MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

NMS

Fazer

ludo
SPĒĻU BODE

FIZMATI.LV

Brauna kustība matemātiskajā statistikā

LU FMF docents

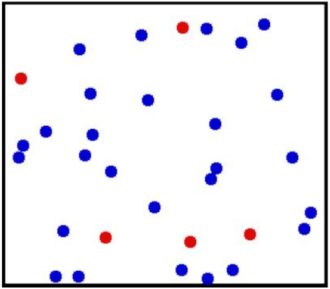
Jānis Valeinis

LU studente

Lidija Januševa

Saturs

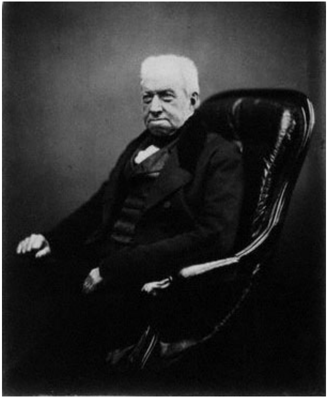
Brauna kustība fizikā



Brauna kustība ir gāzē vai šķidrumā izsētu vieglu daļiņu (putekļu, augu sporu, dūmu daļiņu) haotiska kustība. Brauna kustību izraisa vielas atomu vai jonu siltumkustība.

Roberts Brauns
(1773. – 1858.)

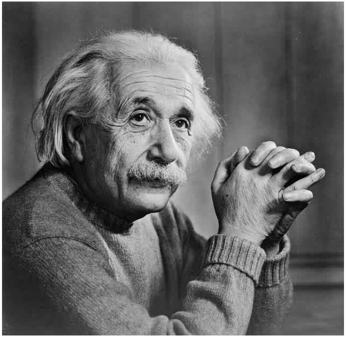
- Skotu botāniķis, kurš pirmais novēroja vielas daļiņu siltumkustību šķidrumā.
- 1827. gadā mikroskopā novēroja staipekņu sporas ūdenī un ievēroja, ka sporas ūdenī nemitīgi un neregulāri pārvietojas.
- Šī kustība tika nosaukta Brauna vārdā, lai arī viņš neizveidoja tās teoriju.



Vēsture

Alberts Einšteins
(1879. – 1955.)

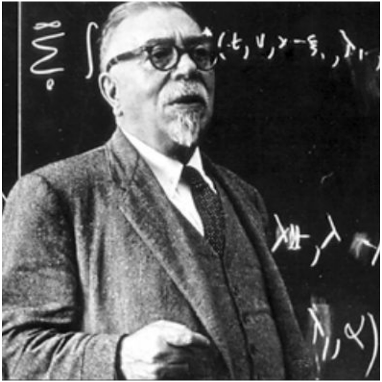
1905. gadā Alberts Einšteins izveidoja Brauna kustības molekulāri kinētisko teoriju.



Vēsture

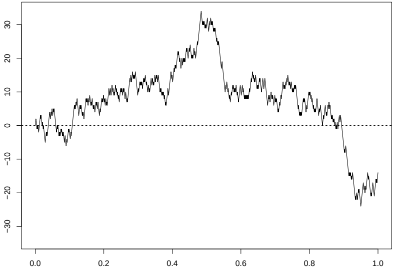
Norberts Vīners (1894. – 1964.)

- 1923. gadā Norberts Vīners izveidoja Brauna kustības precīzu matemātisku aprakstu.
- Brauna kustību sauc arī par Vīnera procesu.



Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



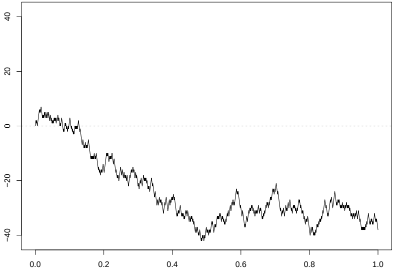
Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



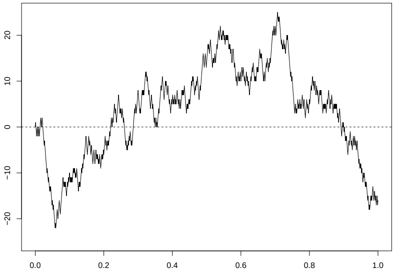
Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



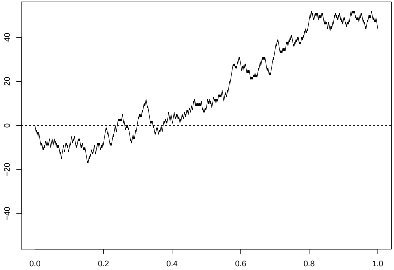
Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



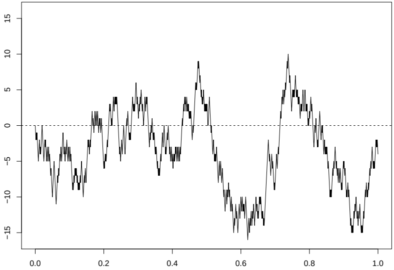
Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 
ω_2 - notikums, ka uzkrīt 
ω_3 - notikums, ka uzkrīt 
ω_4 - notikums, ka uzkrīt 
ω_5 - notikums, ka uzkrīt 
ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Mērķis: Rēķināt varbūtības.

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 
ω_2 - notikums, ka uzkrīt 
ω_3 - notikums, ka uzkrīt 
ω_4 - notikums, ka uzkrīt 
ω_5 - notikums, ka uzkrīt 
ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Mērķis: Rēķināt varbūtības.

$\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{6}}$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Mērķis: Rēķināt varbūtības.

$\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{6}}$

$\boxed{P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = \frac{2}{3}}$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Mērķis: Rēķināt varbūtības.

$\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{6}}$

$\boxed{P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = \frac{2}{3}}$

Problēma: Grūti pierakstīt notikumus, kuri mūs interesē.

Gadījuma lielums

Gadījuma lielums X ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i., $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

Gadījuma lielums

Gadījuma lielums X ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i., $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

Gadījuma lielums

Gadījuma lielums X ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i., $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt	
ω_2 - notikums, ka uzkrīt	
ω_3 - notikums, ka uzkrīt	
ω_4 - notikums, ka uzkrīt	
ω_5 - notikums, ka uzkrīt	
ω_6 - notikums, ka uzkrīt	

$$\begin{cases} X(\omega_1) = 1 \\ X(\omega_2) = 2 \\ X(\omega_3) = 3 \\ X(\omega_4) = 4 \\ X(\omega_5) = 5 \\ X(\omega_6) = 6 \end{cases}$$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

ω_i						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{6}}$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

ω_i						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{6}}$

- $P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

ω_i						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $\boxed{P(X=2)=\frac{1}{6}}$
- $P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = P(X<5) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $\boxed{P(X>4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..

Gadījuma lielums: 2. piemērs

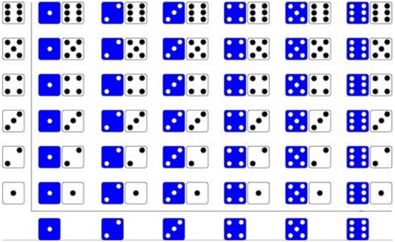
Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..
- Vispārīgā gadījumā $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$, kur $i, j = 1, 2, ..., 6$.

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

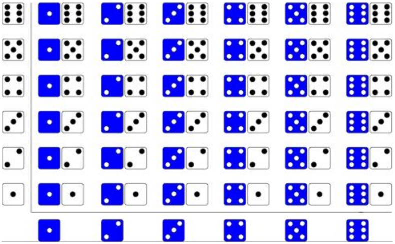
- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..
- Vispārīgā gadījumā $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$, kur $i, j = 1, 2, ..., 6$.



Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..
- Vispārīgā gadījumā $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$, kur $i, j = 1, 2, ..., 6$.

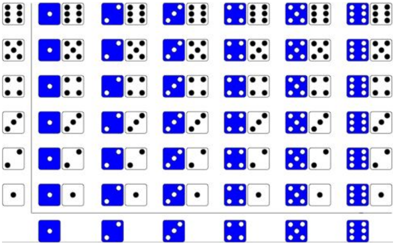


$$\boxed{P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$$

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..
- Vispārīgā gadījumā $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$, kur $i, j = 1, 2, ..., 6$.



$$\boxed{P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$$

$$\boxed{P(X > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$$

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

$\boxed{X(\omega_1) = 0}$

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

$\boxed{X(\omega_1) = 0}$

$\boxed{X(\omega_2) = 1}$

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

$\boxed{X(\omega_1) = 0}$

$\boxed{X(\omega_2) = 1}$

$\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

$\boxed{X(\omega_1) = 0}$ $\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$

$\boxed{X(\omega_2) = 1}$ $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}}$

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

Mērķis: Prognozēt gadījuma lieluma uzvedību.

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

Mērķis: Prognozēt gadījuma lieluma uzvedību.

Problēma: Kā aprēķināt $P(X > 0)$, $P(-5 < X < 5)$?

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ğerbonis.

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

A	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

A	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- A – notikums;
- $P(A)$ – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums A;
- n – eksperimentu skaits.

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

A	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- A – notikums;
- $P(A)$ – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums A;
- n – eksperimentu skaits.

Biežums – n_i – tik reizes iestājas notikums A;
Relatīvais biežums – $\frac{n_i}{n}$.

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

A	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- A – notikums;
- $P(A)$ – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums A;
- n – eksperimentu skaits.

Biežums – n_i – tik reizes iestājas notikums A;

Relatīvais biežums – $\frac{n_i}{n}$.

$$\boxed{\frac{n_i}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(A)}$$

Histogramma

Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

Histogramma

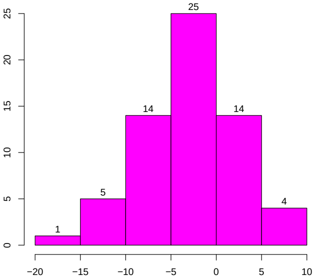
Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

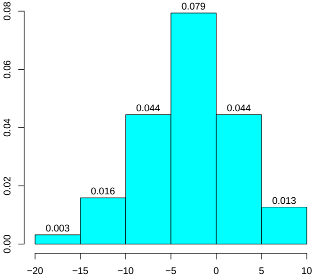
Temperatūra, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

Histogramma

Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

Temperatūra, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2





Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

Histogramma

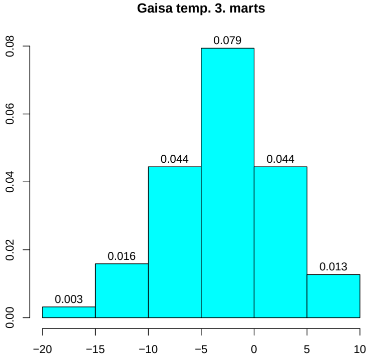
Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

T, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

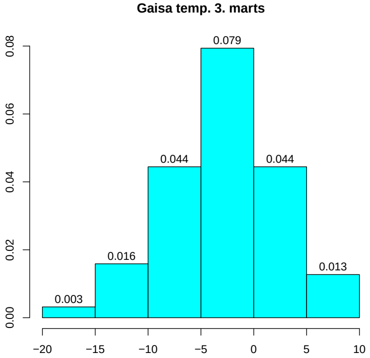
T, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

T, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

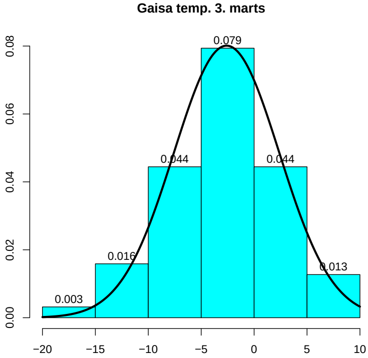


!!! Relatīvos biežumus izdalot ar intervāla garumu, histogrammas laukums kļūst 1.

Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

T, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



!!! Relatīvos biežumus izdalot ar intervāla garumu, histogrammas laukums kļūst 1.

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.
Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.
Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam. Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

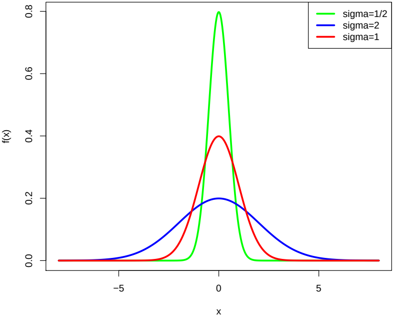
kur μ – vidējā vērtība, σ^2 – dispersija (σ – standartnovirze).

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam. Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kur μ – vidējā vērtība, σ^2 – dispersija (σ – standartnovirze).

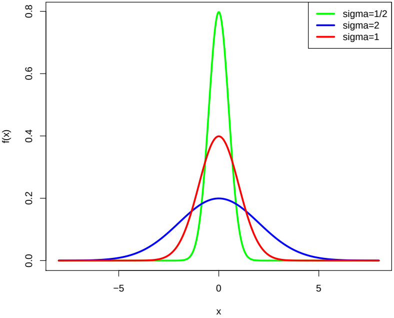


Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam. Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kur μ – vidējā vērtība, σ^2 – dispersija (σ – standartnovirze).



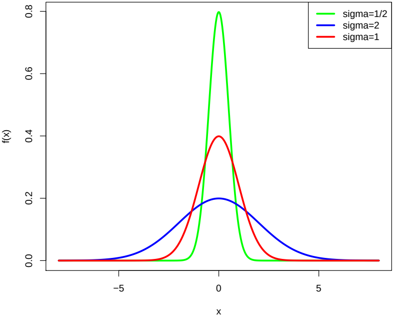
Gausa līknes laukums ir 1!!!

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam. Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

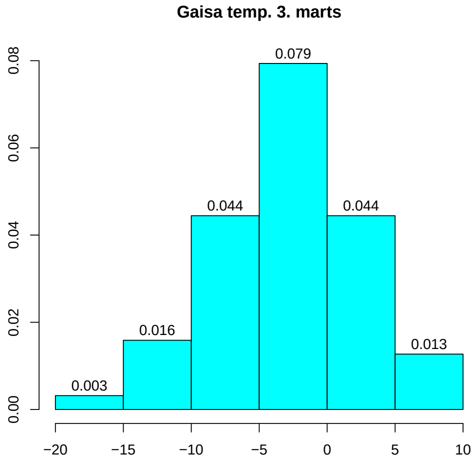
kur μ – vidējā vērtība, σ^2 – dispersija (σ – standartnovirze).



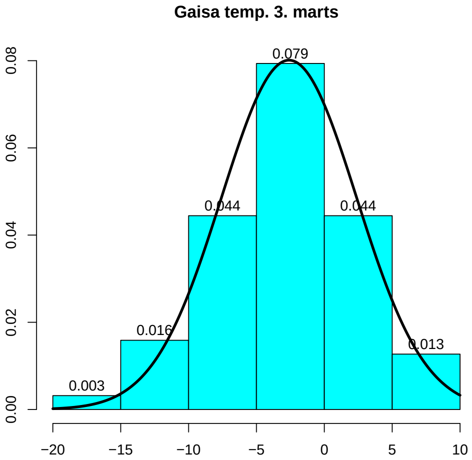
Gausa līknes laukums ir 1!!!

Piemēram: μ – vidējā temperatūra, σ^2 – izkliede ap vidējo temperatūru.

Normālais sadalījums



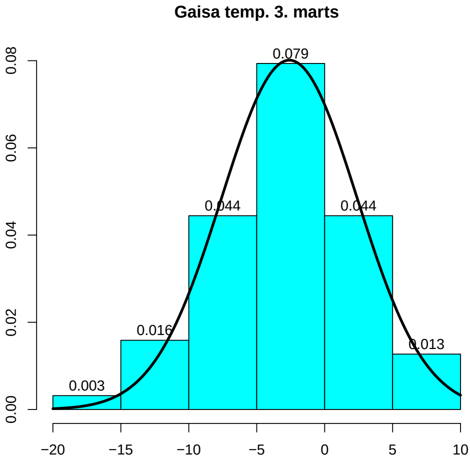
Normālais sadalījums



Vidējā temperatūra:
$\boxed{\mu = -2,6^\circ\mathrm{C}}$

Standartnovirze: $\boxed{\sigma \approx 4,98^\circ\mathrm{C}}$

Normālais sadalījums



Vidējā temperatūra:
$\boxed{\mu = -2,6^\circ\mathrm{C}}$

Standartnovirze: $\boxed{\sigma \approx 4,98^\circ\mathrm{C}}$

Ja gadījuma lielums X ir normāli sadalīts, to pieraksta

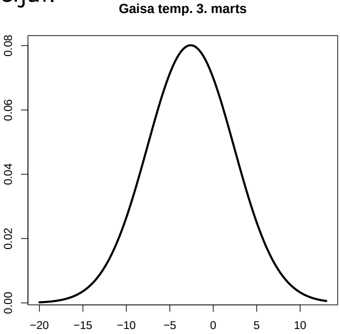
$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par 0°C.

Normālais sadalījums

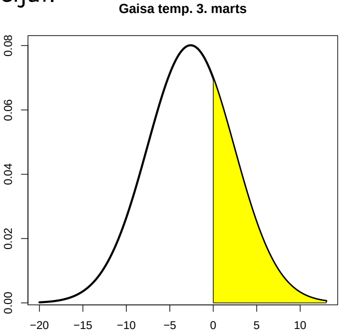
- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par 0°C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.



$\boxed{P(X > 0) = ?}$

Normālais sadalījums

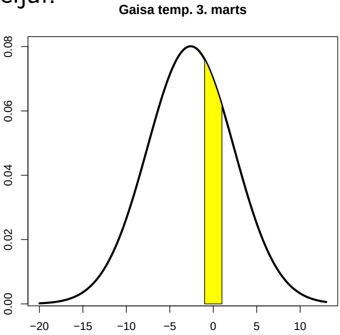
- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par 0°C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.



$$\boxed{P(X > 0) = 0.3}$$

Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs robežās no -1°C līdz 1°C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.



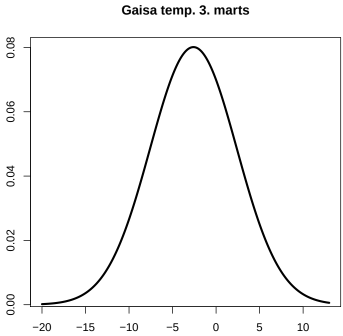
$$\boxed{P(-1 < X < 1) = 0.14}$$

Normālais sadalījums

- Varbūtība nepārtrauktam gadījuma lielumam pieņemt kādu vienu konkrētu vērtību ir 0 (laukuma nav)!

Normālais sadalījums

- Varbūtība nepārtrauktam gadījuma lielumam pieņemt kādu vienu konkrētu vērtību ir 0 (laukuma nav)!
- Ir jēga rēķināt varbūtības, ka gadījuma lielums pieņem vērtības kādā intervālā!



$$\boxed{P(X = a) = 0, \text{ kur } \ a \in \mathbb{R}}$$

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā.
Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā.
Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā.
Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā. Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā. Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

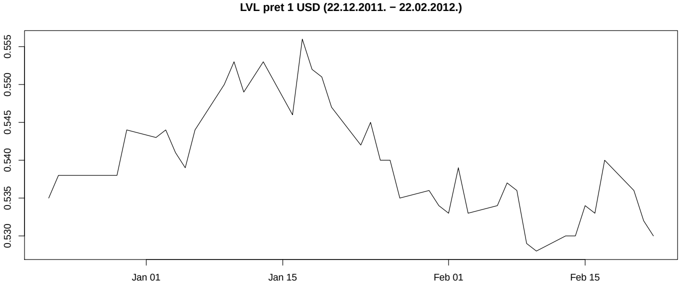
- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;
- valūtu kursu dinamika laikā.

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā. Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

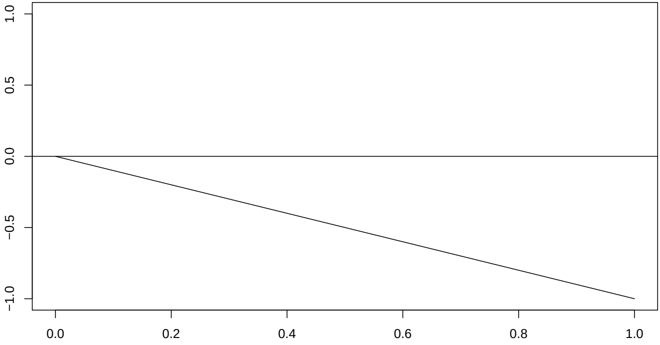
- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;
- valūtu kursu dinamika laikā.



Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

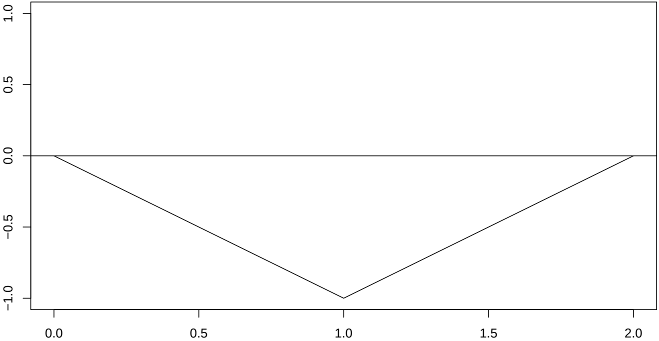
Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$



Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

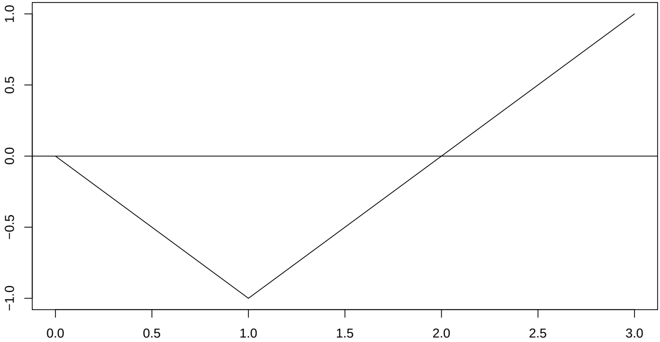


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

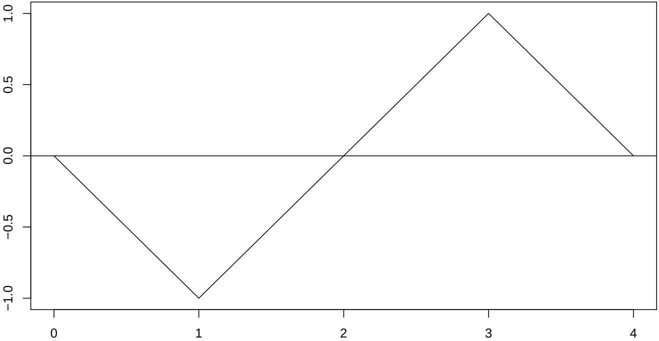


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

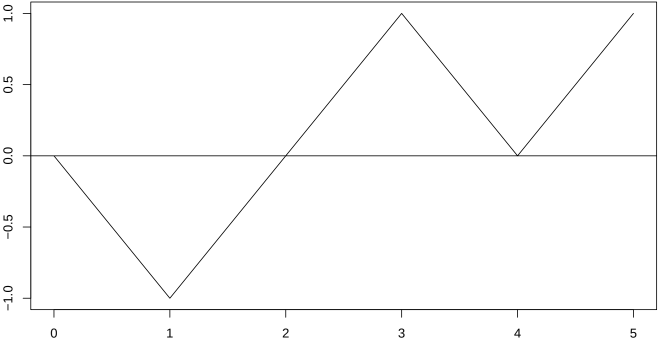


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

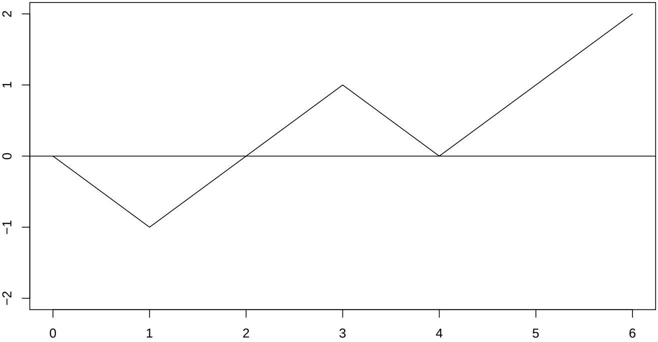


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

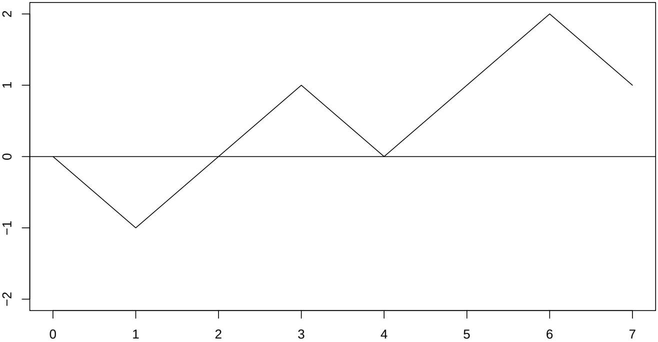


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$.

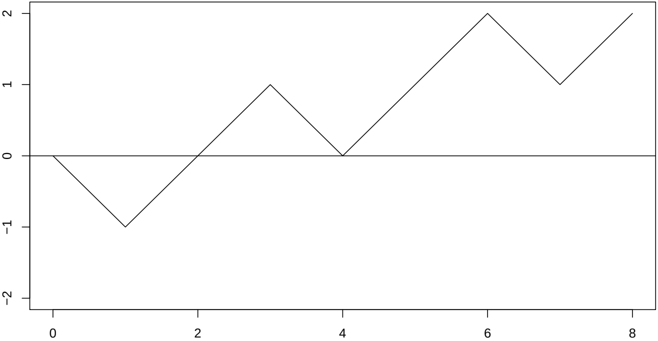


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

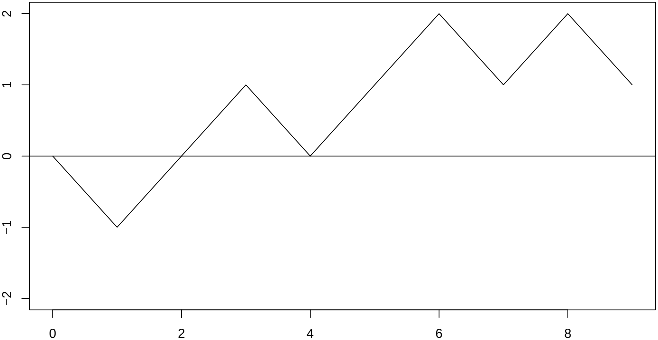


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

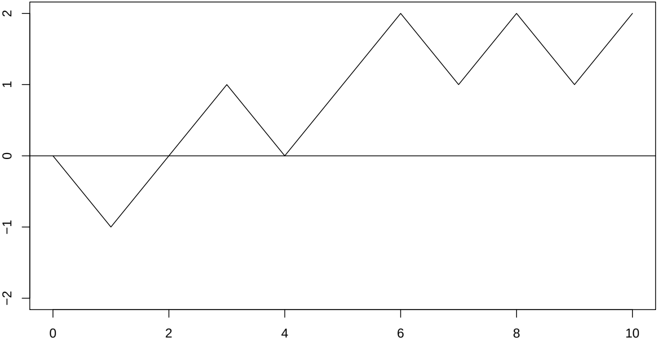


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

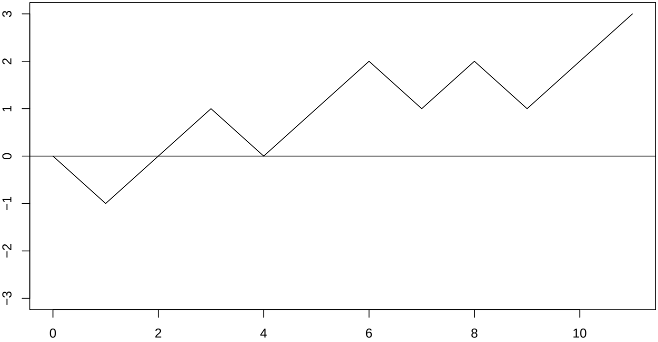


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

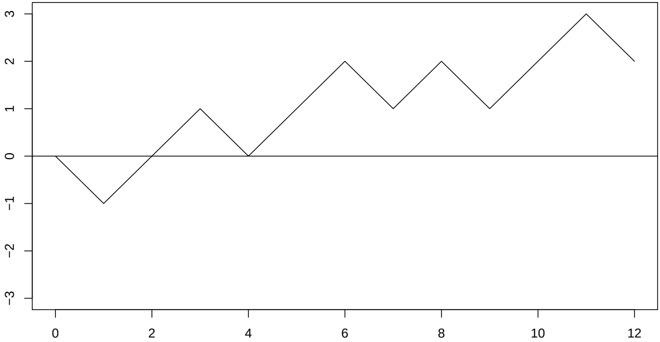


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

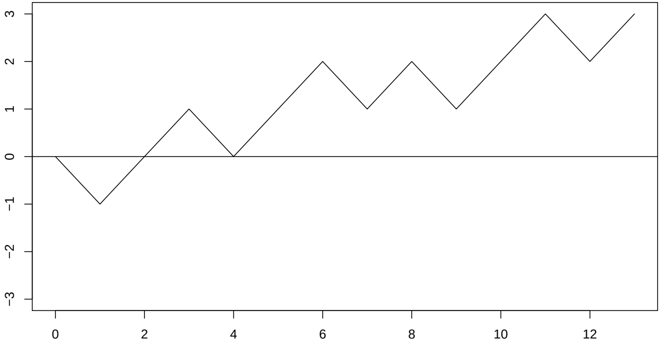


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

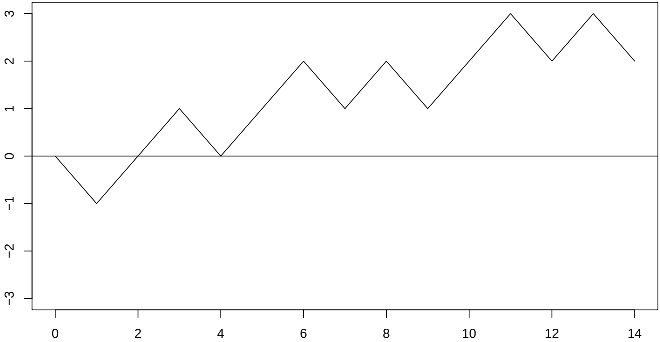


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

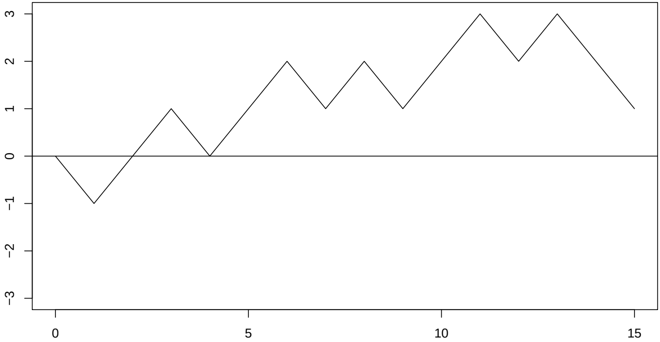


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

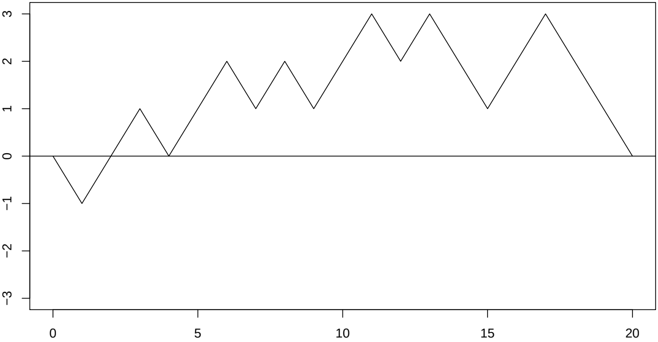


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

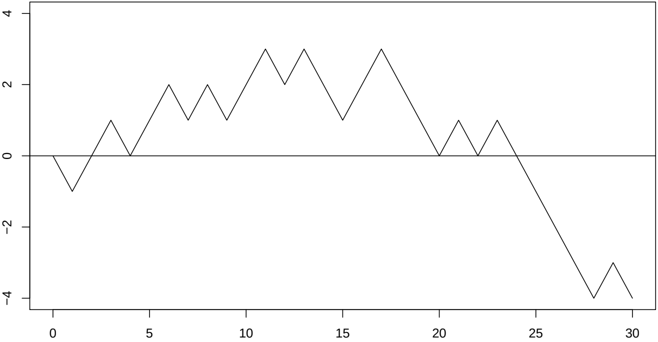


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

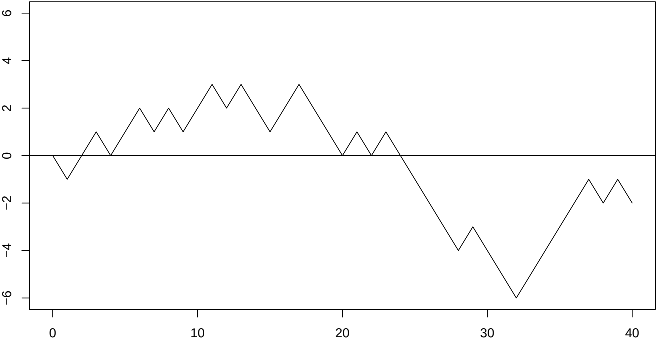


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

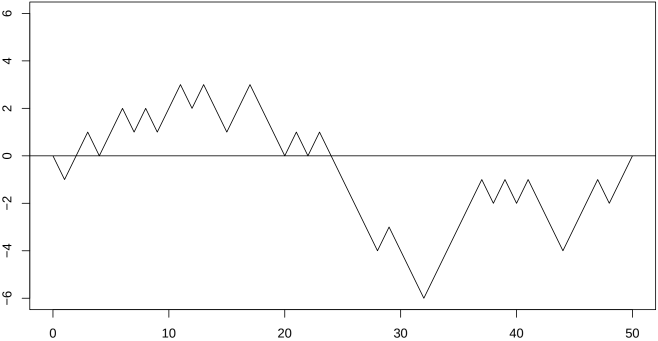


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

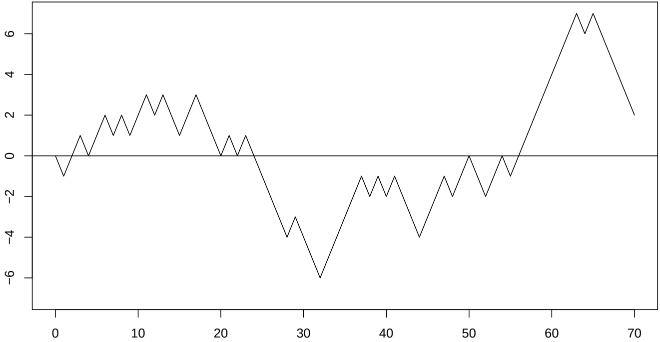


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

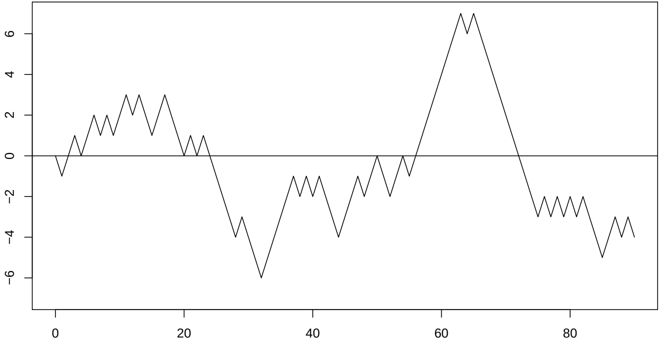


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

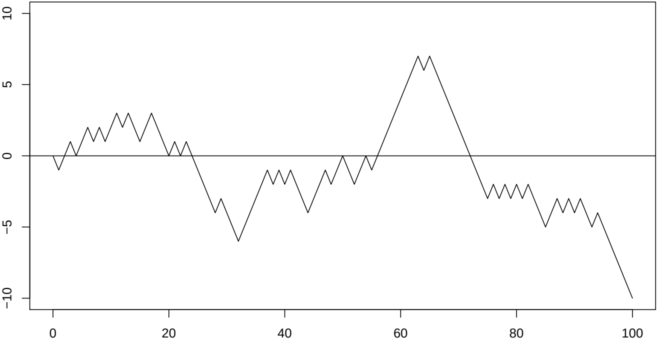


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

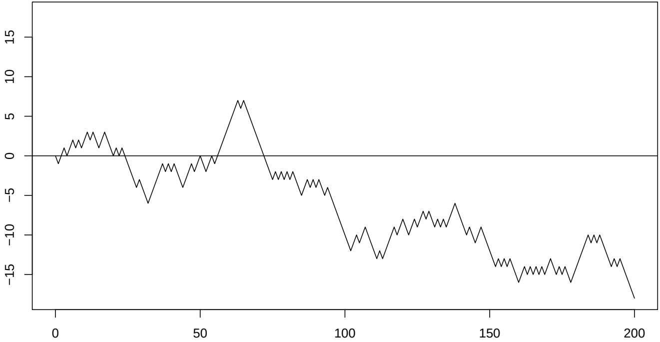


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

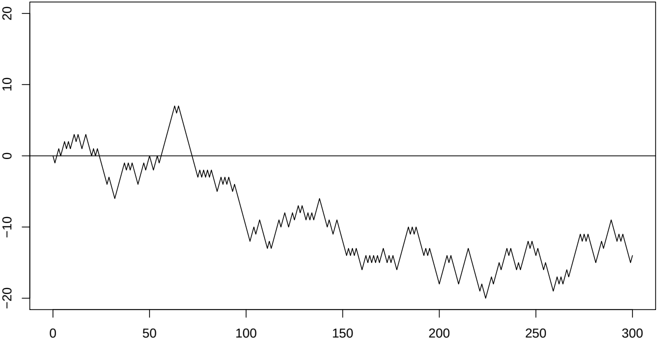


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

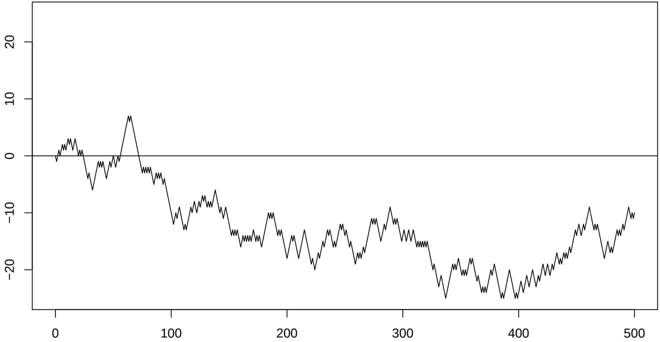


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

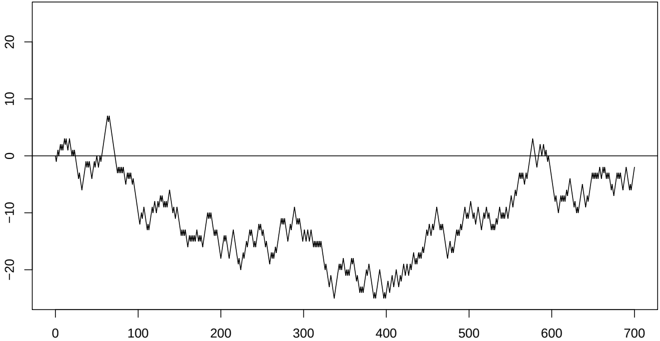


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

<u>*Definīcija*</u>

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ..., \}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

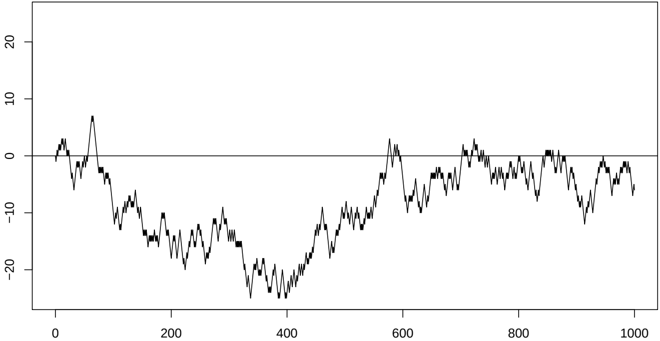


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$



Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā n_1 un n_2 monētas.

Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā n_1 un n_2 monētas.
- Katrs no tiem met "*neitrālo*" monētu un ar varbūtību $\frac{1}{2}$ katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

Gadījuma klejošanas piemērs

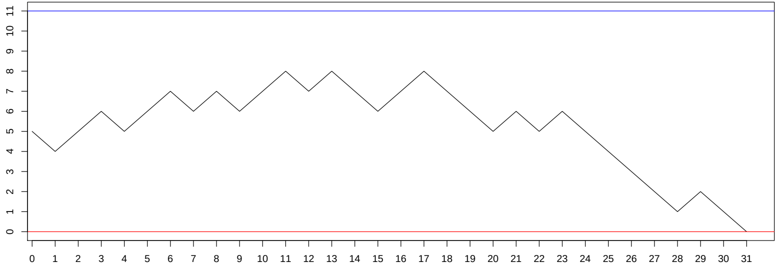
- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā n_1 un n_2 monētas.
- Katrs no tiem met "*neitrālo*" monētu un ar varbūtību $\frac{1}{2}$ katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

Piemērs: pirmais spēlētājs uzsāk spēli ar 5 monētām, otrais – ar 6 monētām. Spēle beigsies, kad pirmajam spēlētājam būs vai nu 11 monētas (viņš uzvarēs), vai – 0 monētas (viņš zaudēs).

Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā n_1 un n_2 monētas.
- Katrs no tiem met "*neitrālo*" monētu un ar varbūtību $\frac{1}{2}$ katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

Piemērs: pirmais spēlētājs uzsāk spēli ar 5 monētām, otrais – ar 6 monētām. Spēle beigsies, kad pirmajam spēlētājam būs vai nu 11 monētas (viņš uzvarēs), vai – 0 monētas (viņš zaudēs).



Brauna kustība finanšu matemātikā

Louis Jean - Baptist
Alphonse Bachelier
(1870. – 1946.)

- Franču matemātiķis.
- Viņa disertācija "Spekulācijas teorija" (1900. g.) ir vēsturiski pirmais darbs par augstākās matemātikas pielietojumu ekonomikā.
- Pirmais modelēja akciju cenas, izmantojot Brauna kustību.

Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!

Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!

Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!
- Citi jēdzieni: Ģeometriskā Brauna kustība; Stohastiskie integrāļi; Brauna tilts (statistikā) utt...

Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!
- Citi jēdzieni: Ģeometriskā Brauna kustība; Stohastiskie integrāļi; Brauna tilts (statistikā) utt...

Vairāk var uzzināt LU **Matemātiķa – statistiķa** programmā!!!

Paldies par uzmanību!