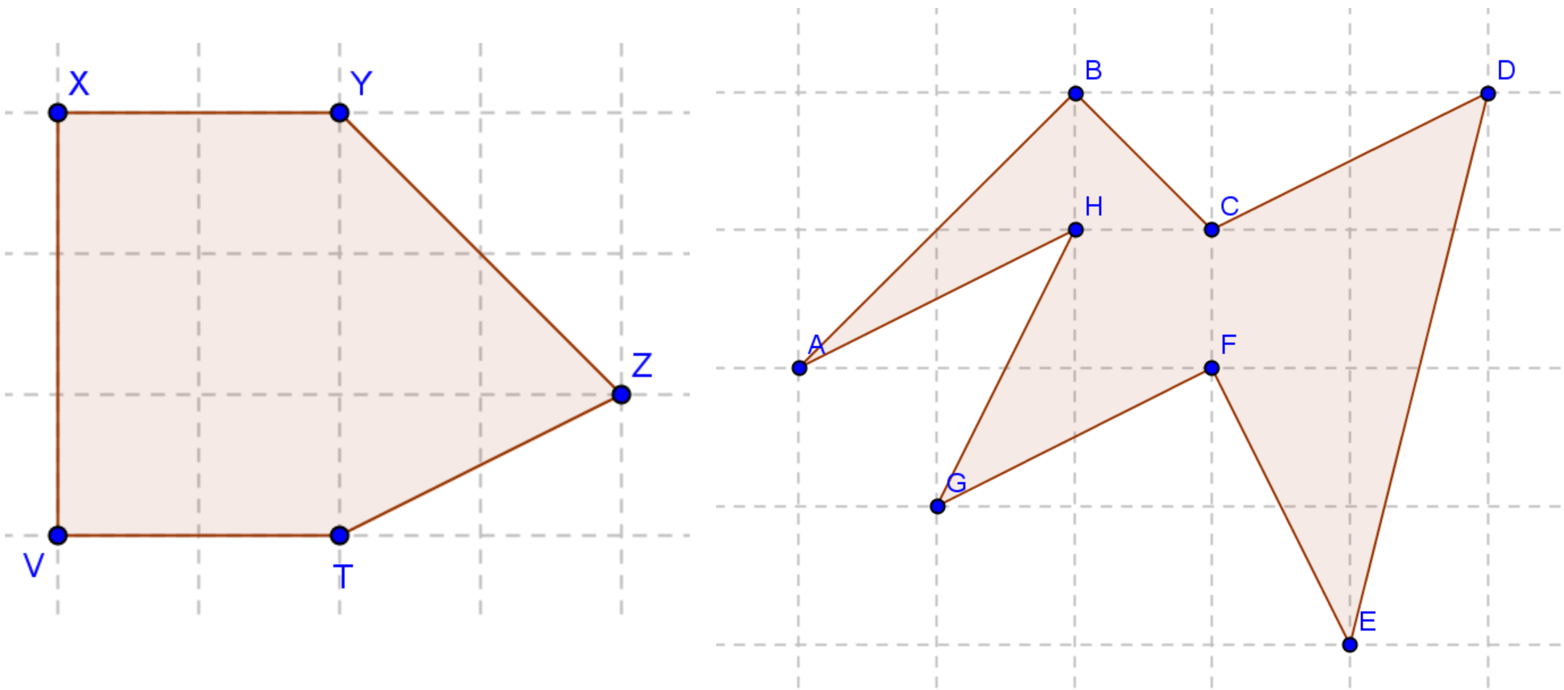
Daudzstūri rūtiņu plaknē

LU FMF docente Dace Kūma

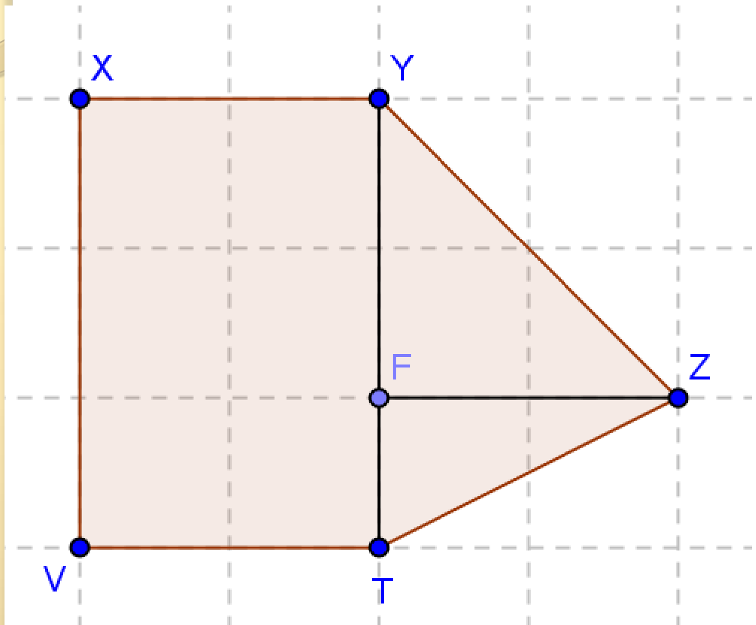
Dots kvadrātisks režģis.

Apskatām daudzstūrus, kuru virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs (režģa punktos).

Aprēķināt doto daudzstūru laukumus.



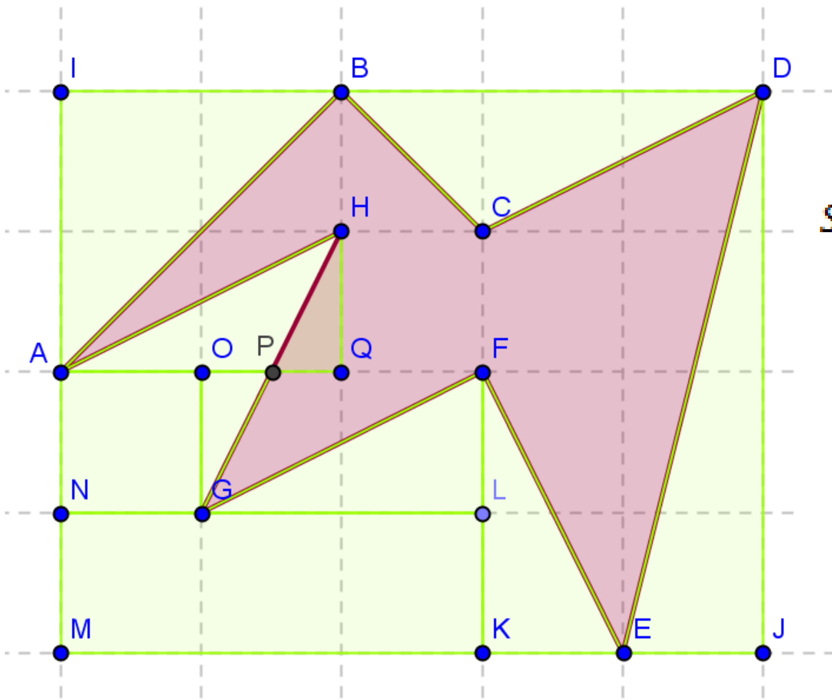
Atbilde:



$$S_{XYZTV} = S_{XYTV} + S_{YZF} + S_{FZT} =$$

$$= 6 + (2 \cdot 2):2 + (2 \cdot 1):2 = 9$$

Atbilde:



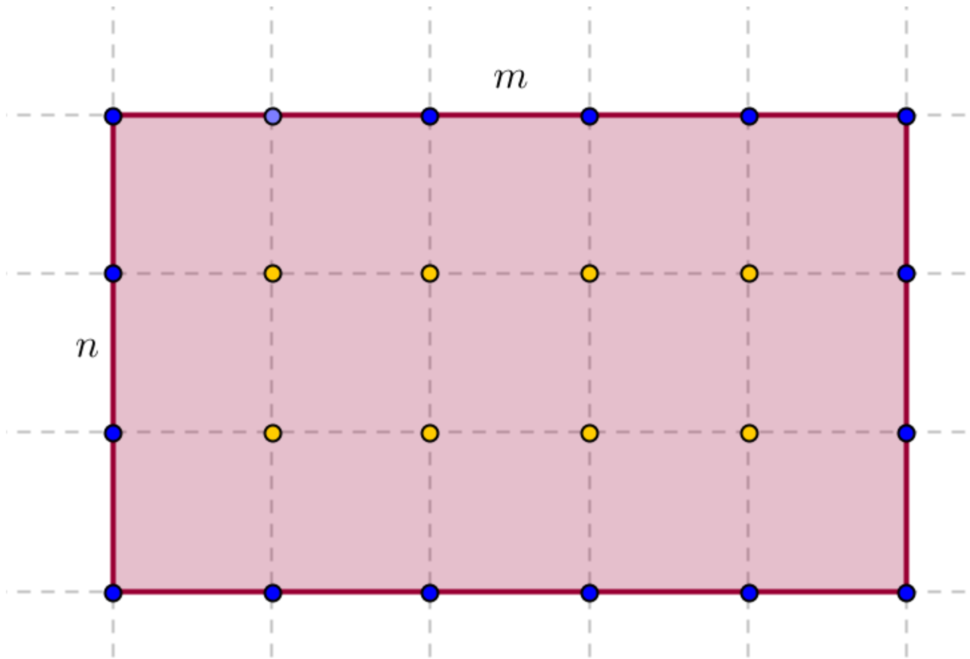
$$S_{ABCDEFGH} = S_{DJMI} - (S_{AIB} + S_{BCD} + S_{DEJ} + S_{EFK} +$$

$$+ S_{NMKL} + S_{FLG} + S_{AOGN} + S_{AHGO}) =$$

$$= 20 - (2 + 1{,}5 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1) = 7{,}5$$

$S_{AHGO} = S_{AHQ}$ jo $\Delta OPG = \Delta QPM$

Taisnstūra laukums



$$S = m \cdot n = (m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 = i + \frac{r}{2} - 1$$

Pīka formula

Ja daudzstūra visas virsotnes atrodas kvadrātiska režģa punktos, uz tā kontūra atrodas ***r*** režģa punkti (ieskaitot virsotnes), bet iekšpusē ***i*** režģa punkti, tad tā laukums ir

$$S = i + \frac{r}{2} - 1$$

Pierādījums

- 1. Taisnstūrim ir spēkā.

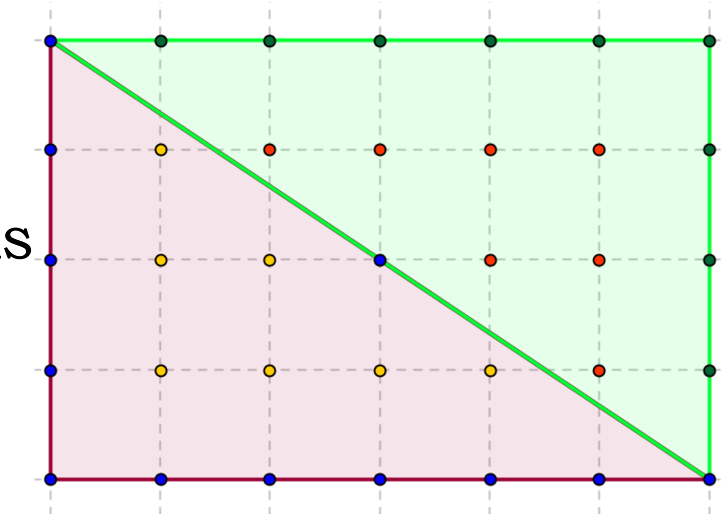
Pierādījums

- 2. Taisnleņķa trijstūrim

$\boldsymbol{i}$ iekšējie režģa punkti

$\boldsymbol{r}$ režģa punkti uz kontūra

$\boldsymbol{d}$ režģa punkti uz hipotenūzas



- Izveido taisnstūri

$\boldsymbol{i_T = 2i + d}$

$\boldsymbol{r_T = 2r - 2d - 2}$

- Pīka f. taisnstūrim:

$\boldsymbol{S_T = (2i + d) + (2r - 2d - 2):2 - 1 = 2i + r - 2}$

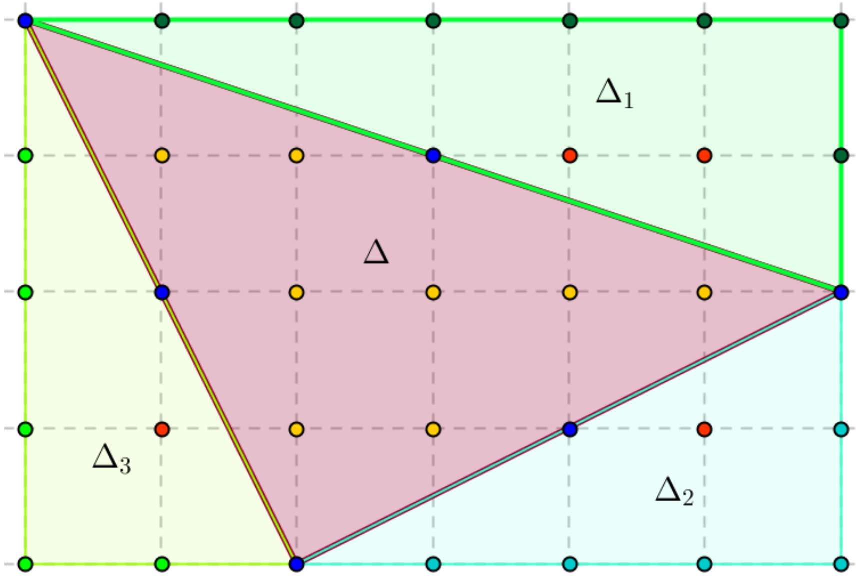
$\boldsymbol{S_\Delta = S_T : 2 = (2i + r - 2) : 2 = i + \tfrac{1}{2}r - 1}$

Pierādījums

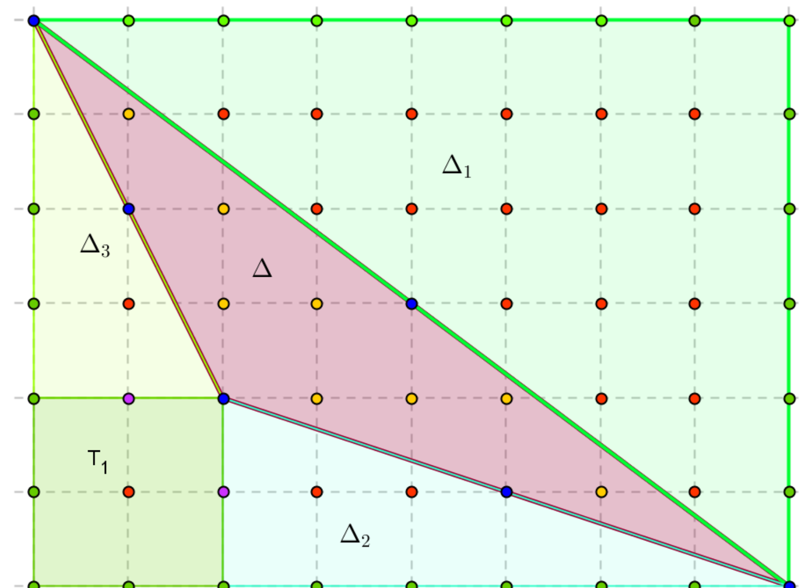
- 3. Patvaļīgam trijstūrim

Apvelk taisnstūri

I

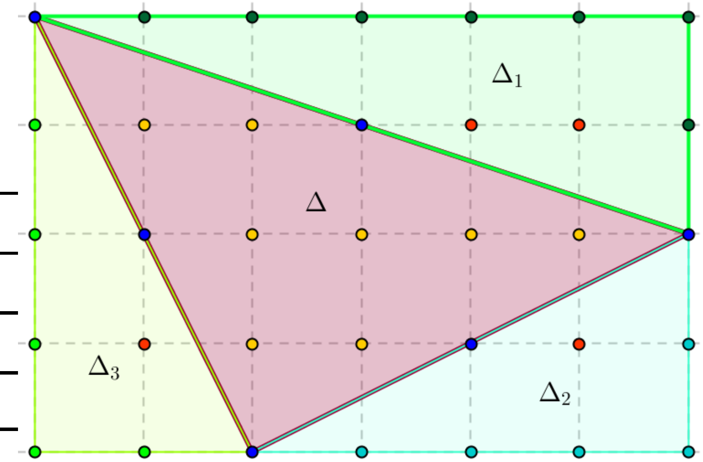


II



Pierādījums

- 3. I gadījums



	Iekšējie	Kontūra
Δ	i	r
Δ_1	i_1	r_1
Δ_2	i_2	r_2
Δ_3	i_3	r_3
T	$i_T = i + i_1 + i_2 + i_3 + r - 3$	$r_T = r_1 + r_2 + r_3 - r$

$$S_T = S_\Delta + S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + S_{\Delta_3}$$

$$(i + i_1 + i_2 + i_3 + r - 3) + \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{2} - 1 =$$

$$= S_\Delta + \left(i_1 + \frac{r_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{r_2}{2} - 1\right) + \left(i_3 + \frac{r_3}{2} - 1\right)$$

$$S_\Delta = i + \frac{r}{2} - 1$$

Pierādījums

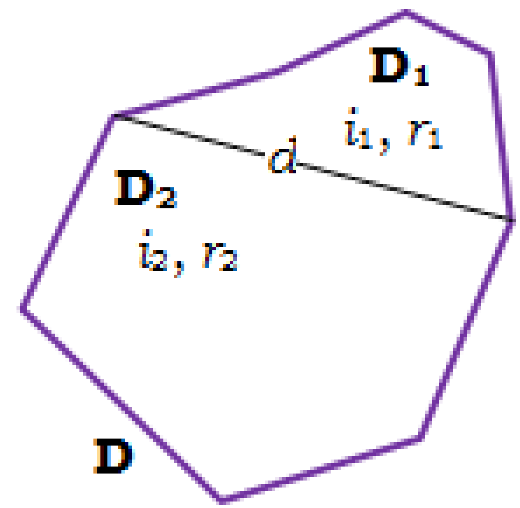
- 4. Patvaļīgam daudzstūrim

Ja, daudzstūri D diagonāle d sadala divos daudzstūros D_1 un D_2 un tiem Pīka formula ir patiesa, tad

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} = \left(i_1 + \frac{r_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{r_2}{2} - 1\right) =$$

$$= i_1 + i_2 + d - \frac{2d}{2} + \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2} - \frac{2}{2} - 1 =$$

$$= (i_1 + i_2 + d) + \frac{r_1 + r_2 - 2d - 2}{2} - 1 = i + \frac{r}{2} - 1$$



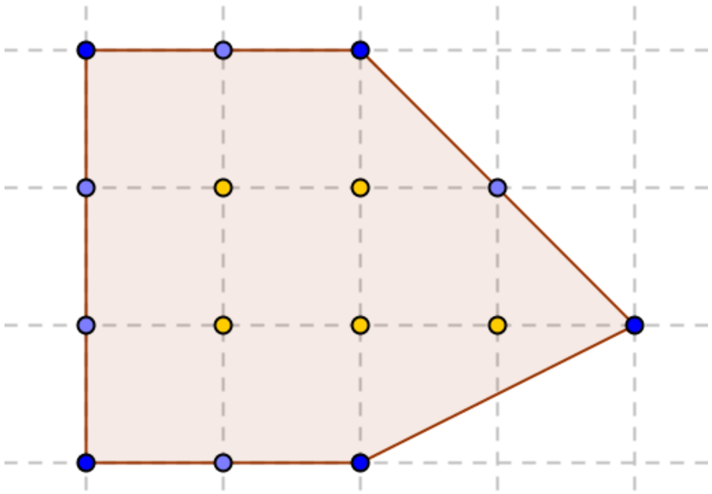
$$i = i_1 + i_2 + d$$

$$r = r_1 + r_2 - 2d - 2$$

Pierādījums

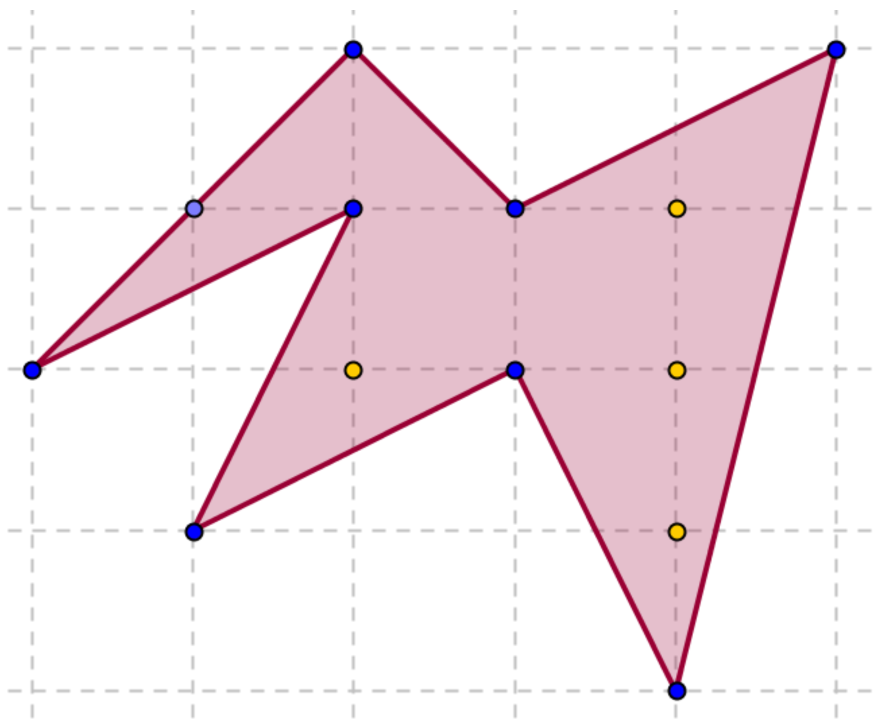
- Tā kā katru daudzstūri ar diagonālēm var sadalīt trijstūros, un trijstūrim Pīka formula ir patiesa, tad Pīka formula ir patiesa jebkuram daudzstūrim, kura virsotnes atrodas režģa punktos.

Pīka formulas lietojumi



i=5
r=10
S=5+10:2–1=9

Pīka formulas lietojumi



i=4
r=9
S=4+9:2–1=7,5

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- $\boldsymbol{n}$ **= 3**

$i \geq 0,\ r \geq 3$

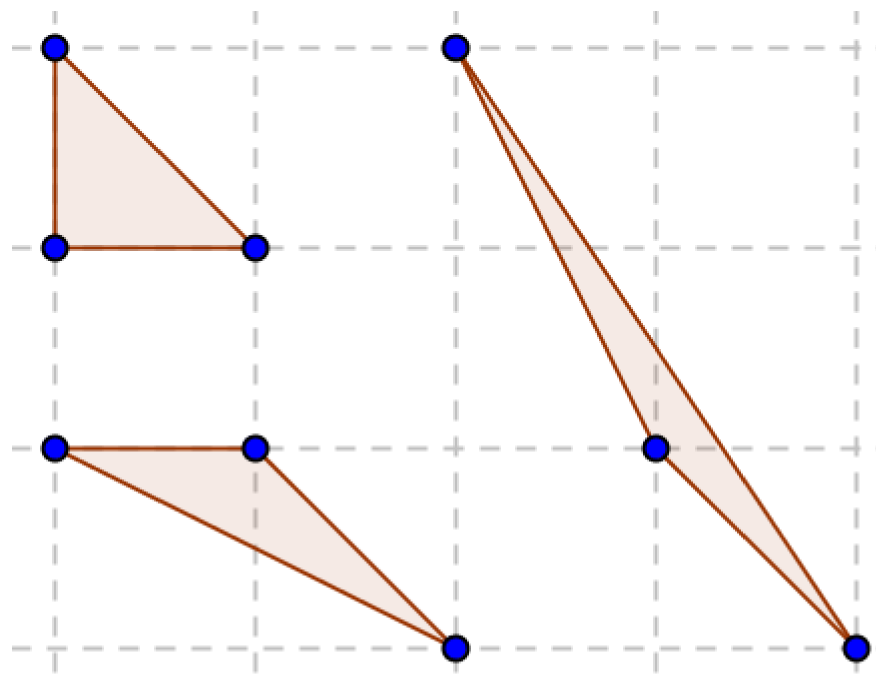
$\Rightarrow S \geq 0+3:2-1=0{,}5$

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- ***n* = 3**

$i \geq 0,\ r \geq 3$

$\Rightarrow S \geq 0+3:2-1=0,5$



Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$

$i \geq 0,\ r \geq 4$

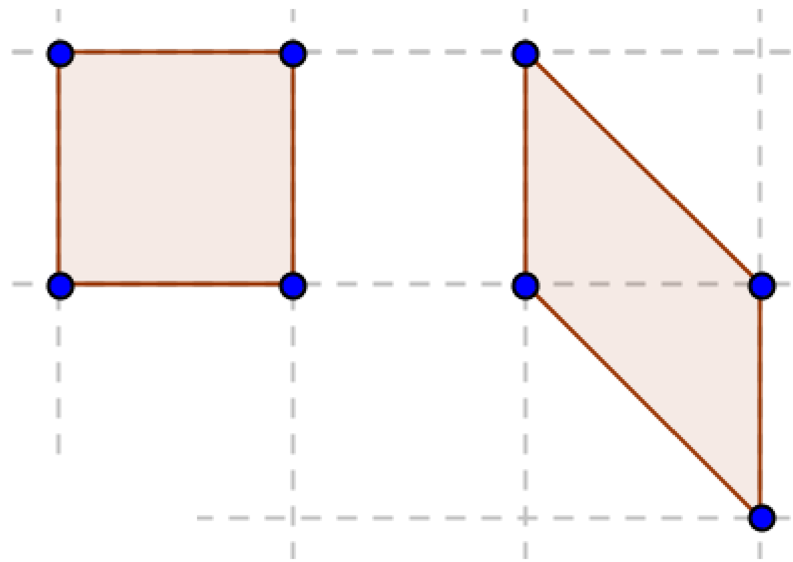
$\Rightarrow S \geq 0+4:2-1=1$

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- $\boldsymbol{n}$ **= 4**

$i \geq 0,\ r \geq 4$

$\Rightarrow S \geq 0+4:2-1=1$



Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- ***n* = 5**

$i \geq 0,\ r \geq 5$

$\Rightarrow S \geq 0+5:2-1=1{,}5$

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$

$\cancel{i \geq 0}$, $r \geq 5$

$\Rightarrow \cancel{S \geq 0+5:2-1=1{,}5}$

Vismaz vienas diagonāles viduspunkts ir režģa punkts, tātad

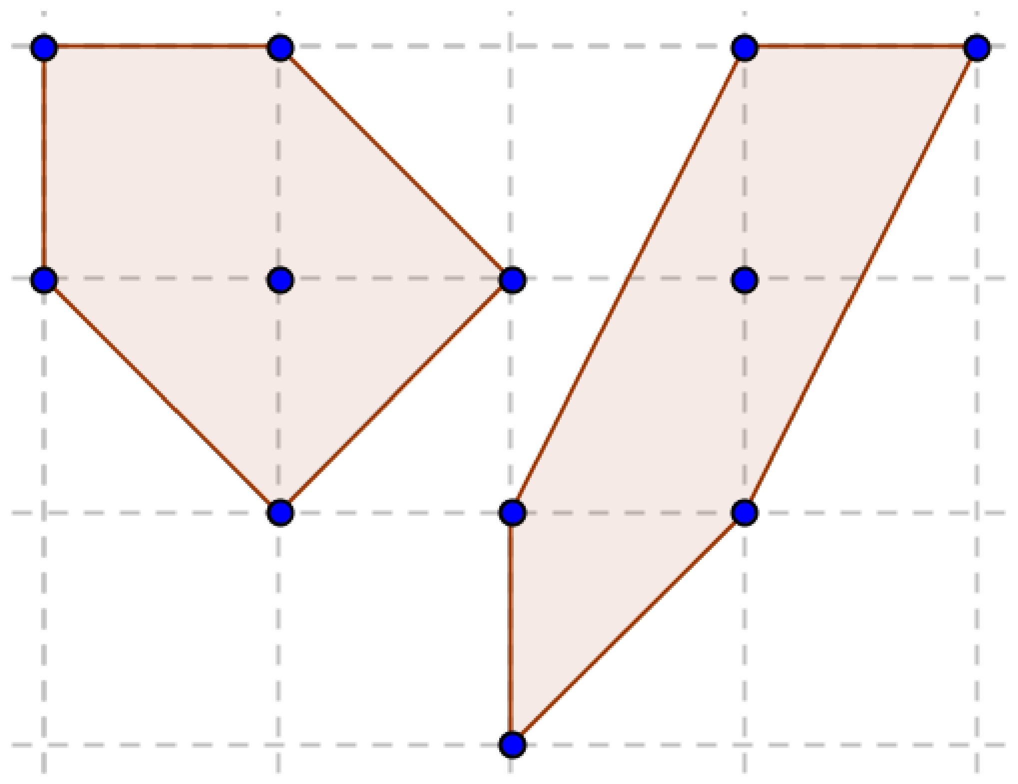
$\boldsymbol{i} \geq \mathbf{1}$ un $\mathbf{S} \geq 1+5:2-1=\mathbf{2{,}5}$

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- ***n* = 5**

$i \geq 1,\ r \geq 5$

$\Rightarrow S \geq 1+5:2-1=2{,}5$



Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- ***n* = 6**

$i \geq 1$, $r \geq 6$

$\Rightarrow S \geq 1+6:2-1=3$

Izliekti daudzstūri ar vismazāko laukumu

- $\boldsymbol{n = 6}$

$i \geq 1,\ r \geq 6$

$\Rightarrow \mathrm{S} \geq 1+6:2-1=3$