

MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE



LATVIJAS
UNIVERSITĀTE
ANNO 1919



Fazer



FIZMAT.LV

Matemātiskā modelēšana

LU FMF pētniece, doktorante
Sanda Blomkalna
LU FMF vadošais pētnieks
Uldis Strautiņš

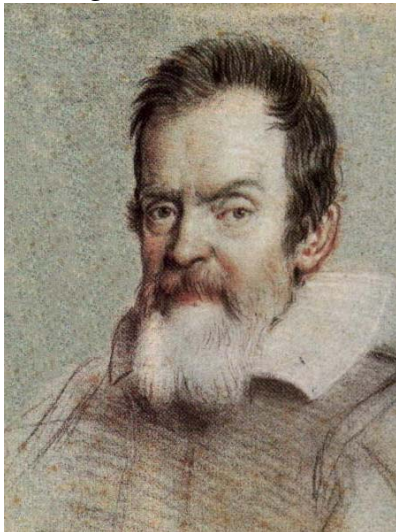
Tehnomatemātika

Uldis Strautiņš

Kāda ir matemātikas loma dabaszinātnēs un tehnikā?

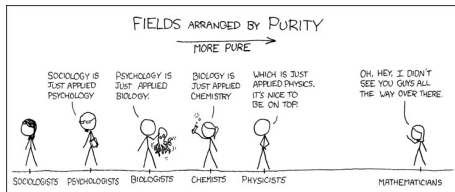
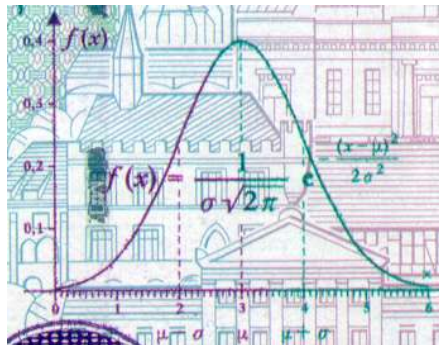
Galileo Galilejs:

Dabas grāmata ir uzrakstīta matemātikas valodā.



Kārlis Frīdrihs Gaus:

Matemātika ir zinātņu karaliene.

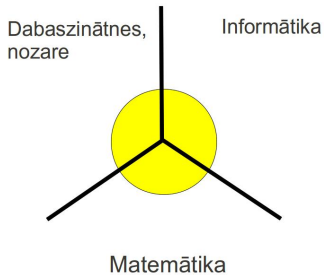


Helmut Noincerts:

Matemātika ir tehnoloģija.

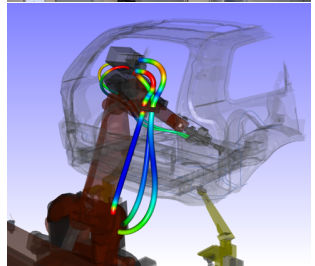


Tehnomatemātika



Tehnomatemātika

- 1 Pasūtītājs formulē uzdevumu
- 2 Līguma slēgšana
- 3 Tēmas apgūšana, plānošana
- 4 Modelēšana
- 5 Programmēšana
- 6 Simulācijas
- 7 Rezultātu interpretācija
- 8 Prezentācija, pārdošana
- 9 Projekta turpināšana?
- 10 Zinātniska publikācija?



Modelēšana

Modelēšana vienmēr sākas ar jautājumu

Vai zirgs svētdien ir gatavs piedalīties sacensībās?

Mazā matemātikas universitātē
4. nodarbība, 2012. gada 3. marts



Sfērisks zirgs vakuumā

Pieņēmumi.



Sfērisks zirgs



Modelis

- Diametrs 1m, masa 1 kg, lādiņš 1C, jauda 745,7 W
- Homogēns
- Pārvietojas vakuumā, pretestības spēku nav
- Absolūti elastīgs
- Kustas taisnā virzienā, bez paātrinājuma
- Ķermenis absolūti melns
- Elpo ideālu gāzi
- Zviedz vienā, stingri noteiktā frekvencē
- ...

Sfērisks zirgs vakuumā

Secinājumi būs tikai tik labi, kāds būs jūsu modelis.

Šajā gadījumā sfēriskais zirgs vakuumā var sasniegt vēlamo ātrumu dažādos veidos.

- Elektriski uzlādēto zirgu ievietojiet piemērotā elektriskajā laukā
- Uzlieciet uz ratiņiem un laidiet lejā pa slīpu plakni
- Izmainiet atskaites sistēmu...

Modeļa priekšrocības:

- Precīzi definēts
- Vienkārši vienādojumi
- Var iegūt precīzus atrisinājumus
- Ja pieņēmumi izpildās - ideāls

Trūkumi:

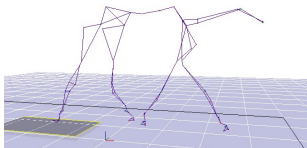
- Dabā un tehnikā pieņēmumi neizpildās
- Tāpēc secinājumi nav pielietojami praksē
- Klients (industrija) nemaksā

Reāls zirgs

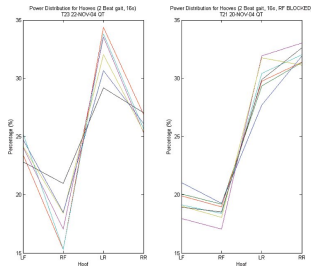
Zirgs ir tik sarežģīts, ka tīra modelēšana ir bezcerīga. Tāpēc jāstrādā ar eksperimentāli iegūtiem datiem



Mērījumi



Biometrisks modelis



Datu apstrāde un interpretācija
(slodzes sadalījums pa kājām
rikšu gaitā)

Tipiski piemēri

Elektriskā tējkanna



Mainīgie:

- $U(t)$ - elektriskais spriegums
- $T(t)$ - ūdens temperatūra
- $S(t)$ - sildelementa temperatūra

Tiešā problēma: dots spriegums $U(t)$, aprēķināt ūdens temperatūru $T(t)$

Inversā problēma: Dota ūdens temperatūra $T(t)$, aprēķināt tējkannas parametrus

Elektriskā tējkanna

Fakti no fizikas:

- Sildelementa temperatūras izmaiņa ir proporcionāla jaudai, kas izdalās sildelementā, mīnus siltuma daudzumam, ko sildelements atdod ūdenim:

$$[S(t+1) - S(t)] \propto [P(t) - Q(t)]$$

- Jauda, kas izdalās sildelementā, ir proporcionāla sprieguma kvadrātam:

$$P(t) \propto U(t)^2$$

- Siltuma daudzums, ko sildelements atdod ūdenim, ir proporcionāls temperatūru starpībai:

$$Q(t) \propto [S(t) - T(t)]$$

- Ūdens temperatūras pieaugums ir proporcionāls saņemtajam siltuma daudzumam:

$$[T(t+1) - T(t)] \propto Q(t)$$

Elektriskā tējkanna

Modelis:

$$S(t+1) - S(t) = aU(t)^2 - b[S(t) - T(t)],$$

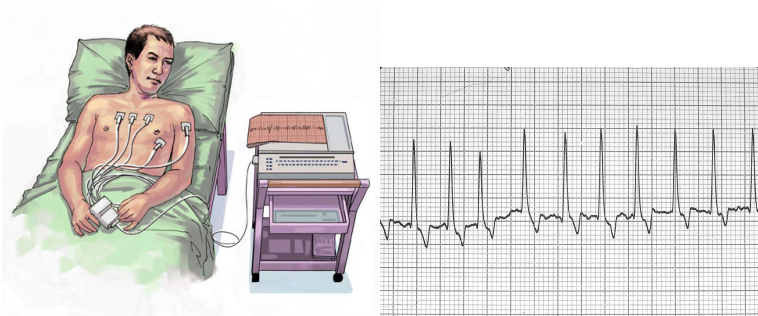
$$T(t+1) - T(t) = c[S(t) - T(t)]$$

Ja zināmi parametri a, b, c , pievadītais spriegums kā funkcija no laika $U(t)$, kā arī sildelementa un ūdens temperatūras *sākuma momentā* $S(0), T(0)$, tad varam aprēķināt $S(t), T(t)$ katram naturālam t .

Inversā problēma. Ko darīt, ja ūdens temperatūra ir zināma, bet jānosaka nezināmās parametru a, b, c un sildelementa temperatūras $S(t)$ vērtības?

Šī problēma prasa plašākas matemātikas zināšanas (parametru identifikācija, mazāko kvadrātu metode)

Lasīt elektrokardiogrammu

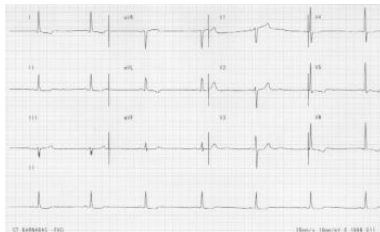


Pieredzējušam ārstam-kardiologam elektrokardiogramma (EKG) var pateikt par pacienta sirdi ļoti daudz.

Diemžēl ārsts - speciālists nav pieejams vienmēr.

Vai ir iespējams analizēt EKG reālā laikā automātiski un briesmu gadījumā sacelt trauksmi?

Lasīt elektrokardiogrammu



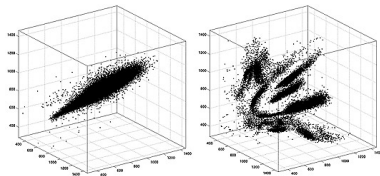
RR intervāls - ilgums starp diviem sirdspukstiem. To var mērīt un apzīmēt ar b_t , $t = 1, 2, 3, 4, \dots, N$

Konstruējam punktus:

- $P_1 = (b_1, b_2, b_3)$,
- $P_2 = (b_2, b_3, b_4)$,
- ...
- $P_{N-2} = (b_{N-2}, b_{N-1}, b_N)$.

Lasīt elektrokardiogrammu

Tagad attēlosim punktus P_1, \dots, P_{N-2} trīs dimensiju telpā. Šādu punktu mākonī sauc par Lorenca grafiku.



Pa kreisi: vesela cilvēka EKG Lorenca grafiks

Pa labi: EKG Lorenca grafiks pacientam ar noteiktu sirds saslimšanu

Īsi pirms infarkta pacienta sirdsdarbība kļūst ļoti regulāra:

$b_1 \approx b_2 \approx \dots$ Punktu mākonis saspiežas gandrīz vienā punktā.

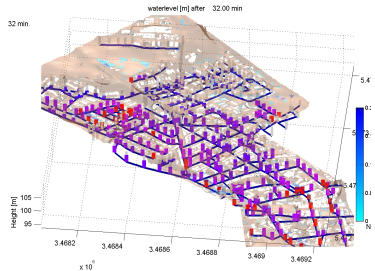
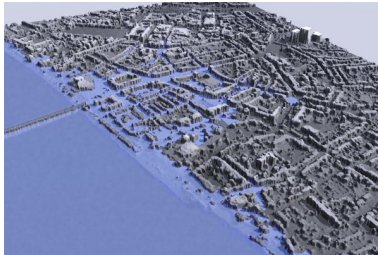
Trauksme, steidzami nepieciešama palīdzība!

Šeit tehnomatemātikas piensums: klasificēt Lorenca grafikus, izstrādāt automātiskas atpazīšanas algoritmus.

Drošība pret plūdiem

Kādiem dabas untumiem ir gatava pilsētas kanalizācijas sistēma? Te ir iespējama tikai virtuāla simulācija.

Dati: topogrāfija, kanalizācijas sistēma, upes, ūdenskrātuves, cilvēku uzvedība (futbola spēles utt)...



Pa kreisi Bonnas modelis (Reina), pa labi Švecingenes kanalizācijas sistēmas modelis

Dimensiju analīze

Atombumbas testi



Energija, kas izdalās sprādzienā: valsts noslēpums

Atombumbas testi

Lielbritānijas valdība Dž. I. Teiloram uzdeva noskaidrot jaudu, kas izdalījās *Trinity* eksperimentā.

Sprādziena enerģija izdalās ļoti nelielā tilpumā, tāpēc triecienvilnis atmosfērā ir gandrīz sfēriskas formas.

Lai noskaidrotu, kā triecienviļņa rādiuss ir atkarīgs no citiem parametriem, Teilors izmantoja *dimensiju analīzi*.



Sers Džefrijs Ingremss Teilors

Dimensiju analīze

Visa māksla ir saprast, kādi parametri sakarībā ieiet!

- Energija E ar mērvienību $[E] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$
- Gaisa blīvums ρ ar mērvienību $[\rho] = \text{kg} / \text{m}^3$
- Laiks t ar mērvienību $[t] = \text{s}$
- Triecienviļņa pozīcija $R(t)$ ar mērvienību $[R] = \text{m}$

Hipotēze: $R(t) = cE^x \rho^y t^z$

Mērvienībām ir jāsakrīt: $m = (\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2)^x \cdot (\text{kg} / \text{m}^3)^y \cdot \text{s}^z$.

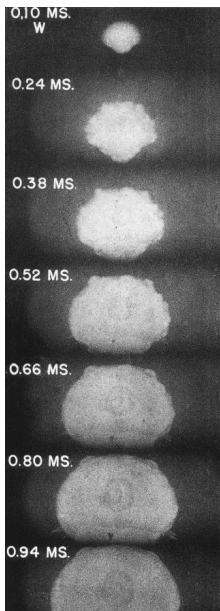
$$\begin{cases} 1 = 2x - 3y & (\text{pie } \text{m}) \\ 0 = x + y & (\text{pie } \text{kg}) \\ 0 = -2x + z & (\text{pie } \text{s}) \end{cases}$$

Atrisinājums $x = 1/5$, $y = -1/5$, $z = 2/5$

Tātad, formula ir

$$R(t) = cE^{1/5} \rho^{-1/5} t^{2/5}$$

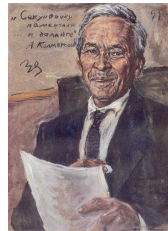
Sprādziena video



Novērtējot konstanti c pēc citiem sprādzieniem ar daudz mazākām enerģijām $c \approx 1$ un izmantojot 1947. gadā publicēta video kadrus, Teiloram izdevās novērtēt sprādzienā izdalīto enerģiju ar labu precizitāti ($\pm 30\%$)

Dimensiju analīze

Ar dimensiju analīzes palīdzību zinātnes vēsturē ir atklātas vairākas nozīmīgas sakarības. Slavenākā ir *Kolmogorova 5/3 likums*, kas parāda, kā turbulentās plūsmās enerģija sadalās pa dažāda izmēra virpuļiem.



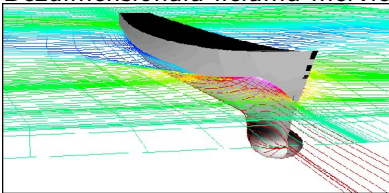
Tomēr pareizas mērvienības iegūšana vēl negarantē, ka formula ir pareiza!!!

Skaitļi - bezdimensionāli lielumi

Bekingema teorēma apgalvo:

- Ja sistēmu apraksta N fizikāli lielumi,
- kuriem ir K neatkarīgas mērvienības,
- tad, kombinējot fizikālos lielumus, var iegūt skaitā $N - K$ bezdimensionālus lielumus - skaitļus.

Bezdimensionālu lielumu mērvienība ir 1.



Līdzības teorija pēta, kādiem skaitļiem ir jāsakrīt, lai divas (dažāda izmēra) sistēmas uzvestos līdzīgi.

Piemēram, divi kuģi ar vienādu Frūdes skaitli, divas plūsmas ap cilindru ar vienādu Reynolds skaitli

Paldies par uzmanību!



Jaunā *Fraunhofer ITWM* institūta ēka tehnomatētikas dzimtajā pilsētā Kaiserslauternā