MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

Statistiskais eksperiments varbūtību teorijā. Kā vēl var aprēķināt notikumu varbūtības?

LU FMF lektore

Halina Lapiņa

Mazā matemātikas universitāte
5. nodarbība, 2012. gada 31. marts

Sportists un rūpnīca

Sportists – šāvējs ir rezultatīvs!

Trāpa mērķī 92% gadījumu.

Izšauj 100 reižu. Cik reizes trāpīs mērķī?

Rūpnīcā ražo apavus.

1,6% saražoto apavu neatbildīs standartam.

Saražo 1000 apavu pārus. Cik daudzi varētu būt brāķis?

Definīcija

Varbūtību teorija ir matemātikas disciplīna, kura pēta gadījuma rakstura parādībām piemītošās likumsakarības.

VT pirmsākumi: XVII gadsimta vidū.

Blēza Paskāla (1623 - 1662) un Pjēra Fermā (1601 - 1665) sarakste par azartspēlēm.

Determinētās likumsakarības

- praktiski viss, ko apgūstat skolā:

1. Taisna paralēlskaldņa tilpums ar malām a, b un c:

$$V = abc$$

2. Ūdens pie atmosfēras spiediena 760 mm dzīvsudraba stabiņa uzvārās pie 100^{o} C.

Filozofijas virziens: viss dabā noris stingri determinēti – t.s. *deterministi*.

Varbūt viņiem ir taisnība?

Bet:

1. Metam spēļu kauliņu.
2. Braucam ar sabiedrisko transportu.
3. No rīta apskatāmies aiz loga izlikto termometru.
4. Rīgas lidostā stāvam rindā, lai nodotu bagāžu.

Tātad gadījuma rakstura parādības ir!

Vai gadījuma rakstura parādībām pastāv arī kādas likumsakarības?

Uzdevums

1. Uzrakstiet 3 – 4 rindiņas teksta.
2. No sava teksta noskaitiet pirmos

10 x 10 burtus, novelciet svītriņu.

3. Saskaitiet, cik patskaņu ir jūsu tekstā starp pirmajiem 100 burtiem.

[0,417; 0,460]

Tas bija statistiska rakstura eksperiments ar valodu.

Ieguvām patskaņu parādīšanās biežumu: $\frac{\mu}{n}$

Statistiskā stabilitāte

Kur ir lietota burtu parādīšanās tekstā statistiskā stabilitāte?

1.Grāmatu iespiešana

2. Kriptogrāfija

3. Morzes ābece

Varbūtību teorija pēta tikai parādības:

1. kuras var realizēt neierobežotu skaitu reižu nemainīgos apstākļos;

2. kurām piemīt noteikta statistiskā stabilitāte.

Varbūtību teorija nenodarbojas ar unikālu parādību pētīšanu.

Vai pēc skolas beigšanas šeit klātesošais Andris iestāsies vai neiestāsies izvēlētajā LU fakultātē?

Saistībā ar katru statistisko eksperimentu tiek fiksēts matemātisks modelis, kurš sastāv no 3 objektiem un kuru sauc par **varbūtību telpu:**

$$[\Omega, F, P]$$

Ω - <u>elementāro notikumu kopa</u>

Elementi ir attiecīgā statistiskā eksperimenta visi iespējamie rezultāti.

Metot kauliņu: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

F – <u>notikumu kopa</u>

A – uzmest pāru skaitli

B – uzmest nepāru skaitli

C – uzmest skaitli, kurš lielāks par 4

P – <u>varbūtību mērs</u>

P – varbūtību mērs

Definīcija

Par **varbūtību mēru** *P* sauc attēlojumu jeb funkciju *P: F* $\rightarrow R$,

kura apmierina sekojošas trīs īpašības (t.s., **varbūtību teorijas aksiomas)**:

1) $\forall A \in F: \quad P(A) \geq 0;$

2) $P(\Omega) = 1;$

3) Ja $A \cap B = \emptyset$, tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B);$

Saskaitīšanas aksioma

$P(A)$ - **notikuma *A* varbūtība**

Kā aprēķināt kāda notikuma varbūtību?

1. **Klasiskais varbūtību noteikšanas paņēmiens:**

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

- n – kopas Ω elementu skaits
- m – labvēlīgo notikumu skaits

Jābūt*:*

1. Ω *- galīga kopa*
2. *Visiem elementārajiem notikumiem ir vienādas iespējas realizēties*

Jāpārbauda VT aksiomas!

1) $\forall A: \quad P(A) = \dfrac{m}{n} \geq 0,$ jo skaitļi *m* un n izsaka elementāro notikumu skaitu;

2) $P(\Omega) = \dfrac{n}{n} = 1,$ jo šajā gadījumā *m* = *n;*

3) $P(A \cup B) = \dfrac{m+k}{n} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{k}{n} = P(A) + P(B),$

ja vien $A \cap B = \varnothing.$

Piemēri

1. Kāda ir varbūtība, ka izmetot spēļu kauliņu vienu reizi, uzkritīs skaitlis, kurš nav mazāks par 5?

A – notikums, ka izkritušais skaitlis nav mazāks par 5.

$n = ?$

$n = 6$

$m = ?$

$m = 2$

$P(A) = ?$

P(A) = 2/5

2. Aprēķināt varbūtību, ka, piedaloties ar vienu kartīti spēlē LATLOTO 5 no 35, pareizi būs atminēti

a) 5 skaitļi; b) 4 skaitļi; c) 3 skaitļi.

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n;$$

$$n = C_{35}^5 = \frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 324632;$$

a) $$m = 1;\ P(A) = \frac{1}{324632} = 0{,}00000308;$$

b) $$m = C_5^4\cdot C_{30}^1 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 30 = 150;\ P(B) = \frac{150}{324632} \approx 0{,}000462;$$

c) $$m = C_5^3\cdot C_{30}^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{30\cdot 29}{1\cdot 2} = 4350;\ P(B) = \frac{4350}{324632} \approx 0{,}0134;$$

Statistiskais varbūtību noteikšanas paņēmiens

Pieņemsim, ka kādu statistisko eksperimentu varam atkārtot <u>vienādos apstākļos neierobežotu skaitu reižu</u>.

Apzīmējam ar $\mu_n(A)$ notikuma A realizēšanās reižu skaitu n eksperimentos.

Apskatām daļu: $\dfrac{\mu_n(A)}{n}$

Varbūtību teorijā to sauc par <u>biežumu</u>.

$$P(A) \approx \frac{\mu_n(A)}{n};$$

Metodes priekšrocība: Šim paņēmienam piemīt vislielākais universālums – praksē to varam pielietot visplašākajā situāciju lokā.

Varam sastapties ar situācijām, kurās šis paņēmiens lietojams nebūs.

Piemēram:

1) iespēja lidmašīnai avarēt – mēs nevaram veikt daudzus eksperimentus un uzskaitīt, cik reižu lidmašīna ir avarējusi;

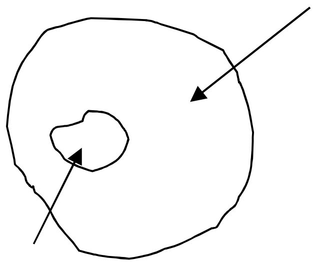
2) izpētīt, pēc cik kritieniem rūpnīcā izgatavotā krūzīte saplīsīs. Protams, ja mūsu rīcībā ir pietiekoši liela krūzīšu partija, kas izgatavotas identiskos apstākļos, varam mēģināt lietot statistisko varbūtību noteikšanas paņēmienu interesējošās varbūtības aprēķināšanai.

Ģeometriskais varbūtību noteikšanas paņēmiens

<u>Atsakāmies</u> no prasības, ka elementāro notikumu kopa Ω ir galīga.

Paliek spēkā, ka notikumiem <u>ir vienādas iespējas realizēties.</u>

Elementāro notikumu kopai piekārtojam plaknes punktu kopu jeb figūru : $\Omega = G$



Tad, ja notikumam *A* atbilst g , tad

$$P(A) = \frac{L(g)}{L(G)}$$

Jāpārbauda aksiomas:

1) $\forall A: \quad P(A) = \frac{L(g)}{L(G)} \geq 0,$ jo laukums ir pozitīvs lielums

2) $P(\Omega) = \frac{L(G)}{L(G)} = 1,$ jo notikumam Ω atbilst

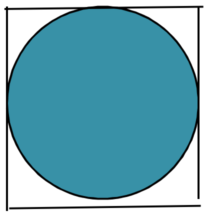
apgabals G

3) Ja $A \cap B =$tad ∅, $L(g_1 \cup g_2) = L(g_1) + L(g_2)$

$$P(A \cup B) = \frac{L(g_1 \cup g_2)}{L(G)} = \frac{L(g_1)}{L(G)} + \frac{L(g_2)}{L(G)} = P(A) + P(B)$$

Piemēri

1. Dots kvadrāts, kuras malas garums ir 2 vienības. Kvadrātā ievilkta riņķa līnija ar rādiusu 1. Uz labu laimi metam uz kvadrātu punktu. Kāda ir varbūtība, ka punkts atradīsies arī riņķī vai uz tās līnijas?



$$L(G) = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$L(g) = \pi \cdot 1^2 = \pi;$$

$$P(A) = \frac{L(g)}{L(G)} = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3}{4};$$

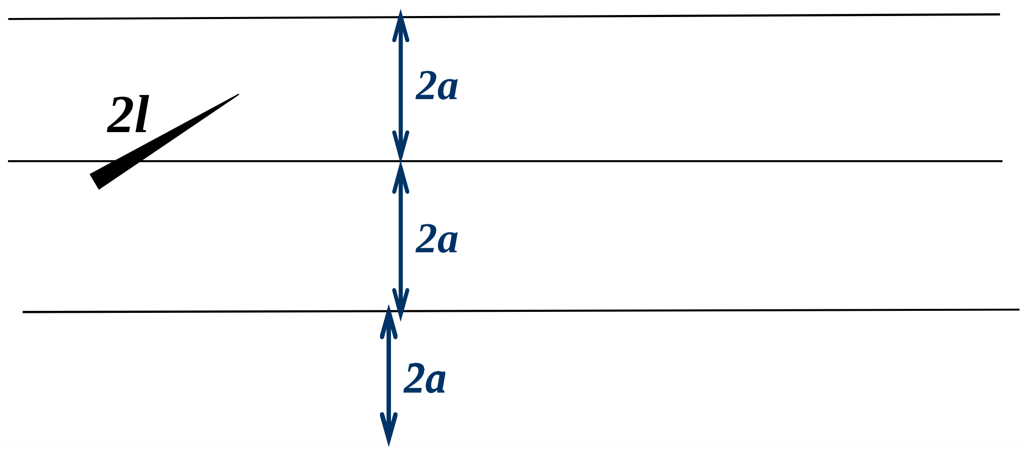
2. Bifona uzdevums par adatas mešanu

[*BIFONS Žoržs Luī Leklerks (7. 9. 1707. – 16. 4. 1788.) – franču dabaszinātnieks, Parīzes ZA loceklis*]

Sagrafējam doto plakni ar savstarpēji paralēlām taisnēm tā, lai attālums starp divām blakus esošajām taisnēm būtu $2a.$

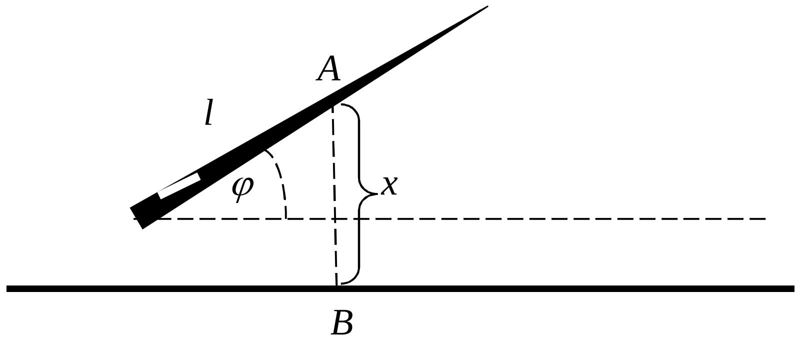
Ņemam adatu, kuras garums ir $2l\ (2a \geq 2l)$ **un metam to uz plakni.**

Noteikt varbūtību, ar kādu adatai būs kopīgs punkts ar kādu no taisnēm (adata taisni krusto vai arī pilnībā atrodas uz tās).



Nav svarīgi, ar kuru no taisnēm adatai būs kopīgs punkts, tāpēc var aplūkot tikai to joslu, kurā nonācis adatas viduspunkts.

Adatas stāvokli attiecībā pret joslas ierobežojošo taisni uzdod ar divu lielumu palīdzību:



$AB = x$ - adatas viduspunkta attālums līdz tuvākajai taisnei;

φ - leņķis, kuru adata veido ar vienu no diviem uz taisnes izvēlētiem virzieniem.

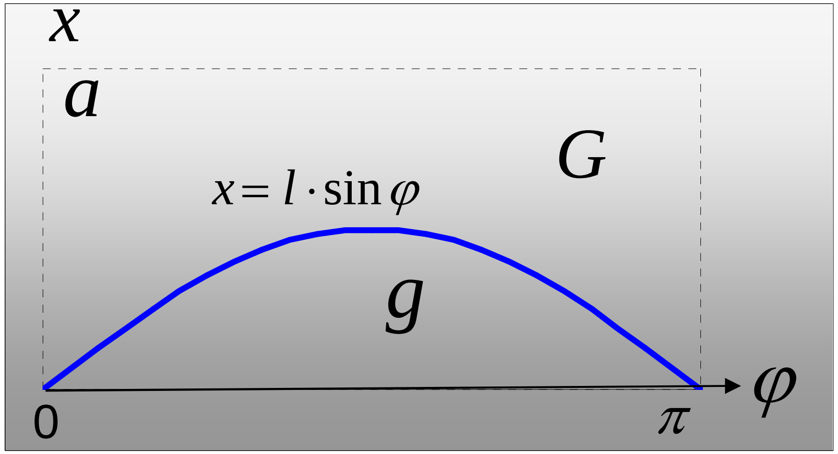
$$\Omega = \{(\varphi, x) \mid 0 \le x \le a, 0 \le \varphi < \pi\}$$

Ievedam Dekarta koordinātu sistēmu:

uz vertikālās koordinātu ass x vērtības, uz horizontālās - φ vērtības.

Apskatām taisnleņķa trijstūri, apzīmējot kateti pret leņķi φ ar d. $d = l \cdot \sin\varphi$

Ja $x \le d$ jeb $x \le l \cdot \sin\varphi$, tad adatai ar taisni ir kopīgs punkts. $A = \{(\varphi, x) \in \Omega \mid x \le l \cdot \sin\varphi\}$



$L(G) = a \cdot \pi$

$$L(g) = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = -l \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l;$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a};$$

3. Uzdevums par satikšanos

Divi jaunieši norunāja satikties noteiktā vietā laikā no plkst. 12.00 līdz 13.00. Katrs no viņiem, atnākot uz satikšanos, gaida otru 20 minūtes un pēc tam iet projām. Aprēķināt varbūtību, ka abi satiksies, ja katrs no jauniešiem ierašanās laiku izvēlas uz labu laimi (norādītās stundas ietvaros).

x - pirmā jaunieša ierašanās laiks

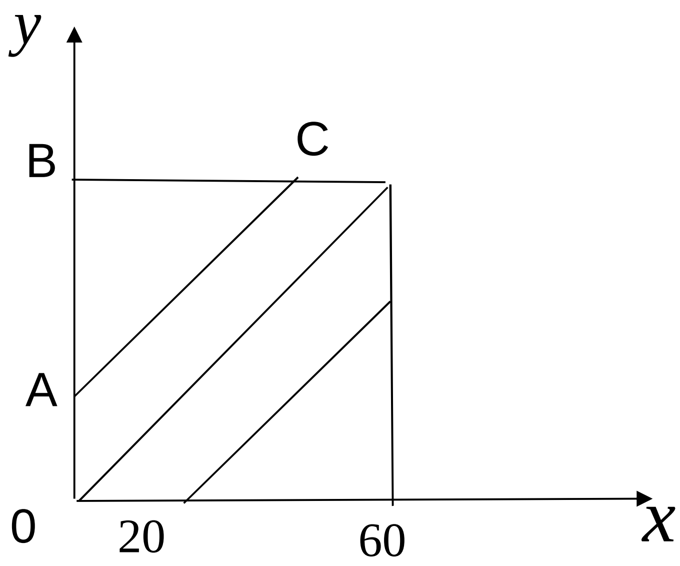
y - otrā jaunieša ierašanās laiks

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 60, 0 \le y < 60\};$$

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid y \le x \le y + 20,\ x \le y \le x + 20\};$$

Aprēķināšam laukumus!

Redzam, ka apgabals G ir kvadrāts:



$$L(G) = 60 \cdot 60 = 3600;$$

$$L_{ABC} = \frac{40 \cdot 40}{2} = 800;$$

$$2L_{ABC} = 1600;$$

$$L(g) = 3600 - 1600 = 2000;$$

$$P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9};$$

Paldies, ka paklausījāties un sadarbojāties!