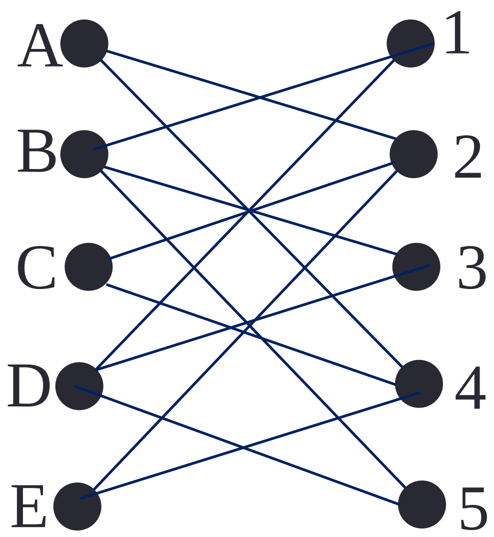




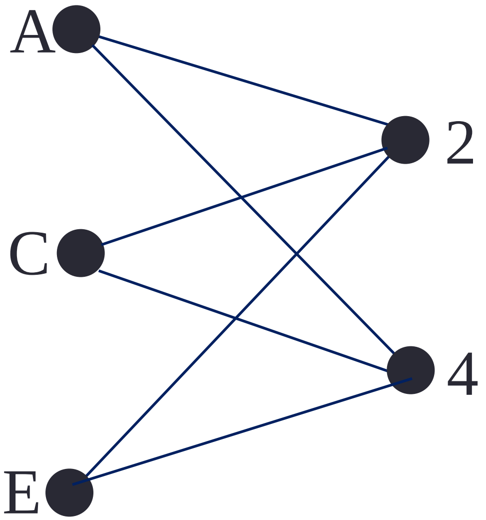
A1, B2, C4, D3

Nav: vai nu A vai C paliek nesapārota

Piemērs

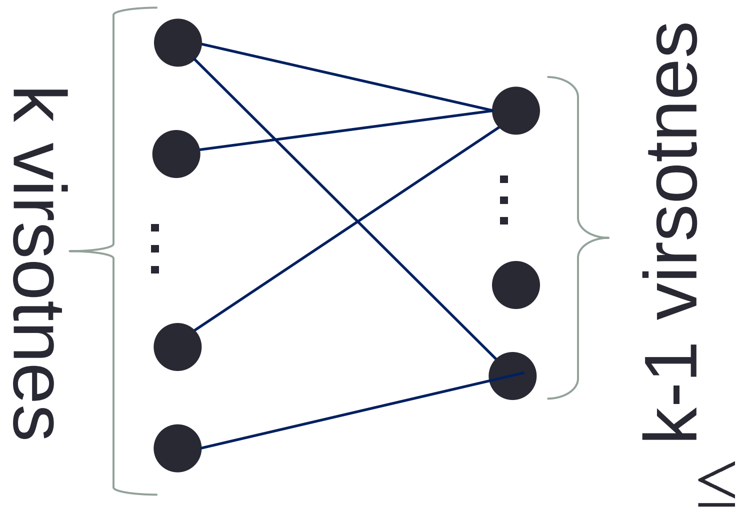


Vai šajā grafā ir pilns sapārojums?



Nav.

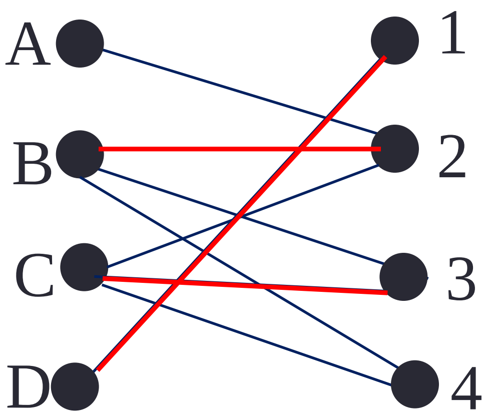
Kritērijs

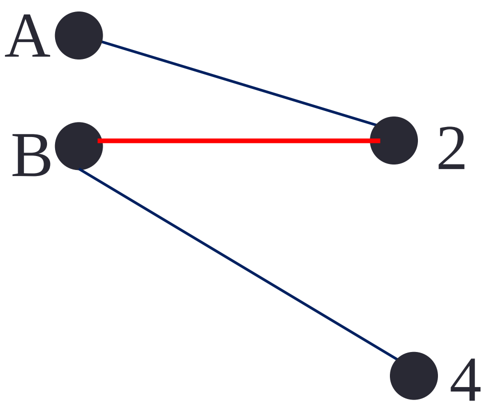


Ja ir šāda situācija, tad pilna sapārojuma nav.

<u>Holla teorēma</u> Ja pilna sapārojuma nav, tad var atrast k virsotnes kreisajā pusē, kuras savienotas ar ≤ k-1 virsotnēm labajā pusē.

Kā uzģenerēt sapārojumu?

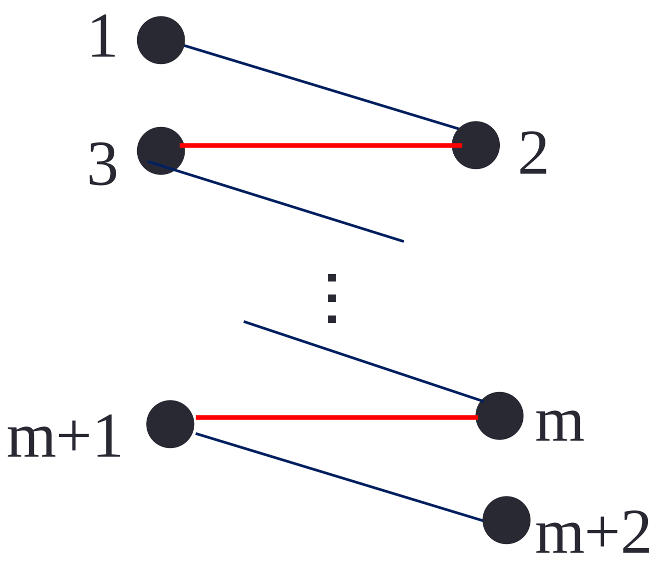




Kā uzlabot šo sapārojumu?

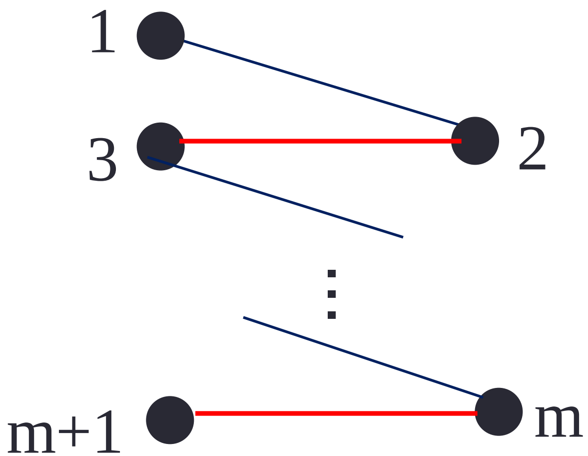
Pievieno A2, B4, izmet B2.

Pagarinošie ceļi



- Sākas ar virsotni, kas nav sapārota.
- Pārmaiņus šķautnes, kas nepieder sapārojumam (zilas) un šķautnes, kas pieder sapārojumam (sarkanas).
- Beidzas ar virsotni, kas nav sapārota.

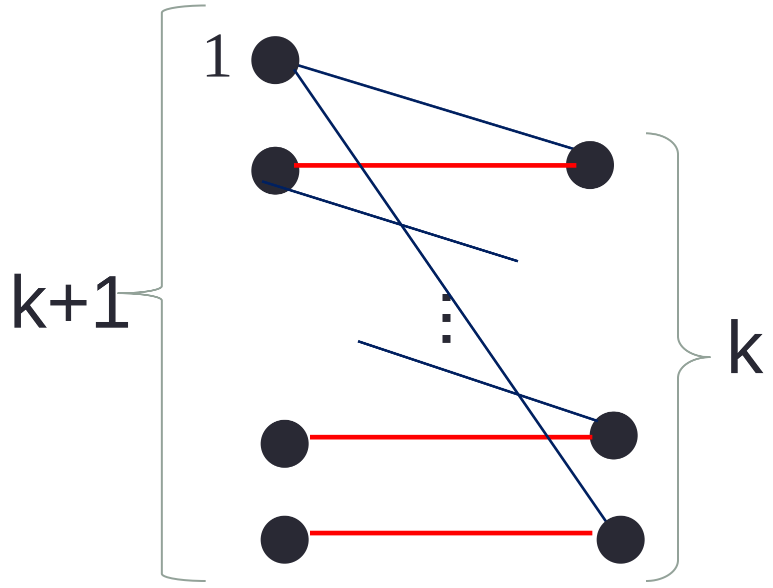
Nepilni pagarinošie ceļi



- Sākas ar virsotni, kas nav sapārota.
- Pārmaiņus šķautnes, kas nepieder sapārojumam (zilas) un šķautnes, kas pieder sapārojumam (sarkanas).
- Beidzas ar sapārotu virsotni.

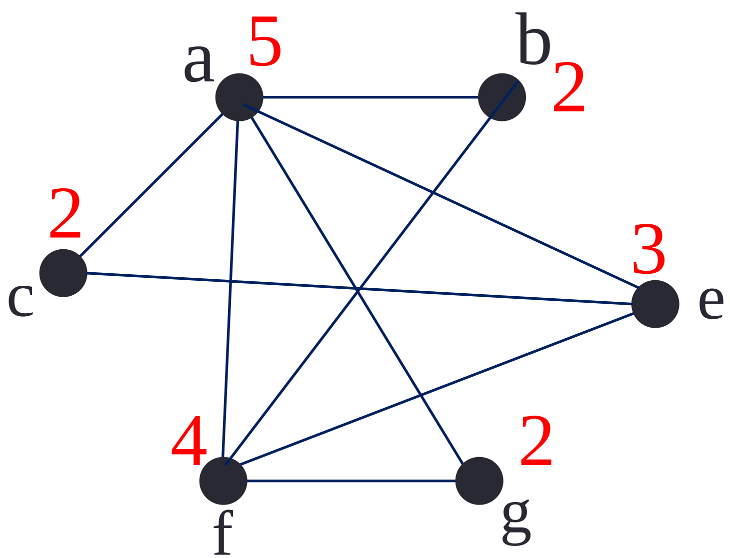
Ja nav (pilna) pagarinoša ceļa

- Ņem nesapārotu virsotni 1.
- Apskata visas virsotnes, kur var nokļūt no 1 pa nepilnu pagarinošu ceļu.



Ja nav pagarinoša ceļa, tad esošo sapārojumu nevar palielināt.

Virsotnes pakāpe



Virsotnes u pakāpe: šķautņu skaits, kas iziet no u.

5+4+3+2+2+2 = ?

Pakāpju summa = 2*šķautņu skaits

Pakāpju summa – pārskaitlis.

Pielietojumi

- Tenisa turnīrs, 7 spēlētāji.
- Vai var saplānot spēles tā, lai katrs spēlētājs vienreiz izspēlētu ar tieši 3 citiem?

- Virsotnes = spēlētāji.
- Šķautnes = spēlētāji, kas spēlē savā starpā.

Pakāpju summa: 3+3+3+3+3+3+3 = 21.

Nav iespējams.

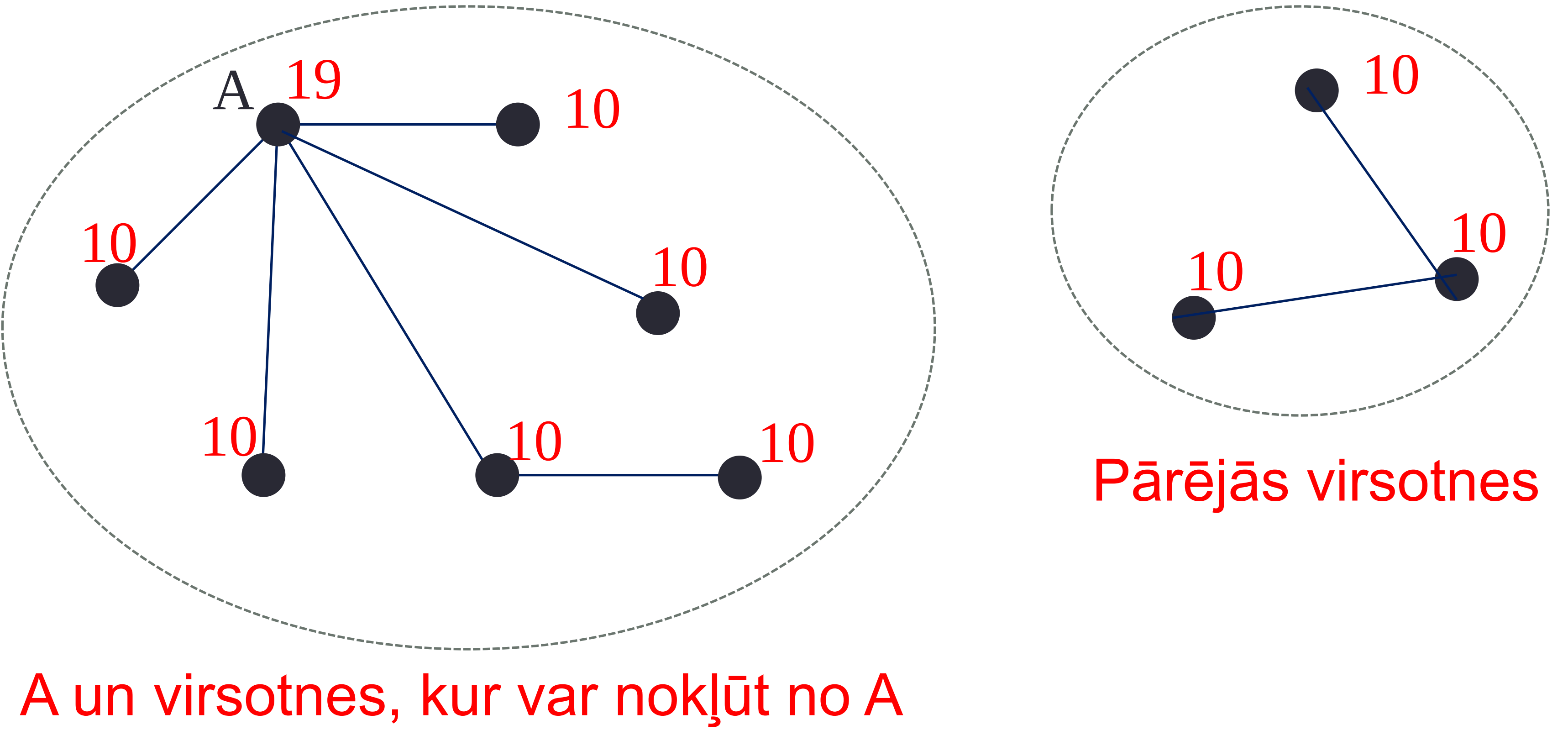
Pielietojumi

- Pilsētas, ceļi starp pilsētām.
- No pilsētas A iziet 19 ceļi, no B – 1 ceļš, no katras no pārējām pilsētām pa 10.
- Pierādīt, ka no A var aizbraukt uz B.

- Grafa virsotnes – pilsētas.
- Šķautnes – ceļi.

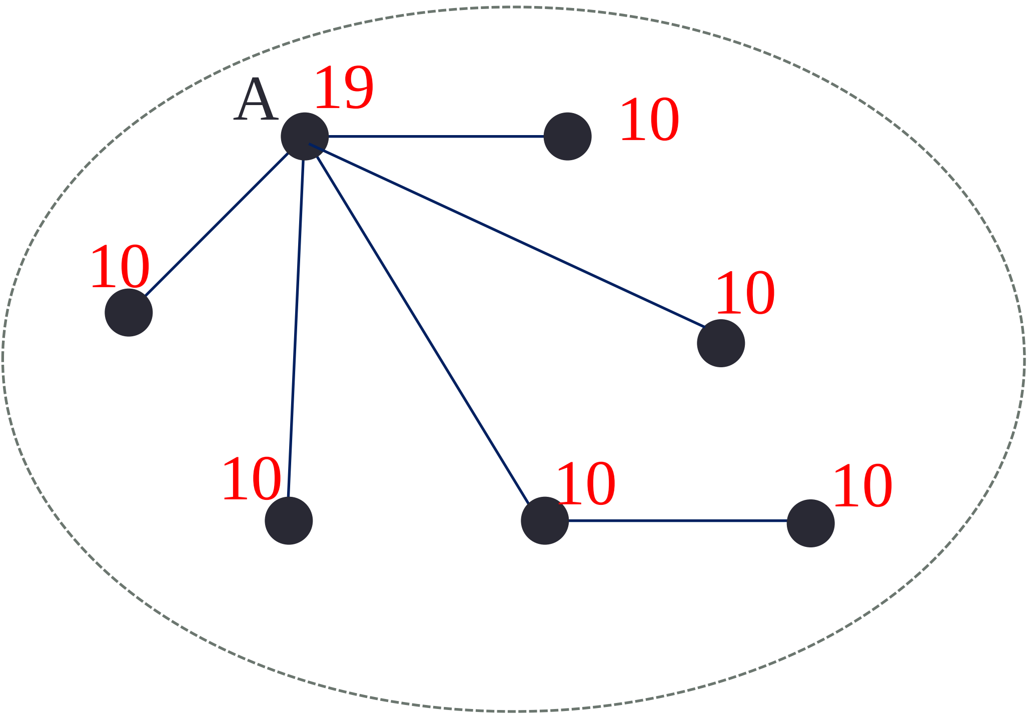
Pielietojumi

- No pilsētas A iziet 19 ceļi, no B – 1 ceļš, no pārējām pilsētām pa 10.
- Pierādīt, ka no A var aizbraukt uz B.



Pielietojumi

- No pilsētas A iziet 19 ceļi, no B – 1 ceļš, no pārējām pilsētām pa 10.
- Pierādīt, ka no A var aizbraukt uz B.



Ja B nav šajā daļā, tad pakāpju summa ir 19+10+...+10 – nepāra.

Nav iespējams.

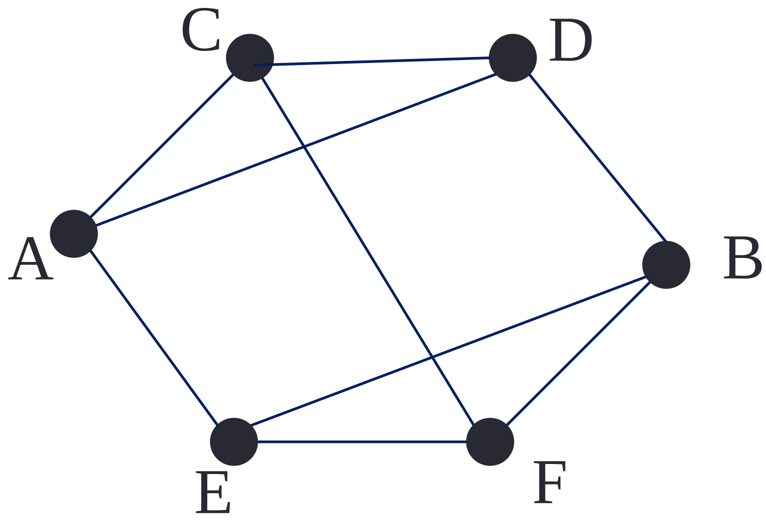
A un virsotnes, kur var nokļūt no A

Vispārīgais gadījums

- Teorēma Pakāpju summa – pāra skaitlis.
- Secinājums Jebkurā grafā ir pāra skaits virsotņu ar nepāra pakāpi.

Nepāra skaits nepāra skaitļu – summa ir nepāra skaitlis.

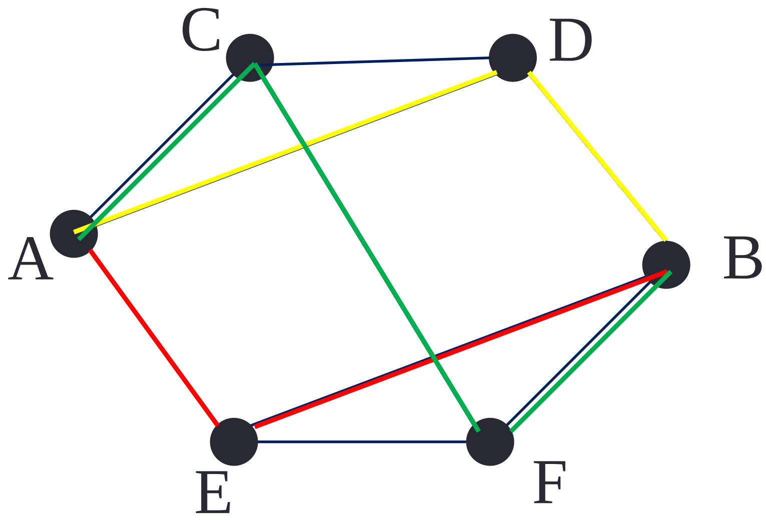
Šķēlumi



- Sakaru tīkls.
- Cik sakaru līniju jāpārrauj, lai A nevar sazināties ar B?

- Šķēlums – šķautņu kopa, kuras izmetot, grafs sadalās 2 daļās.
- Kāds ir mazākais šķautņu skaits šķēlumā, kas atdala A no B?

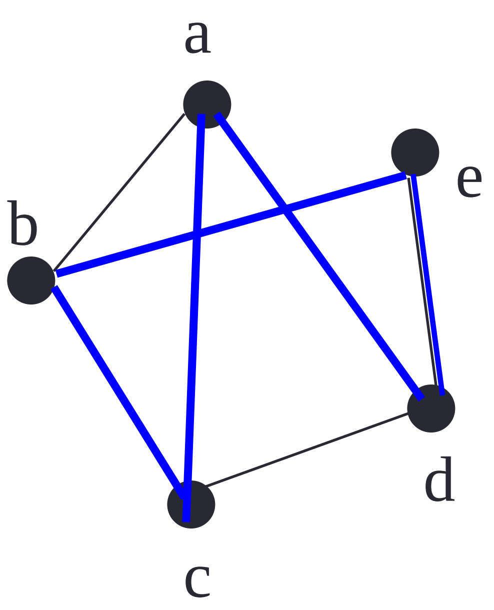
Kā pierādīt, ka nav mazāka šķēluma?



Jāpārrauj vismaz viena šķautne katrā ceļā.

Mengera teorēma Ja mazākajā šķēlumā, kas atdala A no B ir k šķautnes, tad var atrast k ceļus no A uz B, kuriem nav kopīgu šķautņu.

Hamiltona cikls

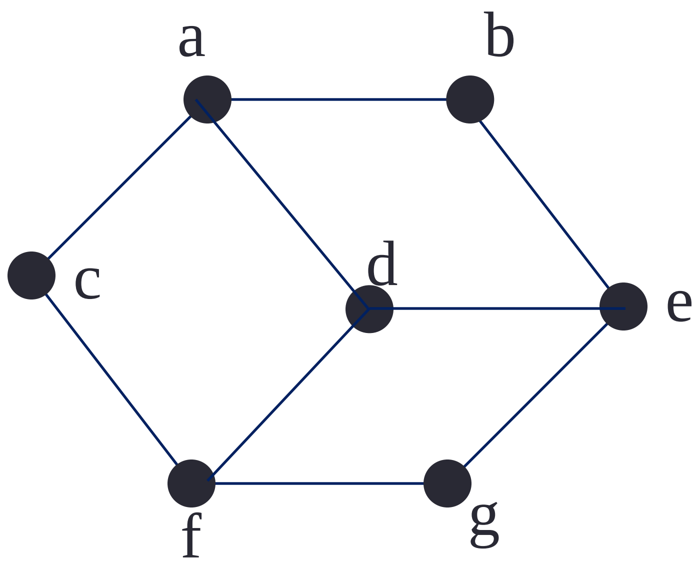


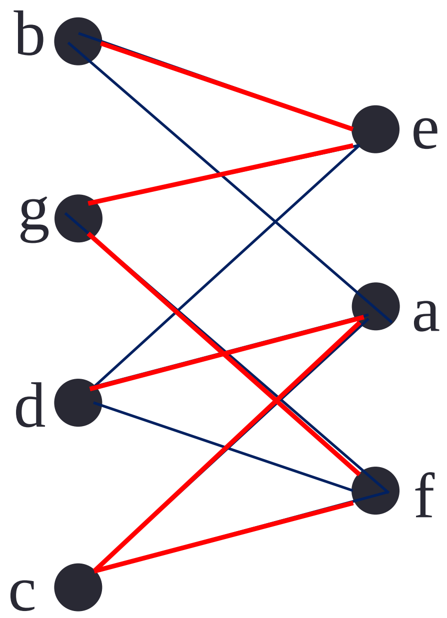
- Cikls – šķautņu virkne

  u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, …, u_ku_1.

- Vai ir cikls, kas iziet caur katru virsotni tieši vienreiz?

Vai šajā grafā ir Hamiltona cikls?





1. virsotne – kreisajā pusē

2. virsotne – labajā pusē

3. virsotne – kreisajā pusē

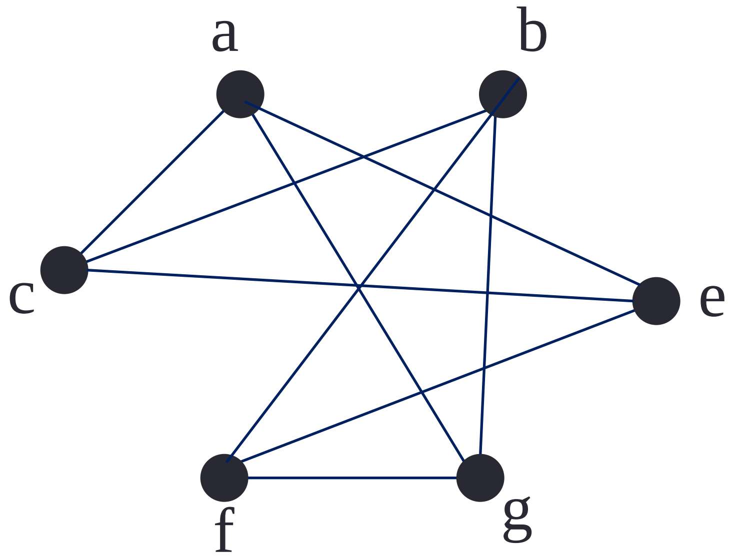
...

7. virsotne – kreisajā pusē

Nosacījumi, pie kuriem ir Hamiltona cikls

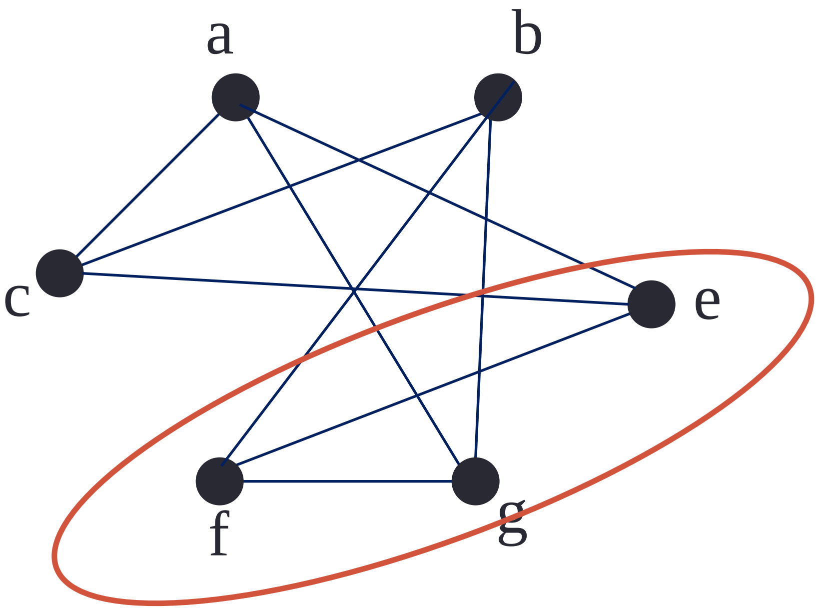
Dīraka teorēma (1952) Ja grafā ar n virsotnēm katra virsotne ir savienota vismaz ar n/2 citām, tad šajā grafā ir Hamiltona cikls.

Pierādījums Sakārto virsotnes pa apli kaut kādā secībā.

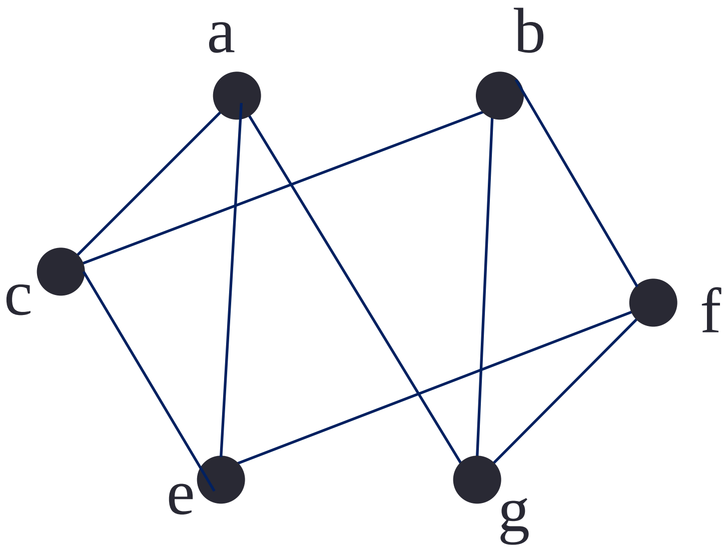


m – vietu skaits, kur blakus virsotnes savienotas ar šķautni

Risinājuma uzlabošana



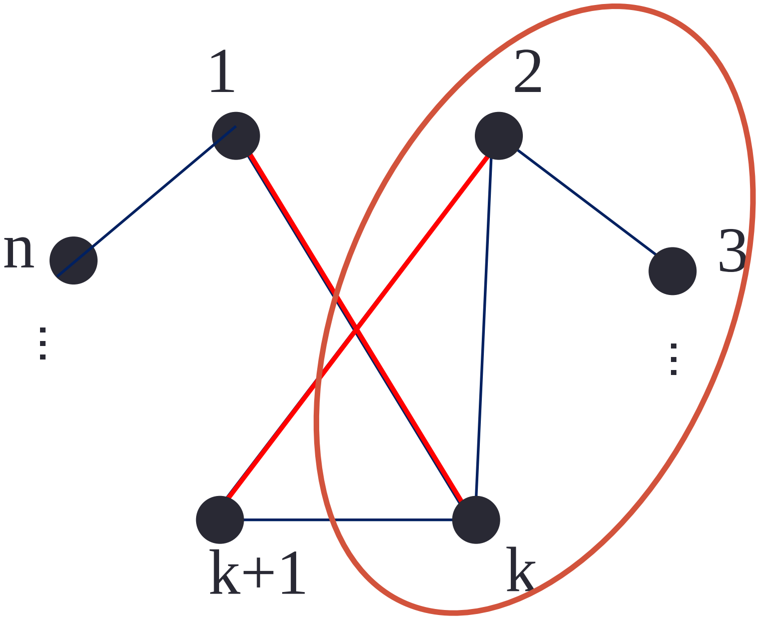
m=2



m=4

Atkārto, līdz ir škautne starp katrām 2 blakus virsotnēm.

Kāpēc tas strādā?



Pieņemsim, ka ir šķautnes 1-k un 2-(k+1).

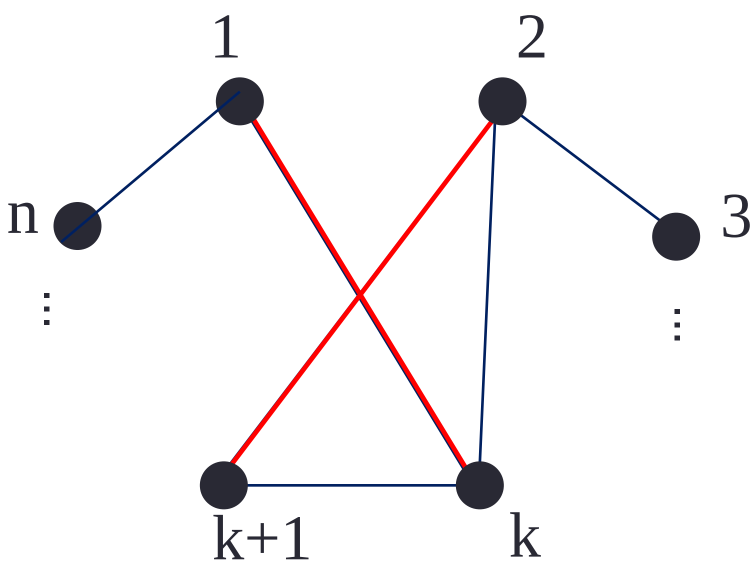
Nomainot 2, ..., k secību uz pretējo:

+2 šķautnes 1-k un 2-(k+1);

-1 šķautne k-(k+1).

Šķautņu skaits starp blakus virsotnēm: +1 vai +2.

Varianti, kas der



13 un 24,

14 un 25,

…,

1-(n-1) un 2n

n-3 varianti

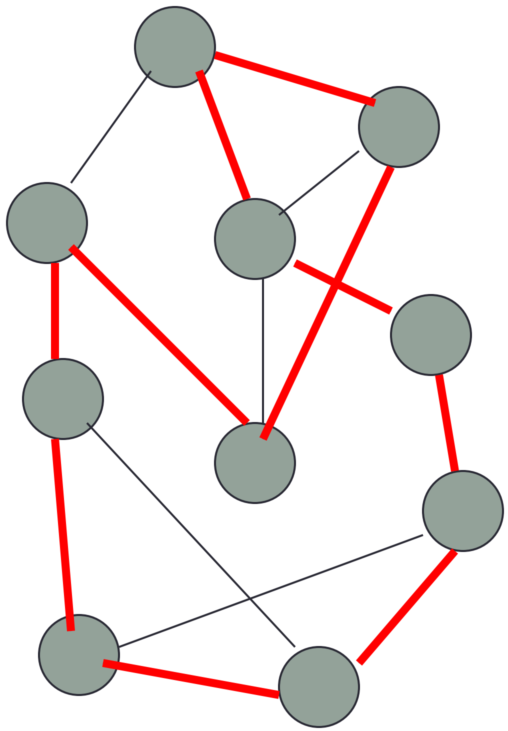
No 1 un 2 iziet ≥ n/2+n/2 = n šķautnes.

23 un 1n nav izmantotas nevienā variantā.

Atliek ≥ n-2 šķautnes.

Vienā variantā būs abas šķautnes.

Kā atrast Hamiltona ciklu?



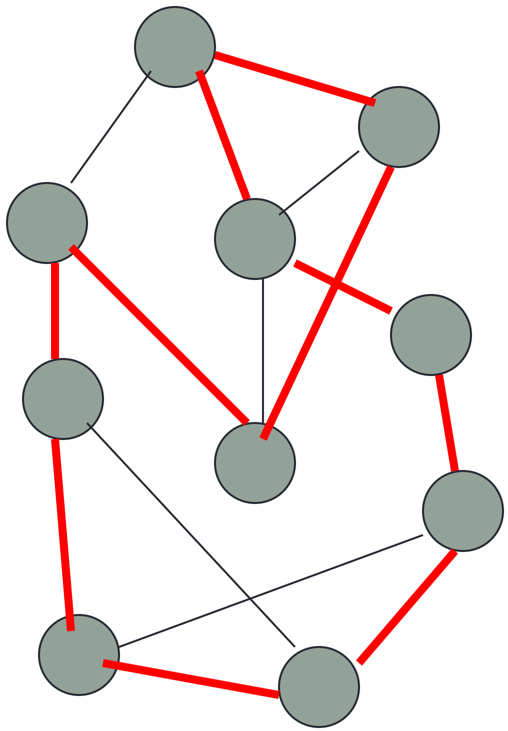
$1 - u_2 - u_3 - \dots - u_n - 1.$

- Variantu skaits:
  - u_2 – n-1 iespējas;
  - u_3 – n-2 iespējas;
  - ...

$(n-1)(n-2)\dots 1 = (n-1)!$

19! = 121,645,100,408,832,000

Kā atrast Hamiltona ciklu?

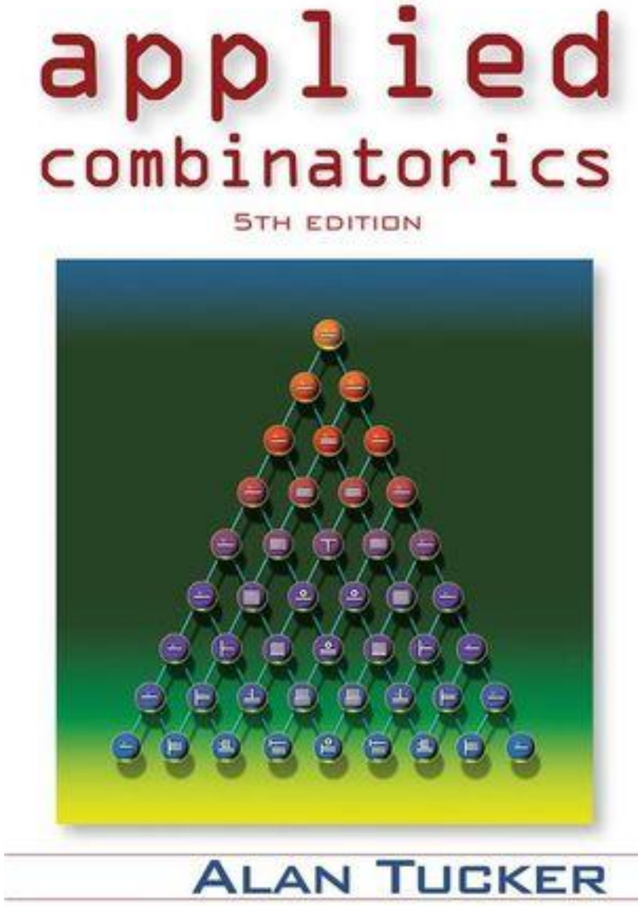


- Hamiltona cikli ir:
  - Viegli pārbaudāmi;
  - Grūti atrodami (pārāk daudz iespēju).

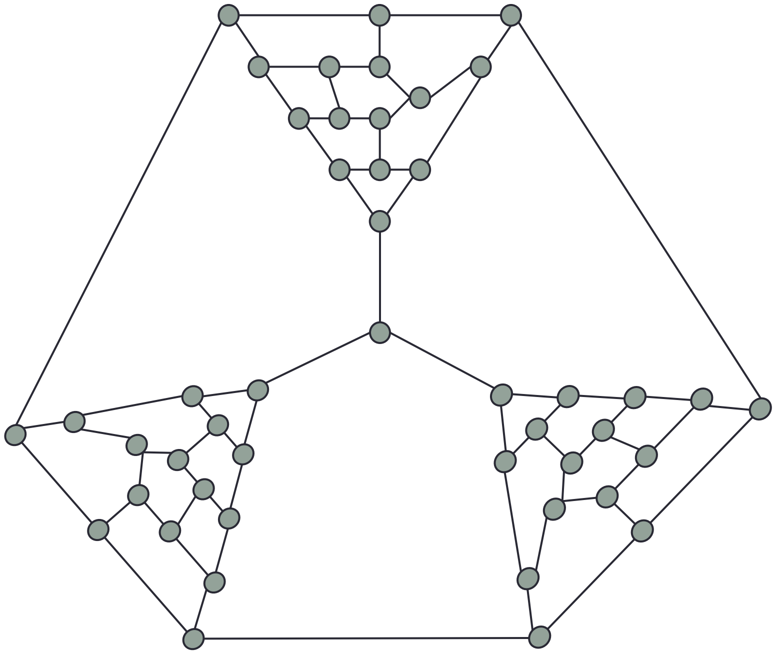
NP-pilna problēma

Grīnberga teorēma

Emanuēls Grīnbergs (1911-1982)



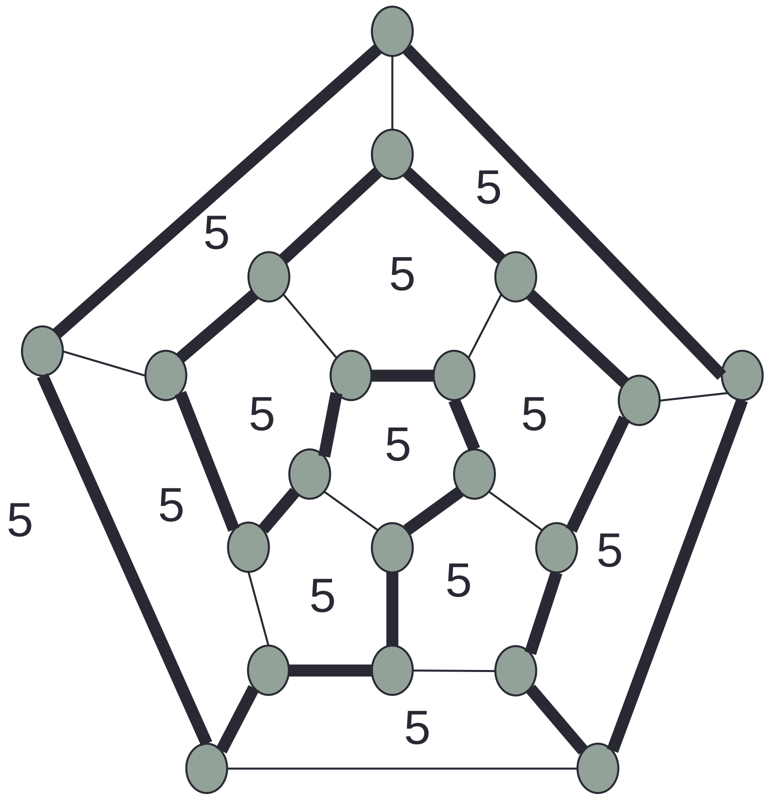
Vai šajā grafā ir Hamiltona cikls?



Nē, bet kā to pierādīt?

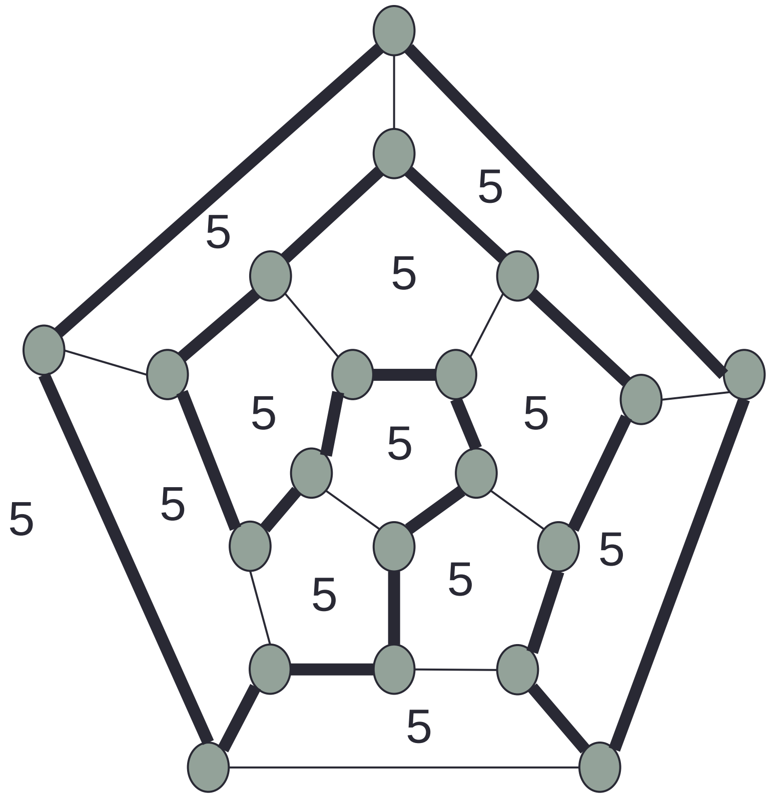
Grīnberga teorēma [1968]

- Grafs plaknē, ko var attēlot tā, lai šķautnes nekrustotos.



f_i – šķautņu skaits, kas ierobežo katru no skaldnēm

Grīnberga teorēma [1968]

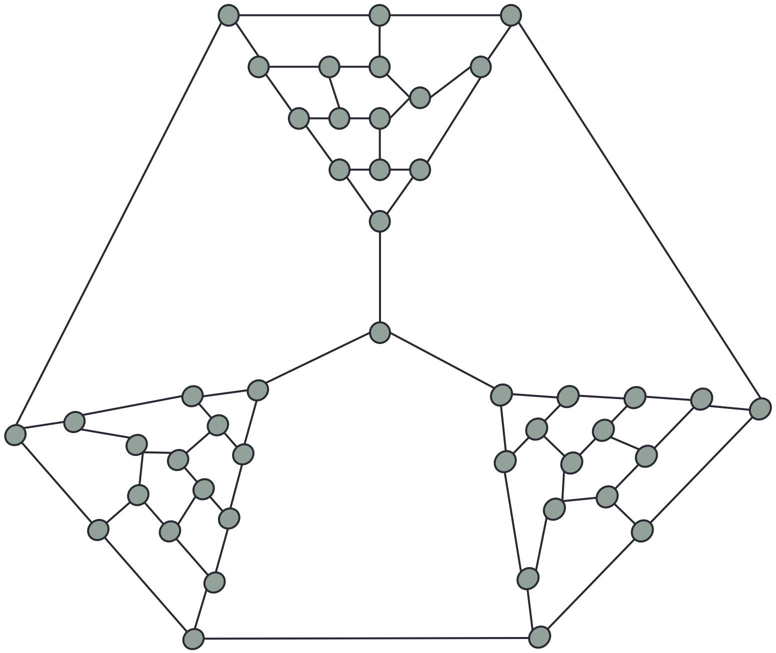


- Ja grafs-Hamiltona, tad

$$\sum_i (f_i - 2) = \sum_i (g_i - 2)$$

f_i – šķautņu skaits iekspuses skaldnēm,
g_i – šķautņu skaits arpuses skaldnēm.

Vai šajā grafā ir Hamiltona cikls?



Nē, jo to nevar sadalīt 2 daļas tā, lai izpildītos Grīnberga formula.