Haoss un periodiskie punkti

LU Fizikas un matemātikas fakultātes
asoc.profesore Inese Bula

Mazā matemātikas universitāte
2012. gada 6.oktobrī

Haoss

13.novembris 2009. gads, Kalifornija,
http://www.jamesfike.com/2009/11/13/natures-chaos/

http://my.opera.com/rayonx2/albums/showpic.dml?album=640105&picture=8732712

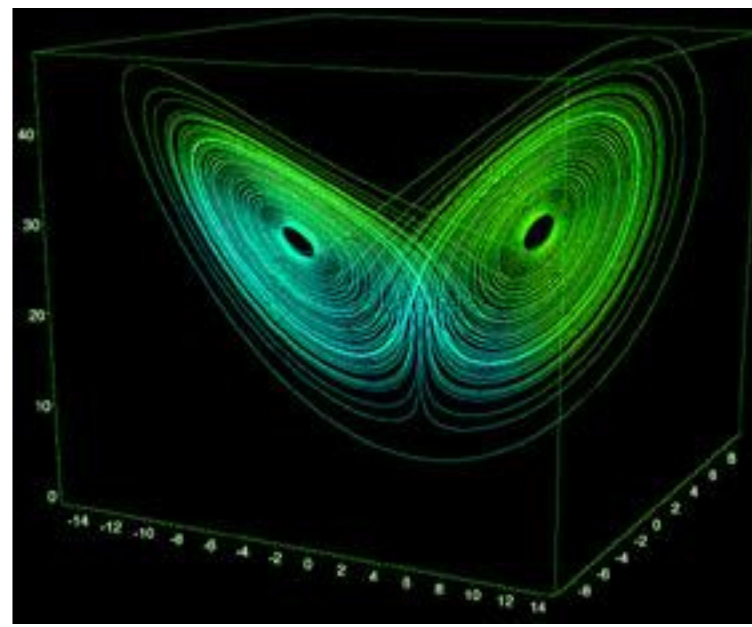
http://superterrifichappycarblog.blogspot.com/2011/04/chaos-in-nature.html

http://whyevolutionistrue.files.wordpress.com/2012/09/s_n09_000chaos.jpg

Tīģeriene Busaba, Khao Kheow Open Zoo, Taizeme
http://whyevolutionistrue.files.wordpress.com/2012/09/s_n17_explosio.jpg

Lorenca diferenciālvienādojumu sistēma apraksta laika apstākļu prognozēšanu. Šis reālās dzīves modelis parāda, ka laika apstākļu prognozēšana ilglaicīgi nav iespējama, jo modelis ir haotisks un visas fizikalās mērierīces nav precīzas.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$



Pieņemsim, ka *f* ir funkcija, kas definēta reālo skaitļu ***R*** apakškopā ***A*** un tās vērtību apgabals arī ir no reālo skaitļu apakškopas ***A***.

Definīcija (R.Devaney, 1989). Funkciju *f* sauc par **haotisku funkciju kopā *A***, ja

1) tā ir jūtīgi atkarīga no sākuma nosacījumiem,
2) tā ir topoloģiski transitīva,
3) tās periodisko punktu kopa ir blīva kopā ***A***.

Šī definīcija satur trīs jēdzienus, kurus nevar vienkārši paskaidrot. Bet, kas ir periodiskie punkti, noskaidrosim!

Robert Devaney, dzimis 09.05.1948., ASV

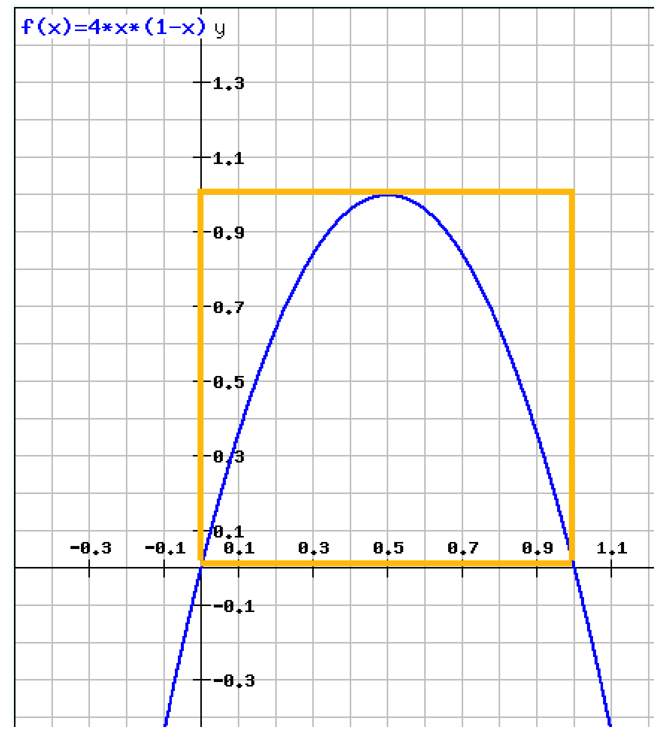
Journal of Difference Equations and Applications
Vol. 16, Nos. 5–6, May–June 2010, 407–409

Roberts Devanejs 2010.gada jūlijā, Rīgā, ICDEA konferencē

Periodiskie punkti

Pieņemsim, ka ***A*** ir reālu skaitļu apakškopa, kas ir funkcijas *f* definīcijas apgabals; kā arī funkcijas *f* vērtību apgabals ietilpst kopā ***A***.

Piemēram, funkcijai $f(x) = 4x(1-x)$, ja tās definīcijas apgabals ir [0;1], tad tās vērtību apgabals arī ir [0;1]. Doto funkciju sauc par **logistisko funkciju**. Tā ir haotiskas funkcijas piemērs.



Grafiki izveidoti http://rechneronline.de/function-graphs/

Pieņemsim, ka punkts x_0 ir izvēlēts no kopas *A*. Punktu kopu

$$\{x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)) = f^2(x_0),\ f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \dots\}$$

sauc par **punkta x_0 orbītu pie funkcijas *f*.**

Šajā gadījumā $f(x_0)$ sauc par x_0 pirmo iterāciju, $f^2(x_0)$ sauc par x_0 otro iterāciju un vispārīgi $f^n(x_0)$ sauc par x_0 *n*-to iterāciju pie funkcijas *f*. Piemēram, punkta $\frac{1}{3}$ orbīta pie funkcijas $f(x) = 4x(1-x)$ ir šāda:

$$x_0 = \frac{1}{3},$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9},$$

$$f^2(x_0) = f\left(\frac{8}{9}\right) = 4\cdot\frac{8}{9}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right) = \frac{32}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{32}{81},$$

$$f^3(x_0) = f\left(\frac{32}{81}\right) = 4\cdot\frac{32}{81}\cdot\left(1-\frac{32}{81}\right) = \frac{128}{81}\cdot\frac{49}{81} = \frac{6272}{6561},$$ utt.

Tātad kopā $\left\{\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{32}{81}, \frac{6272}{6561}, \dots\right\}$ ir redzamas punkta $\frac{1}{3}$ dažas pirmās iterācijas.

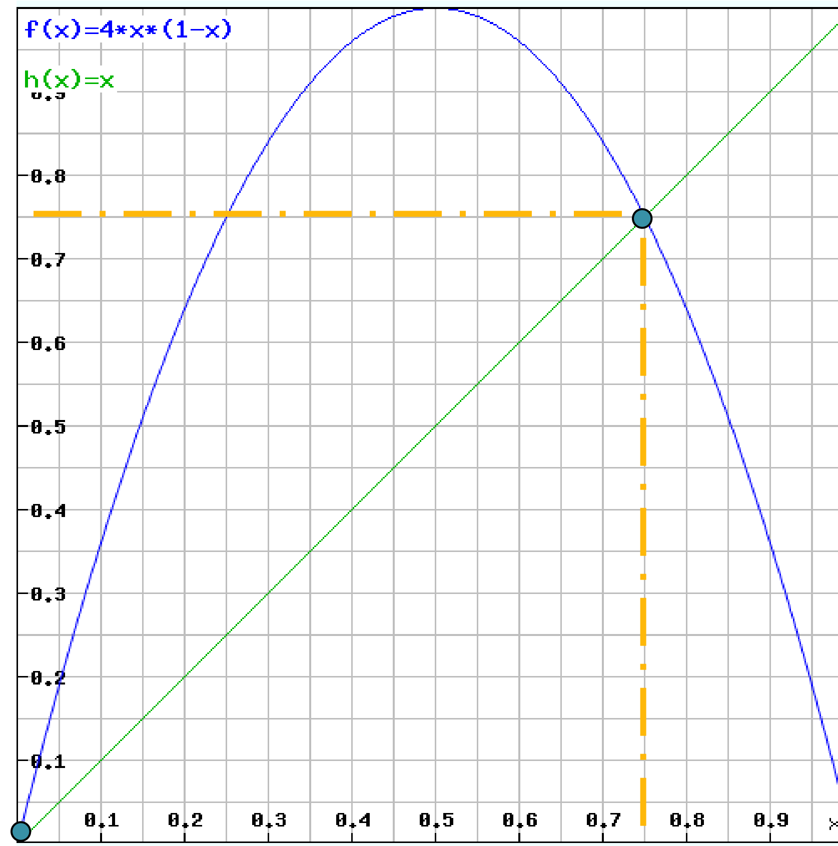
Ja izvēlēsimies citu sākumpunktu x_0, iegūsim pavisam citu punktu kopas:
$\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, \dots\right\}$ vai $\left\{\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{32}{81}, \frac{6272}{6561}, \dots\right\}$, utt.

Punktiem $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{2}$ orbītas ir īsas, ja neņem vērā atkārtojumus. Bet tas nozīmē, ka punkti 0 un $\frac{3}{4}$ funkcijai $f(x) = 4x(1-x)$ ir īpaši – tos sauc par funkcijas nekustīgajiem punktiem.

Definīcija. Punktu x^* sauc par funkcijas *f* **nekustīgo punktu**, ja $f(x^*) = x^*$.

Funkcijas nekustīgos punktus var atrast, risinot vienādojumu $f(x)=x$ vai grafiski, uzzīmējot funkciju $y=f(x)$ un $y=x$ grafikus un atrodot to krustpunktus.

$$4x(1-x)=x$$
$$4x-4x^2=x$$
$$4x^2-3x=0$$
$$x(4x-3)=0$$
$$x_1^*=0,\ x_2^*=\frac{3}{4}=0.75$$



Nekustīgos punktus var uzskatīt par funkcijas periodiskajiem punktiem ar periodu 1.

Definīcija. Punktu x_p sauc par funkcijas f **periodisko punktu ar periodu *p***, ja

$$f^{n+p}(x_p) = x_p \text{ visiem } n = 0,1,2,3,\ldots$$

Citiem vārdiem sakot,

- punkts x_p ir periodisks punkts ar periodu p, ja tā orbīta sastāv no p punktiem, kas atkārtojas bezgalīgi daudzas reizes;
- vai arī - punkts x_p ir periodisks punkts ar periodu p, ja tas ir funkcijas $y = f^p(x)$ nekustīgais punkts.

Vienādojums

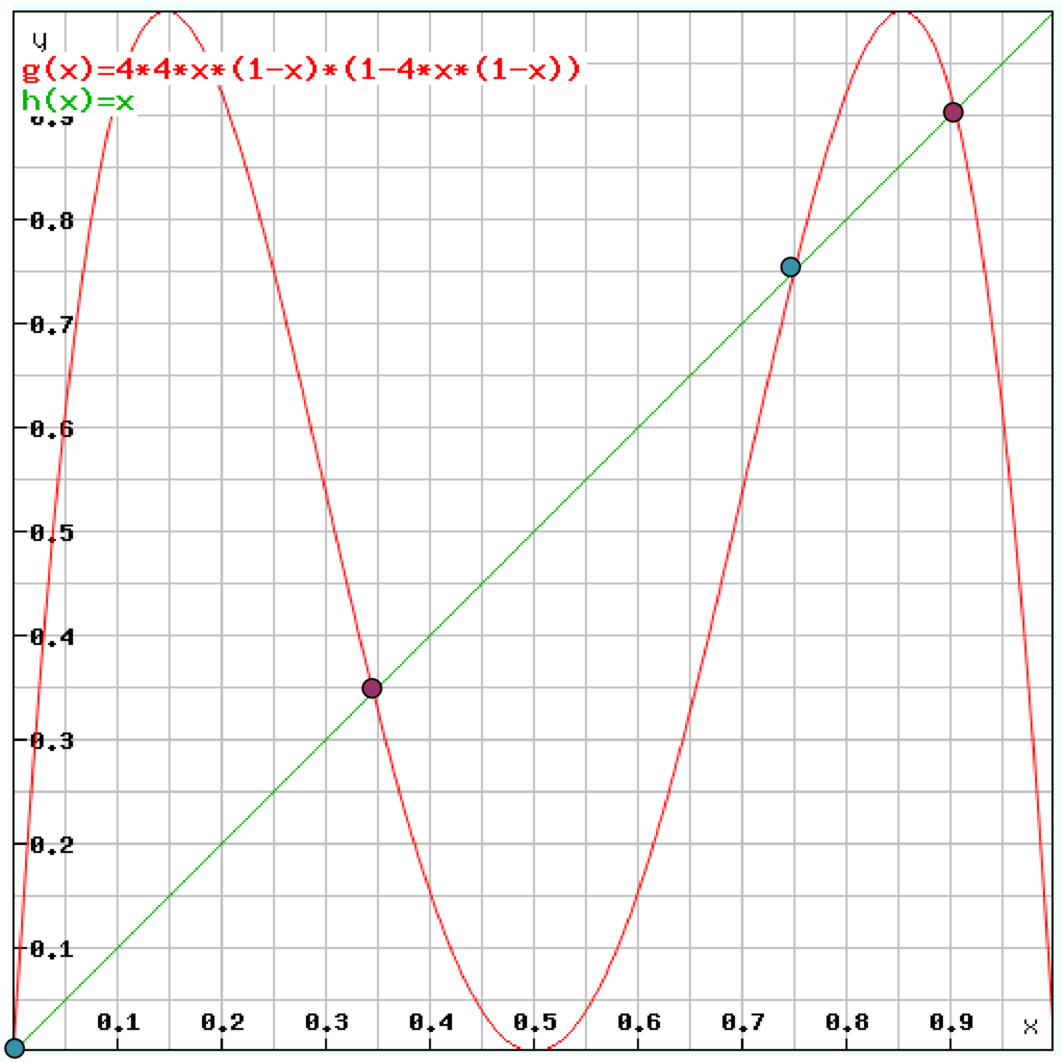
$f^2(x) = x$ jeb $4f(x)(1-f(x)) = x$

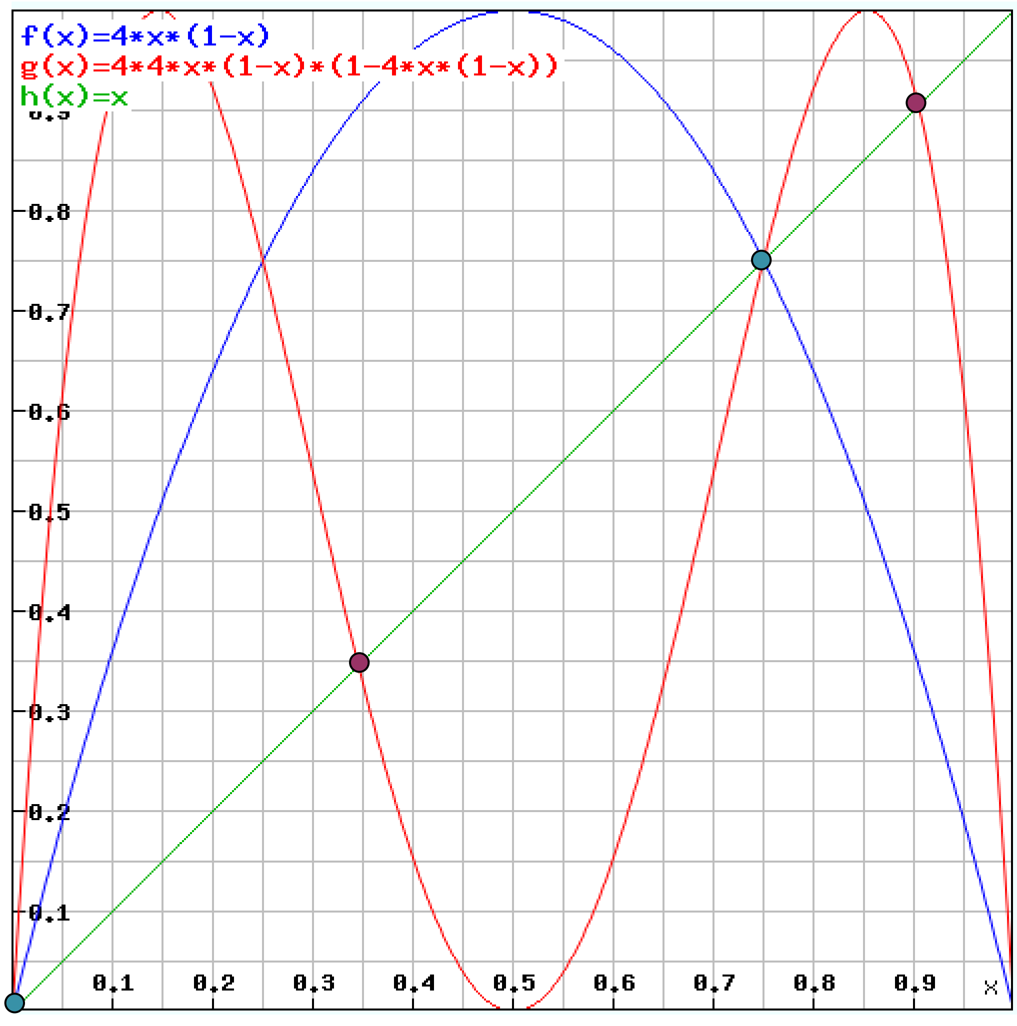
$$4 \cdot 4x(1-x) \cdot (1-4x(1-x)) = x$$

ir 4-tās kārtas vienādojums. Atrisinot ar www.wolframalpha.com, atradīsim četras saknes

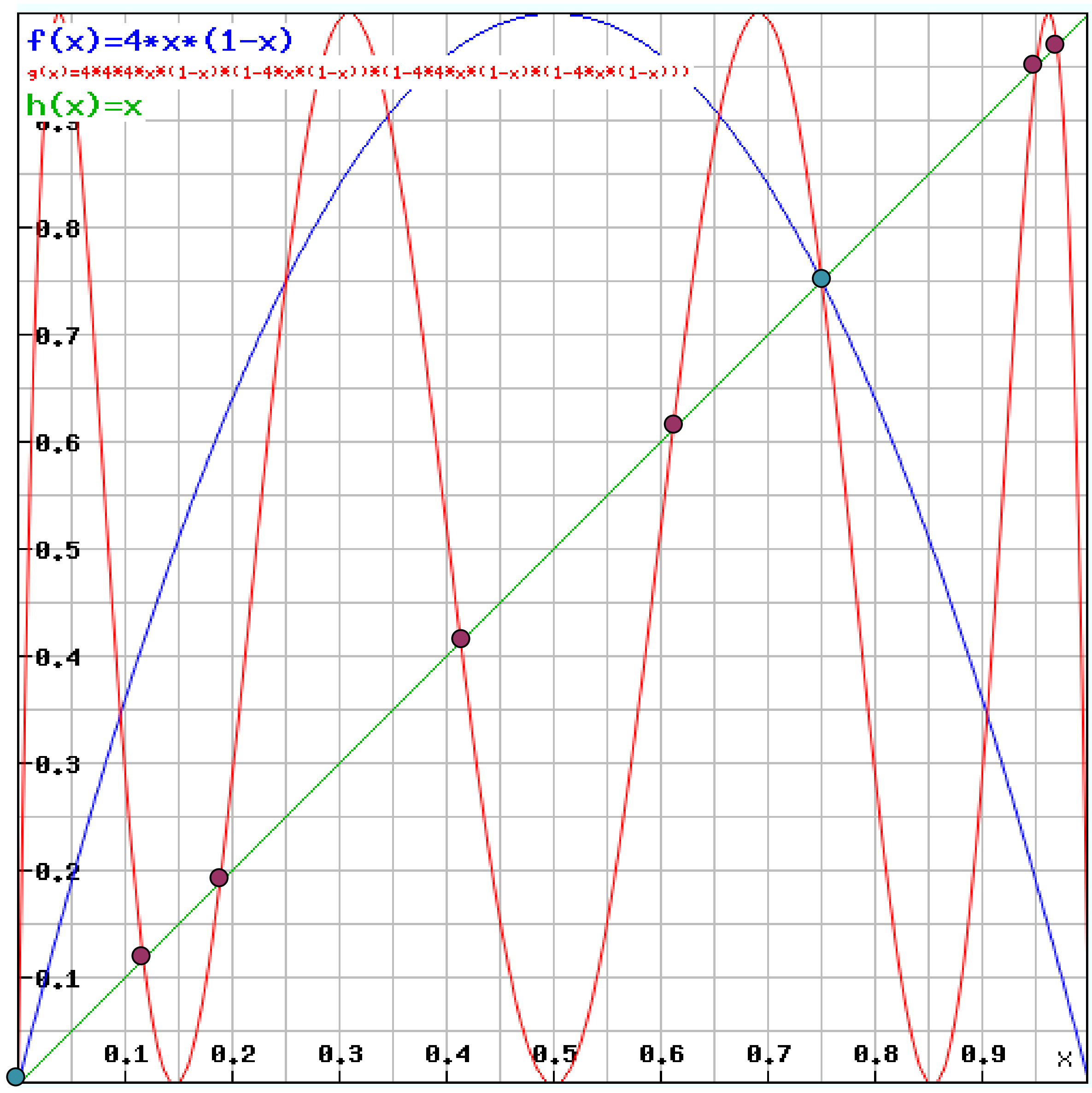
$0, \frac{3}{4}$ - sakrīt ar nekustīgajiem punktiem,

$\frac{1}{8}(5-\sqrt{5}) \approx 0.34549,$
$\frac{1}{8}(5+\sqrt{5}) \approx 0.90451$ - ir divi periodiskie punkti ar pirmperiodu 2.





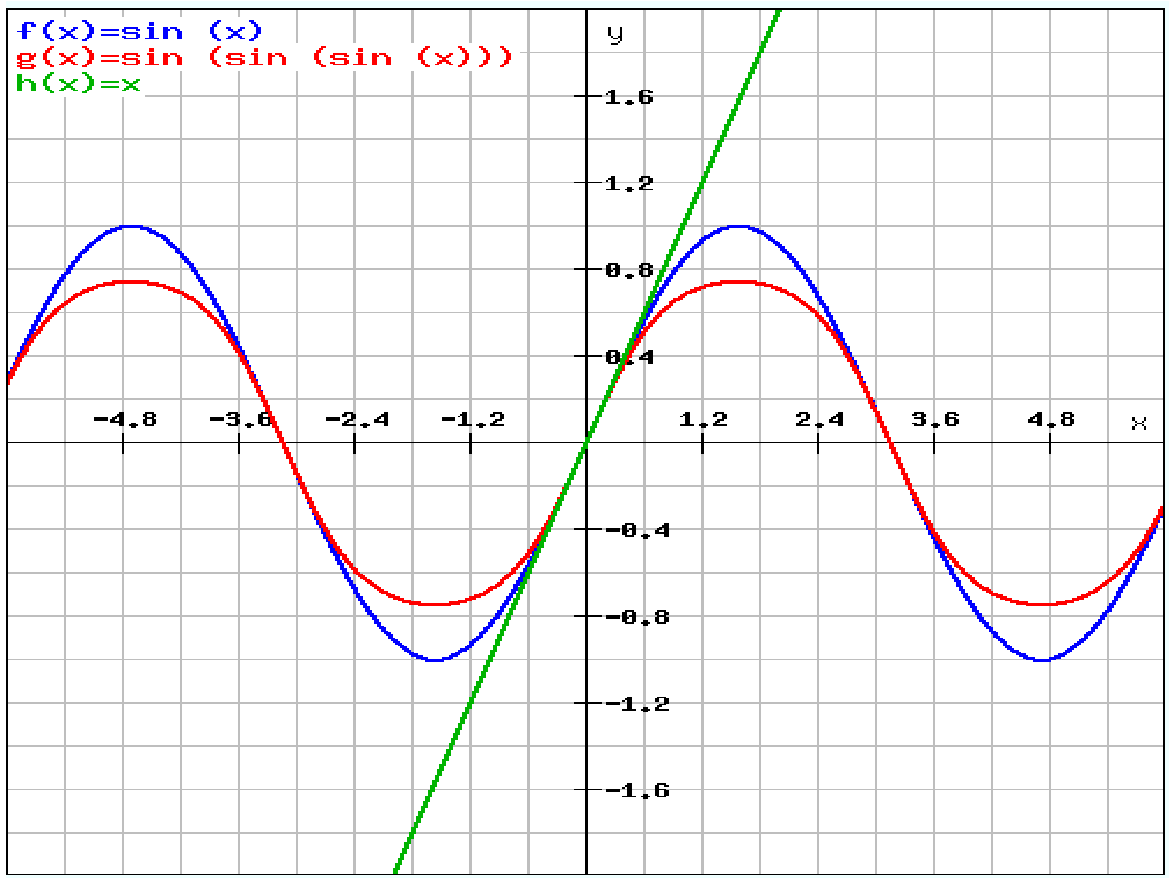
- - periodiskie punkti ar pirmperiodu 2
- - nekustīgie punkti



- periodiskie punkti ar pirmperiodu 3
- nekustīgie punkti

Lūdzu nesajaukt periodisku punktu un periodisku funkciju jēdzienus!

Tā, piemēram, sinusa funkcija ir periodiska ar periodu 2π, bet tai nav periodisku punktu, izņemot nekustīgo punktu 0.

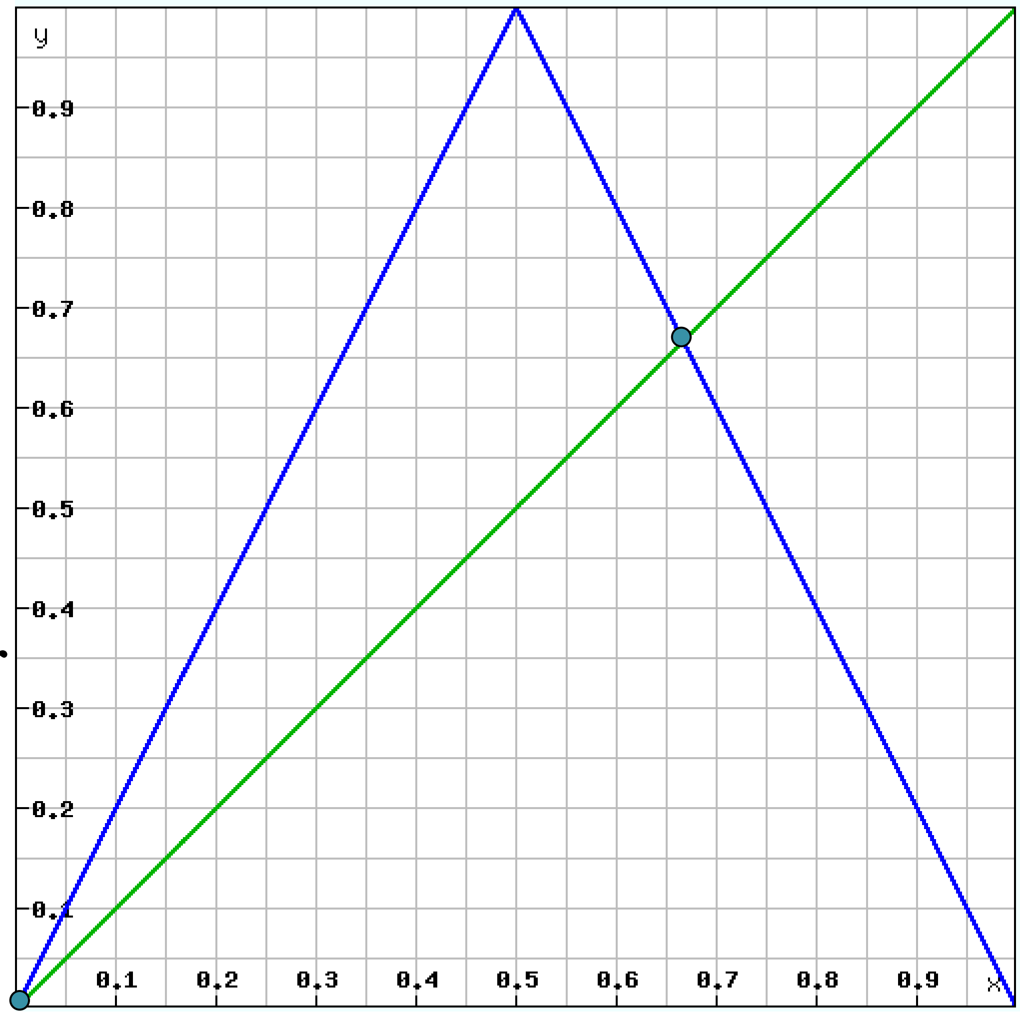


Telts attēlojums

$$T(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

vai

$$T(x)=1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$



Šo funkciju sauc par **telts attēlojumu** (*tent map*), arī par slīpā jumta attēlojumu (*spitz Dach*).

Arī šī funkcija ir haotiska intervālā [0;1].

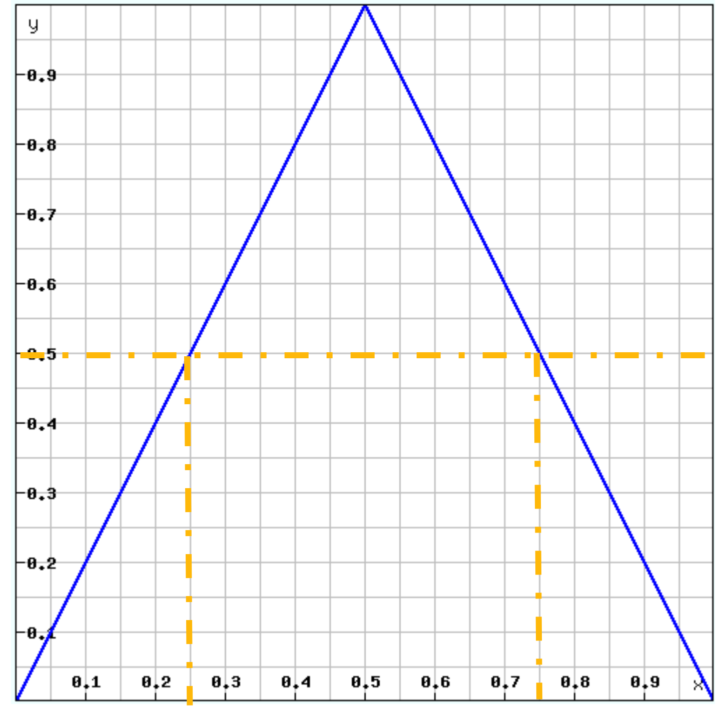
Telts attēlojuma gadījumā

$$T(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

nekustīgos punktus analītiski meklē šādi:

$$\begin{cases}2x=x, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 2-2x=x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ x=\frac{2}{3}, & \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$$

Kaut arī telts attēlojuma gadījumā uzrakstīt otrās iterācijas analītisko izteiksmi ir sarežģītāk nekā logistiskajai funkcijai, tomēr pēc tam precīzi (ar roku) var viegli atrast periodiskos punktus ar periodu 2.



Tā kā

$$2x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{4},$$

$$2-2x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{4},\ \text{tad}\ \ T^2(x)=\begin{cases}2\cdot 2x=4x,\ 0\le x\le\frac{1}{4},\\ 2-2\cdot 2x=2-4x,\ \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2},\\ 2-2\cdot(2-2x)=4x-2,\ \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4},\\ 2\cdot(2-2x)=4-4x,\ \frac{3}{4}<x\le 1.\end{cases}$$

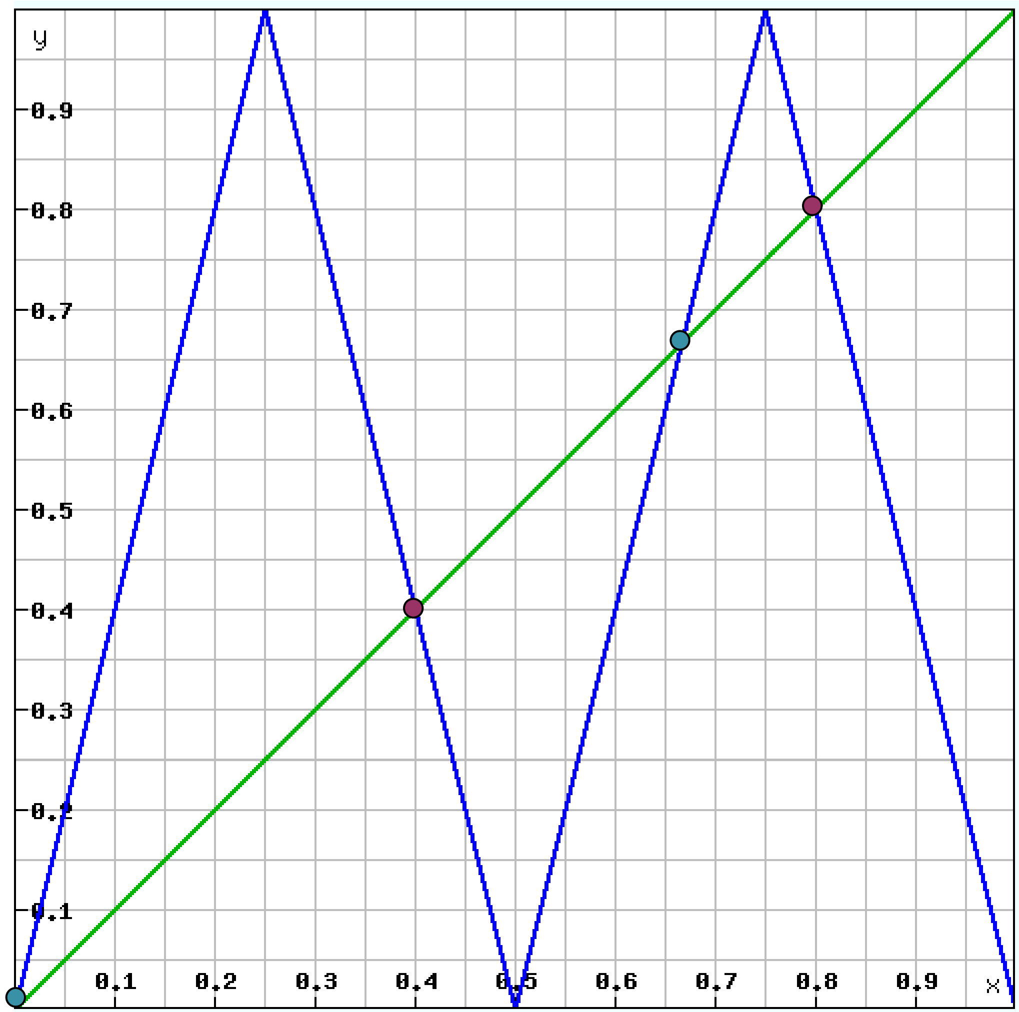
$$4x = x \quad \Rightarrow x = 0$$

$$2 - 4x = x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$4x - 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

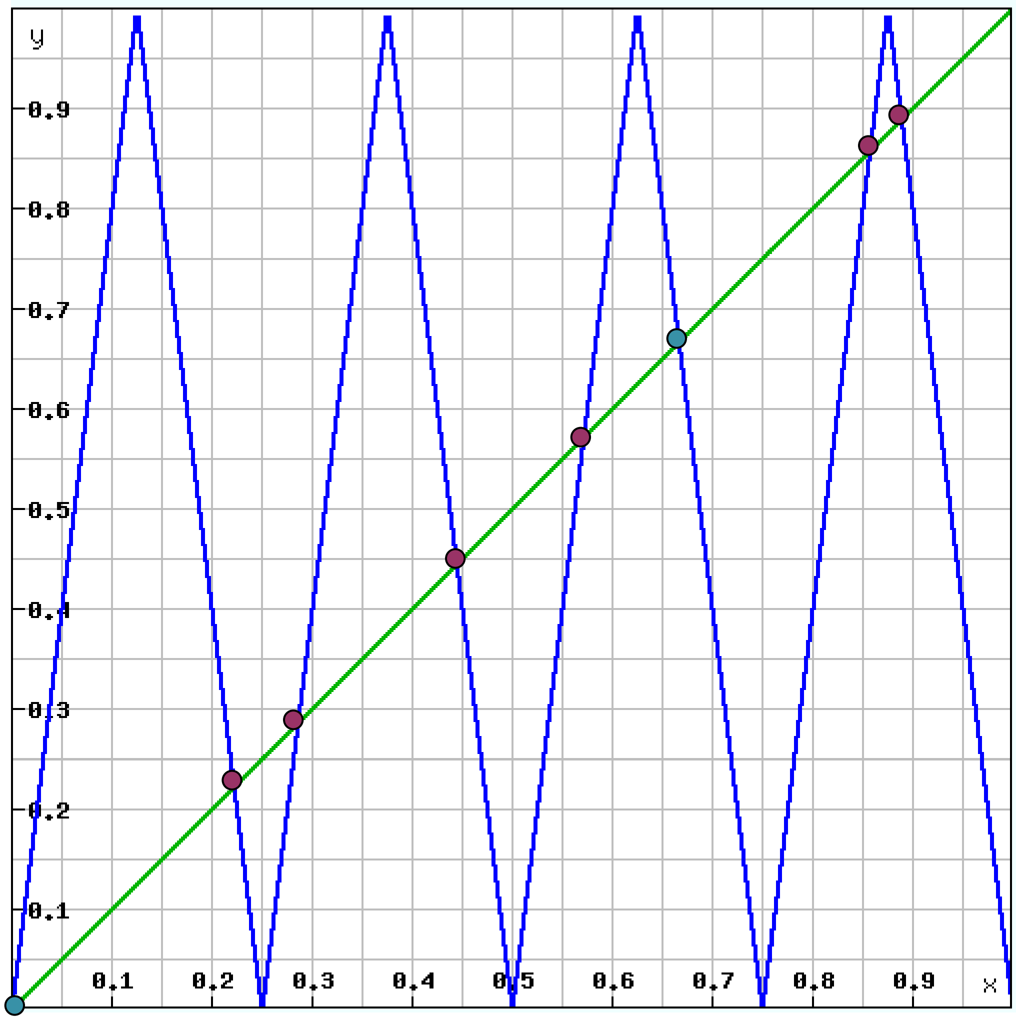
$$4 - 4x = x \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$$



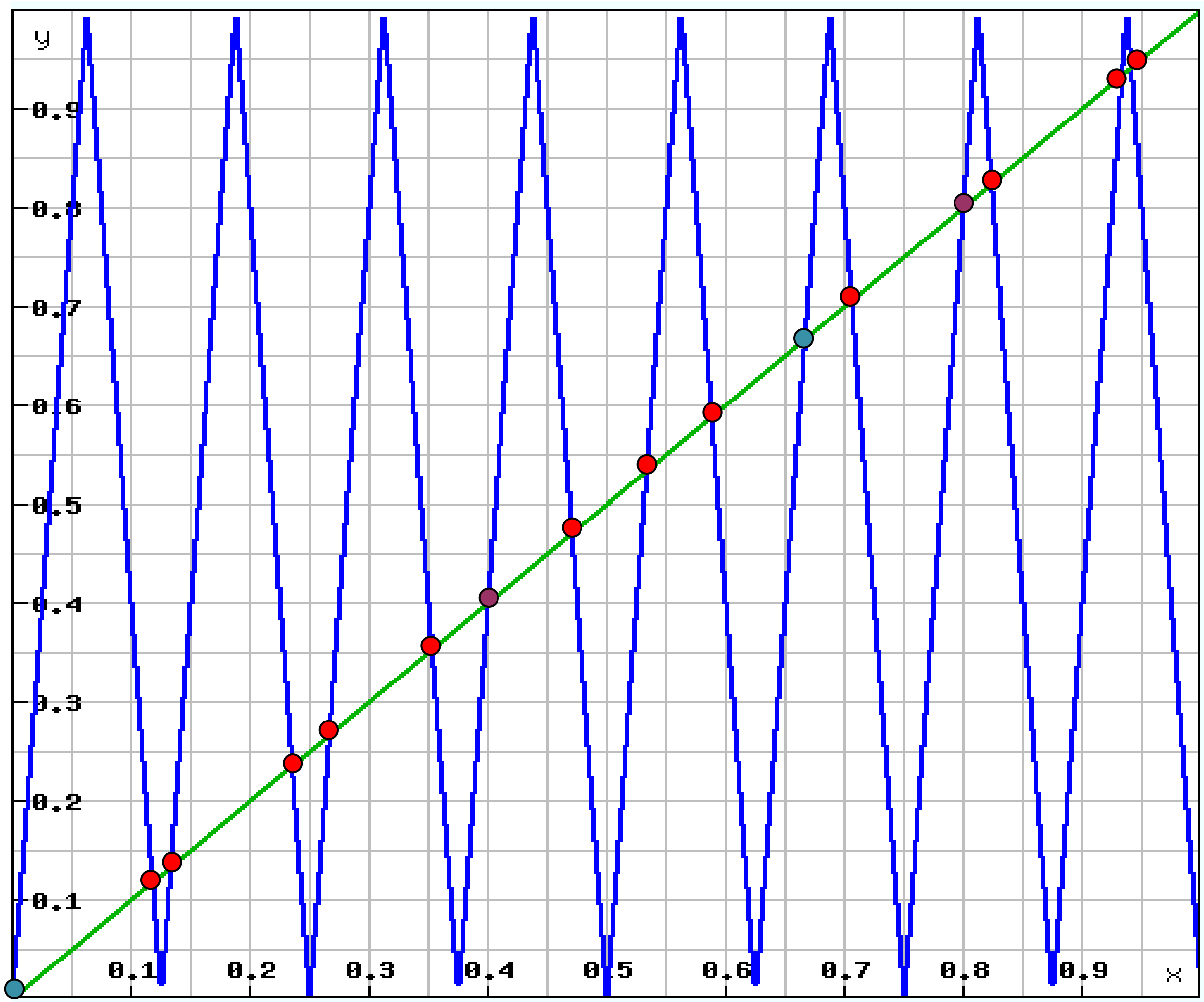
T^2 grafiks

- • - periodiskie punkti ar pirmperiodu 2 (viens cikls)
- • - nekustīgie punkti



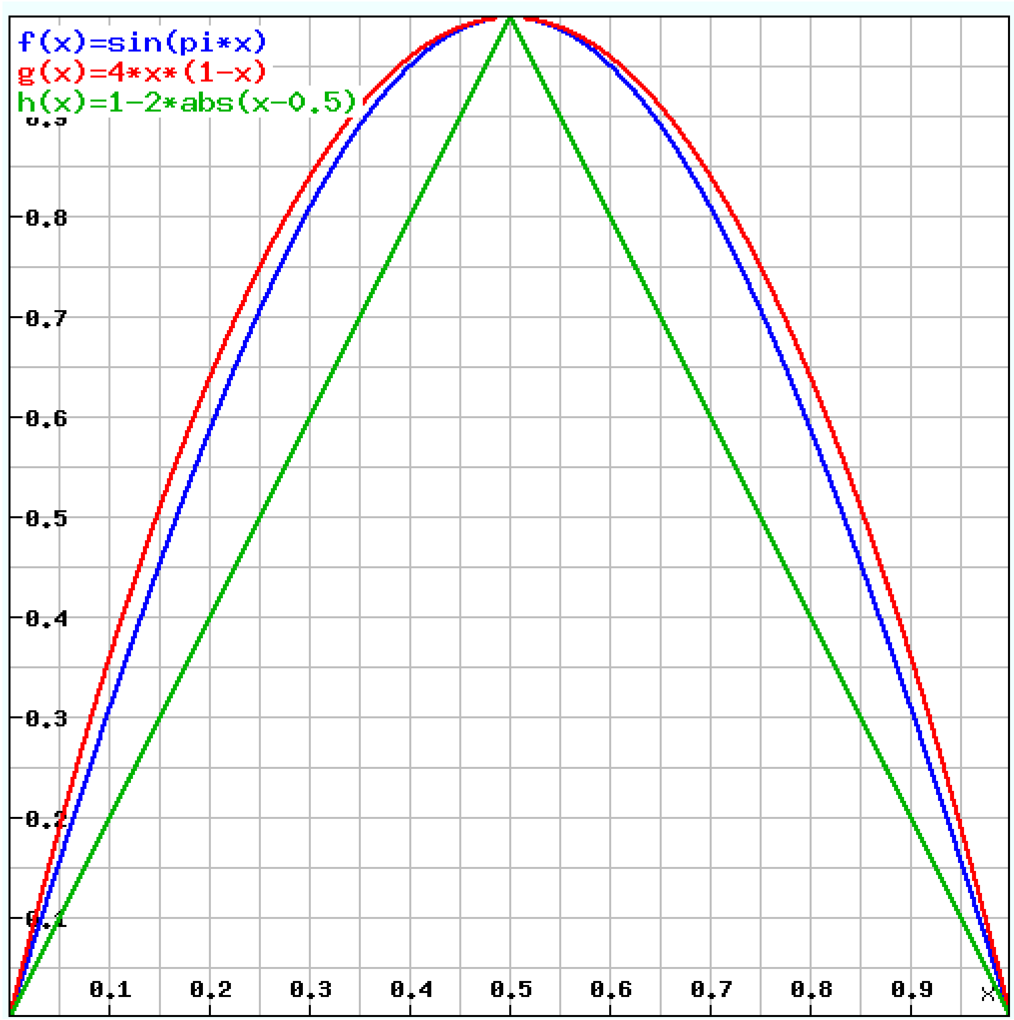
T^3 grafiks

- - periodiskie punkti ar pirmperiodu 3 (divi cikli)
- - nekustīgie punkti



T^4 grafiks

- \- 12 periodiskie punkti ar pirmperiodu 4 (trīs cikli)
- \- 2 periodiskie punkti ar pirmperiodu 2 (viens cikls)
- \- 2 nekustīgie punkti



Visas trīs zīmējumā redzamās funkcijas ir haotiskas intervālā [0;1].

Un tās nav vienīgās!

Paldies par uzmanību!