

MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE



LATVIJAS
UNIVERSITĀTE
ANNO 1919



Fazer



FIZMATI.LV



Paradoksāli uzdevumi

LU maģistrants
Raitis Ozols

Ievads

Šajā nodarbībā apskatīsim dažādus paradoksālus uzdevumus un uzdevumus, kas vingrina domāšanu.

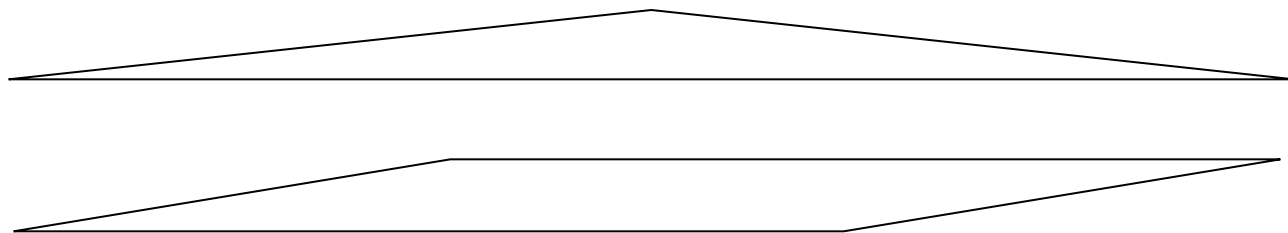
1. Figūras ar garām malām un mazu laukumu

1. Noskaidrot, vai eksistē tāds trīsstūris, kura malas ir garākas nekā 1 metrs, bet laukums ir mazāks nekā 1 kvadrātcentimetrs.

2. Vai eksistē četrstūris, kura katra mala un katra diagonāle ir garāka nekā 1 metrs, bet laukums ir mazāks nekā 1 kvadrātcentimetrs?

Atrisinājums

Jā, tāds trīsstūris un četrstūris eksistē, sk. zīm. Tie ir pietiekoši izstiepti, bet ar mazu laukumu.



Piezīme. Uz šādiem jautājumiem reizēm nespēj pareizi atbildēt pieauguši cilvēki, tajā skaitā skolotāji.

2. Skaitļi

1. Vai eksistē tādi trīs skaitļi, kurus pareizinot ar 2, iegūst tos pašus skaitļus, tikai varbūt citā secībā?

2. Divu skaitļu summa un reizinājums ir veseli skaitļi. Vai paši skaitļi noteikti arī ir veseli?

Atrisinājumi

1. Jā, šie skaitļi ir 0, 0 un 0.
2. Ne obligāti. Skaitļi var būt, piemēram, $2 + \sqrt{3}$ un $2 - \sqrt{3}$. Šo skaitļu summa ir 4, reizinājums ir 1, tomēr tie nav veseli skaitļi.

3. Vāvere kokā

Pieņemsim, ka mūsu priekšā ir koks, kurā ir vāvere. Mēs vēlamies apskatīt vāveri no vairākām pusēm (ne obligāti no visām. Vai tas izdosies, ja sāksim iet apkārt kokam?

Atrisinājums

Nē, ne obligāti. Ejot apkārt kokam, arī vāvere var nobīties un sākt skriet apkārt kokam. Tā rezultātā vāveri varam arī neredzēt. Nav pamata pieņemt, ka vāvere noteikti būs nekustīga.

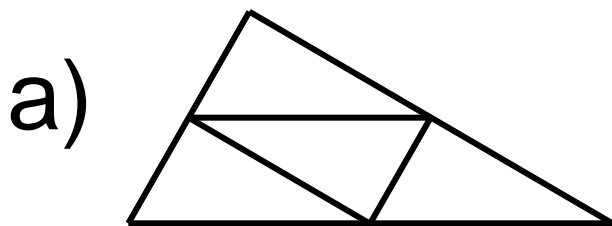
4. Trīsstūru sagriešana

Vai eksistē trīsstūris, ko var sagriezt

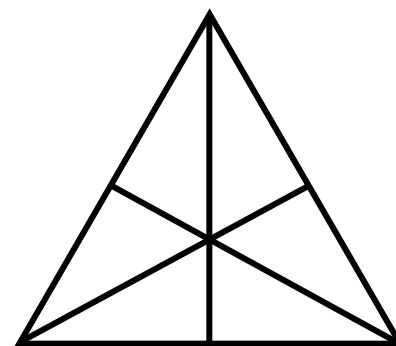
- a) 4 vienādos trīsstūros?
- b) 6 vienādos trīsstūros?
- c) 5 vienādos trīsstūros?

Atrisinājums

Jā, eksistē, piemēram:

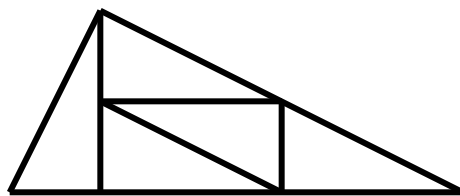


b) regulārs trīsstūris



Atrisinājums

c) taisnleņķa trīsstūris ar katešu attiecību 2:1, kas sagriezts mazākos taisnleņķa trīsstūros ar katešu attiecību 2:1



4. Diska ripināšana

Disks ar diametru 3 ir nekustīgs. Ap to apripina apkārt mazāku disku, kura diametrs ir 1. Cik reižu mazais disks apgriezīsies pats ap savu asi ripošanas laikā?

Atrisinājums

Acīmredzot, mazā diska apkārtmērs ir 3 reizes mazāks par lielā diska apkārtmēru.

Tāpēc, ja mazais disks ripotu pa nogriezni, tad tas apgrieztos 3 reizes. Bet tā kā tas ripo pa riņķa līniju, tad tas veiks vienu papildus apgriezienu. Kopā būs 4 apgriezieni.

Piezīme. Teikto var pārbaudīt ar diskiem, kas izgriezti, piemēram, no kartona.

Ieteicams apgriezianu skaitu izpētīt arī vienai monētai, kas ripo ap tādu pašu otru monētu.

5. Monēta un caurums

Dota papīra lapa ar apaļu caurumu 1 lata monētas lielumā. Vai caur to var izvilkēt cauri 2 latu monētu, neieplēšot papīru? Papīru drīkst locīt.

Atrisinājums

Jā, tas ir iespējams, sk. attēlu:

Coin Through A Smaller Hole

Tags: Big, Coin Tricks, Small, Hole, Through, Paper, Magic, Think, 3D, Parties, Bets, Win, Science, Of, Impossible, How



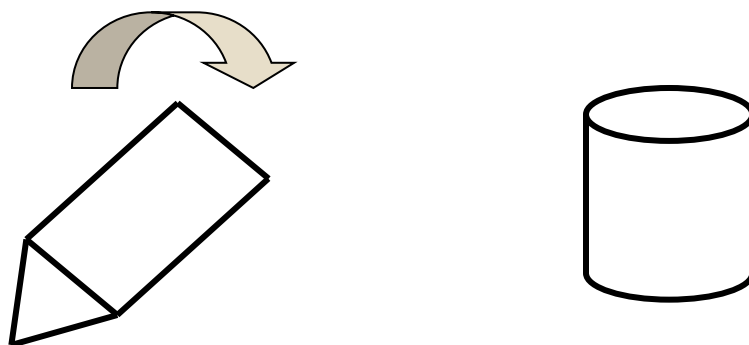
http://www.metacafe.com/watch/661540/coin_through_a_smaller_hole/

6. Metamie kauliņi

1. Parastajam kubveida metamajam kauliņam ir 6 skaldnes. Izdomāt tādu metamu kauliņu, ar kuru var uzvest kādu no 3 skaitļiem.

Atrisinājums

1. Par “trīsskaldņu” metamo kauliņu varam izvēlēties noteiktus daudzskaldņus vai cilindru.



6. Metamie kauliņi

2. Apskatām zīmējumā parādītos trīsskaldņu metamos kauliņus. Salīdzinot katru ar katru, noskaidrot katra kauliņu pāra “stiprāko” kauliņu (tādu, uz kura biežāk uzkrīt lielāks skaitlis).

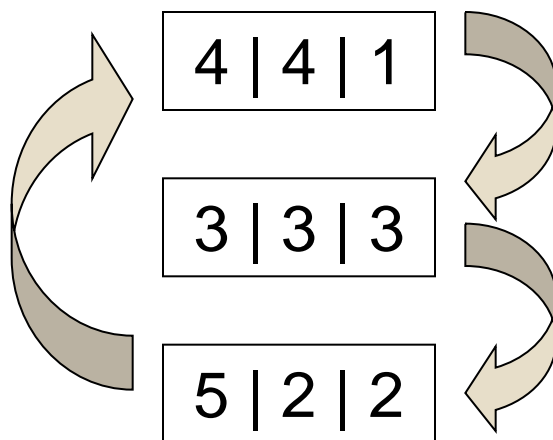
4		4		1
---	--	---	--	---

3		3		3
---	--	---	--	---

5		2		2
---	--	---	--	---

Atrisinājums

2. Veicot aprēķinus vai noteiktus spriedumus, var pārliccināties, ka uzrādītie kauliņi ir cikliski, kas var likties neiespējami:



7. Trīs skrējēju paradokss

Pieņemsim, ka A, B un C ir trīs skrējēji, kuri sacenšas 100 m skrējienos. Katrā skrējienā kāds no viņiem iegūst 1. vietu, kāds 2. vietu un kāds 3. vietu. Vai viņi var noskriet vairākus skrējienus tā, ka A ir biežāk noskrējis B, nekā B A, līdzīgi B ir biežāk noskrējis C nekā C B un C ir noskrējis A, nekā A C?

Atrisinājums

Jā, var. Pietiek ar 3 skrējieniem,
sk. tabulu.

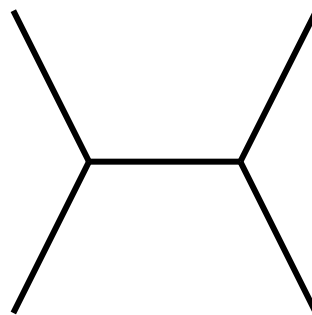
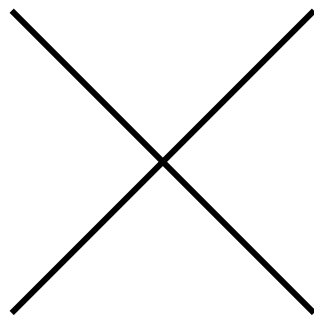
	A	B	C
1. skrējiena	I	II	III
2. skrējiena	III	I	II
3. skrējiena	II	III	I

8. Kvadrāta virsotņu savienošana

Doti četri punkti, kas atrodas kvadrāta virsotnēs. Savienot tos ar līniju, pa kuru no jebkura punkta var nokļūt uz jebkuru tā, lai līnijas kopējais garums būtu pēc iespējas mazāks.

Atrisinājums

Var novilkt kvadrāta diagonāles, tomēr ir vēl īsāka līnija, skatīt zīmējumu pa labi.



9. Naglu līdzsvars

Horizontālā virsmā vertikāli iedzīta nagla. Vai uz tās var novietot, piemēram, 10 tādas pašas naglas tā, lai tās nekristu nost, nepieskartos virsmai un atrastos līdzsvara stāvoklī?

Atrisinājums

Jā, tas ir iespējams, sk. attēlu, kur parādīts, kā uzlikt 6 naglas.



<http://www.youtube.com/watch?v=tCgu5PK5JFs>

Izmantotie avoti:

E. Riekstiņš, A. Andžāns “Atrisini pats!”, Rīga “Zvaigzne”, 1984.

http://www.metacafe.com/watch/661540/coin_through_a_smaller_hole/

<http://www.youtube.com/watch?v=tCgu5PK5JFs>



Paldies par uzmanību!