MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

NMS
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Fazer

FIZMATI.LV

Matemātiskās indukcijas metode

LU FMF doktorante
Aija Cunska

Indukcija — (no latīņu valodas '*inductio*' — uzvedināšana, ierosināšana) — loģisks slēdziens pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kad secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem.

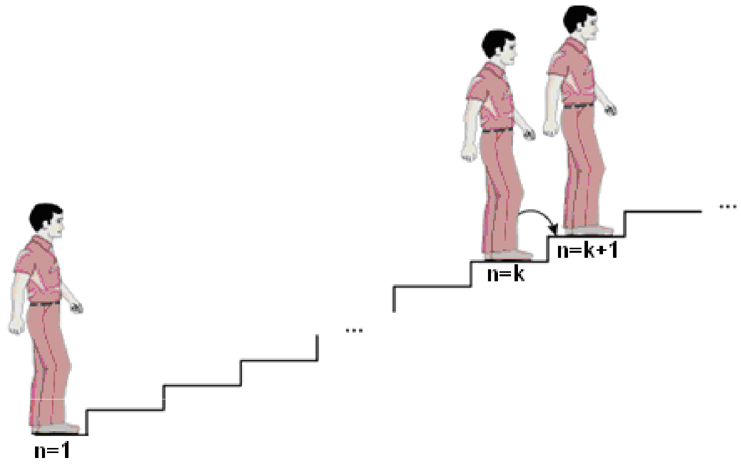
Induktīvās spriešanas pamatā ir vispārīgu secinājumu izdarīšana, balstoties uz atsevišķu gadījumu rezultātiem.

Klasisks induktīvo spriedumu piemērs ir ticējumi, kas attiecas uz laika apstākļiem. Piemēram, "*ja dūmi no skursteņa ziemā iet stāvus gaisā — būs sals, bet, ja slīpi un izplatās — kļūs siltāks*".

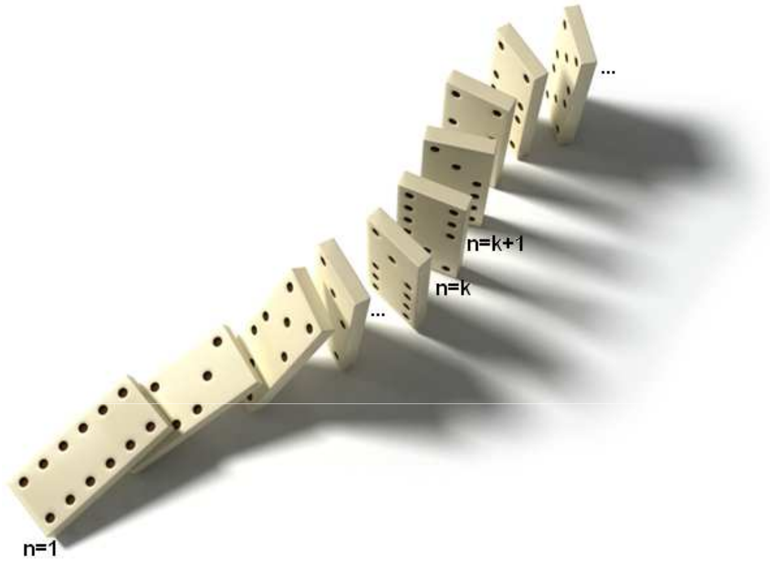
Kāds secinājums?

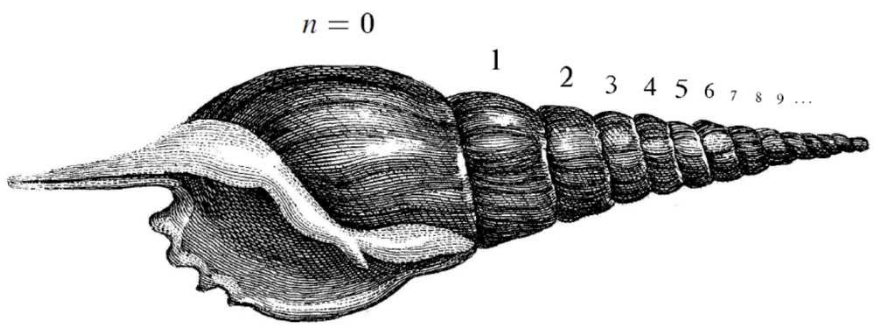
Matemātiskā indukcija

Kāpnes



Domino efekts

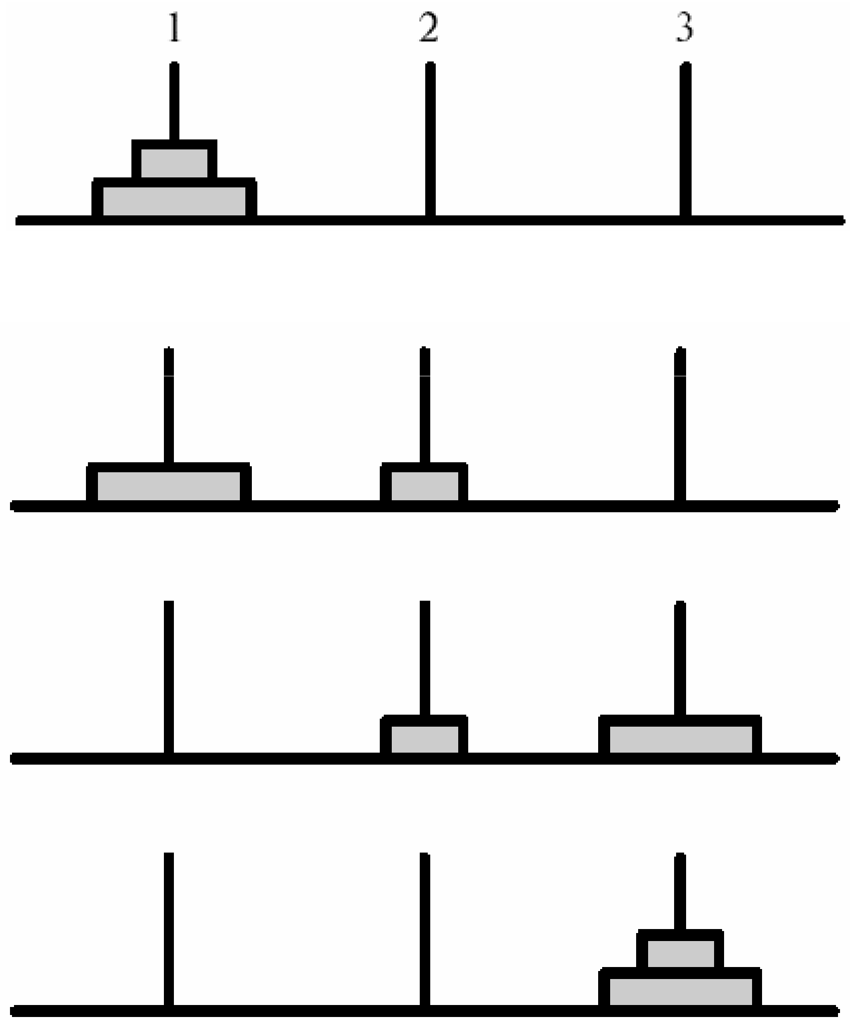


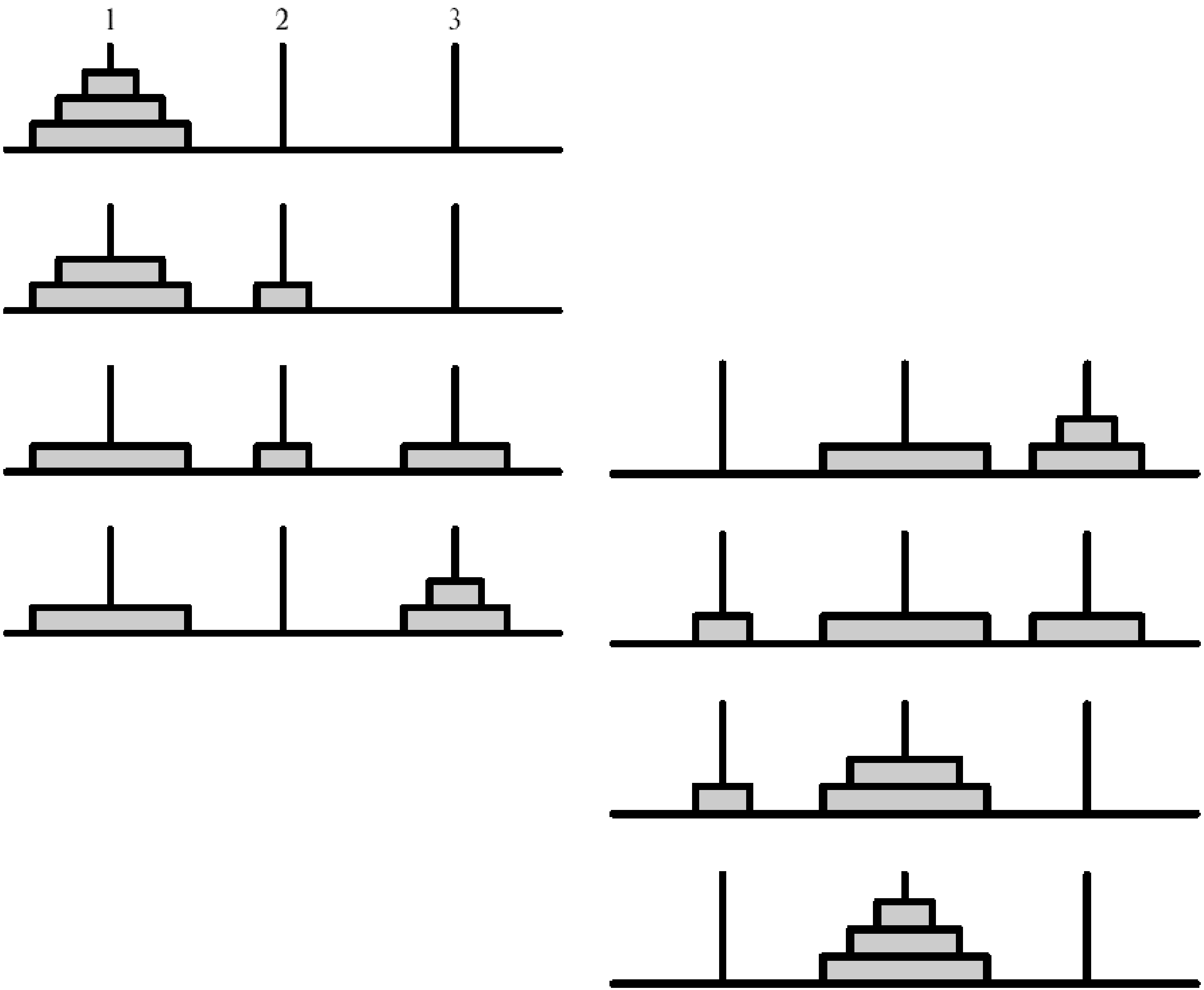


Vēsturiski

- Matemātiskās indukcijas sākumu saista ar Peano aksiomām
- Blēzs Paskāls (1623-1662) ir pirmais, kurš vispārināja formulas, piemēram, n naturālu skaitļu summas formulu
- 1838.gadā Augusts DeMorgans (1806-1871) aprakstīja Matemātiskās indukcijas metodi un deva tai nosaukumu
- 1983.gadā Latvijā tika izdota grāmata – A.Andžāns, P.Zariņš "Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi".

Hanoe torņi Praktisks uzdevums




1
2
3

Uzdevums “Hanoe torņi”

1883.gadā to izdomāja Eduards Lukass (Indijā).

Uzdevuma vispārīgs gadījums –

Doti n diski viens par otru mazāks un ar caurumiem vidū, kā arī trīs stieņi, uz kuriem diskus uzvērt. Mērķis ir pārvietot visus n diskus uz cita stieņa, ievērojot sekojošus noteikumus:

1. Vienlaicīgi drīkst pārvietot tikai vienu disku;
2. Mazāka izmēra disks drīkst atrasties tikai virs lielāka izmēra diska.

Ja n=2, tad ir jāveic 3 pārvietošanas.

Ja n=3, tad ir jāveic 7 pārvietošanas.

Ja n=4, tad ir jāveic 15 pārvietošanas.

Vispārīgā gadījumā ir jāveic $2^n – 1$ pārvietošanas.

Atsevišķi un vispārīgi apgalvojumi

Atsevišķi apgalvojumi satur izteikumus par vienu vai vairākiem galīga skaita objektiem (skaitļiem, priekšmetiem, ģeometriskām figūrām u. tml.).

Vispārīgi apgalvojumi parasti satur izteikumus par bezgalīgi daudz objektiem (skaitļiem), kas veido dotajam vispārīgajam apgalvojumam specifisku objektu kopu.

Atsevišķi apgalvojumi	**Vispārīgi apgalvojumi**
▪ 10 dalās ar 5 ▪ Kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras. ▪ Neviens naturāls skaitlis, kas mazāks nekā 100, nedalās ar 117.	▪ Katrs naturāls skaitlis, kas beidzas ar 0, dalās ar 5. ▪ Katra kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras. ▪ Neviens naturāls skaitlis 2n, kur n=1, 2, 3, ... , nedalās ar 117.

Matemātiskās indukcijas metode

- Ja dots izteikums A, kas definēts katram $n \in N$, un ir jāpierāda tā patiesums, tad, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, pierādījumu veic pēc šāda algoritma.

1) **Bāze.** Pamato, ka izteikums A ir patiess, ja $n = 1$.

2) **Induktīvais pieņēmums**. Pieņem, ka izteikums A ir patiess, ja $n = k$, kur $k \in N$.

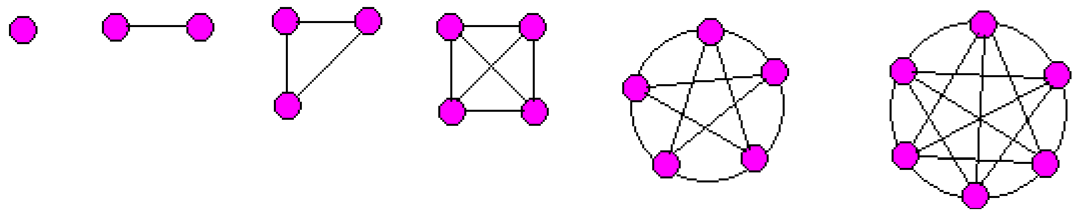
3) **Induktīvā pāreja.** Pierāda, ka tādā gadījumā A ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$.

4) **Secinājums.** Secina, ka A ir patiess visiem $n \in N$.

UZDEVUMS. Pasākumā ierodas n personas un savstarpēji sarokojas. Cik rokasspiedienu ir notikuši?

Vizuāls modelis

Personu skaits	1	2	3	4	5	6



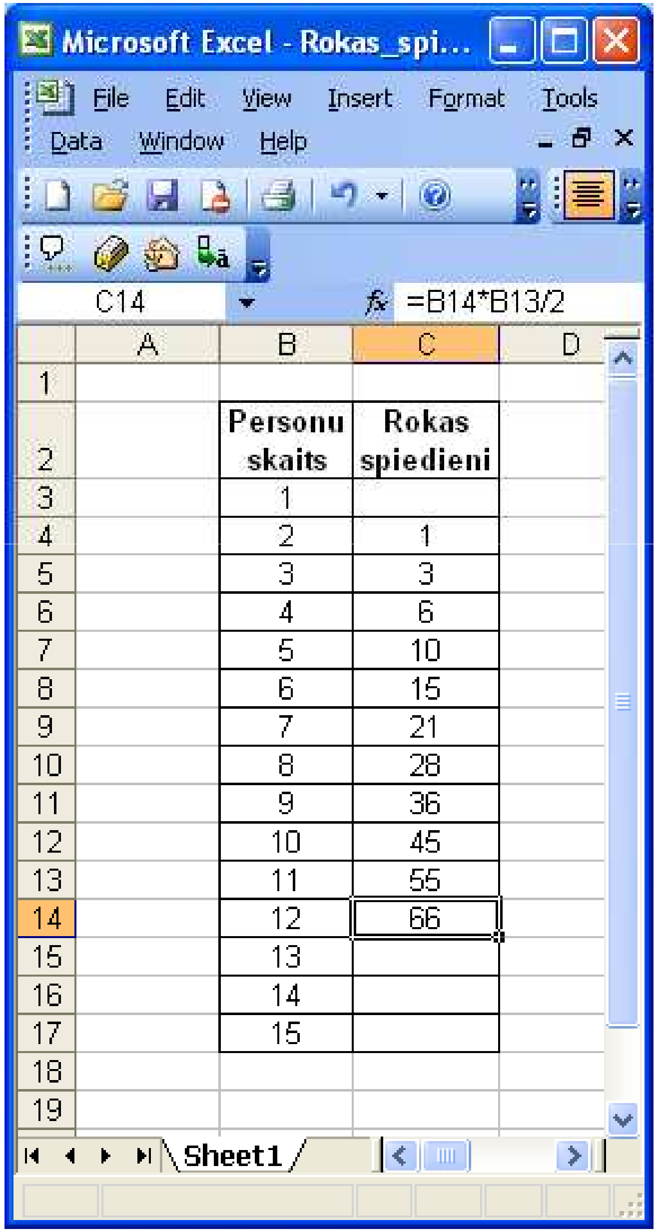
Rokasspiedienu skaits	0	1	3	6	10	15

Personu skaits ir n
un rokasspiedienu skaits ir

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Excel tabulā:

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$



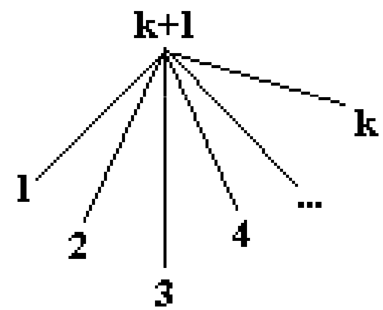
	A	B	C	D
1				
2		Personu skaits	Rokas spiedieni	
3		1		
4		2	1	
5		3	3	
6		4	6	
7		5	10	
8		6	15	
9		7	21	
10		8	28	
11		9	36	
12		10	45	
13		11	55	
14		12	66	
15		13		
16		14		
17		15		
18				
19				

Apgalvojumu par rokasspiedieniem apzīmēsim ar P(n).

1. Bāze. P(1) – ir viena persona un rokasspiedieni nenotiek

2. Pieņēmums. P(k) – personu skaits ir k un rokasspiedienu skaits ir (k-1)·k/2

3. Pāreja. k personām pievienojas k+1-mā persona. Tad esošo rokasspiedienu skaits (k-1)·k/2 palielinās par k (skat. zīmējumu).



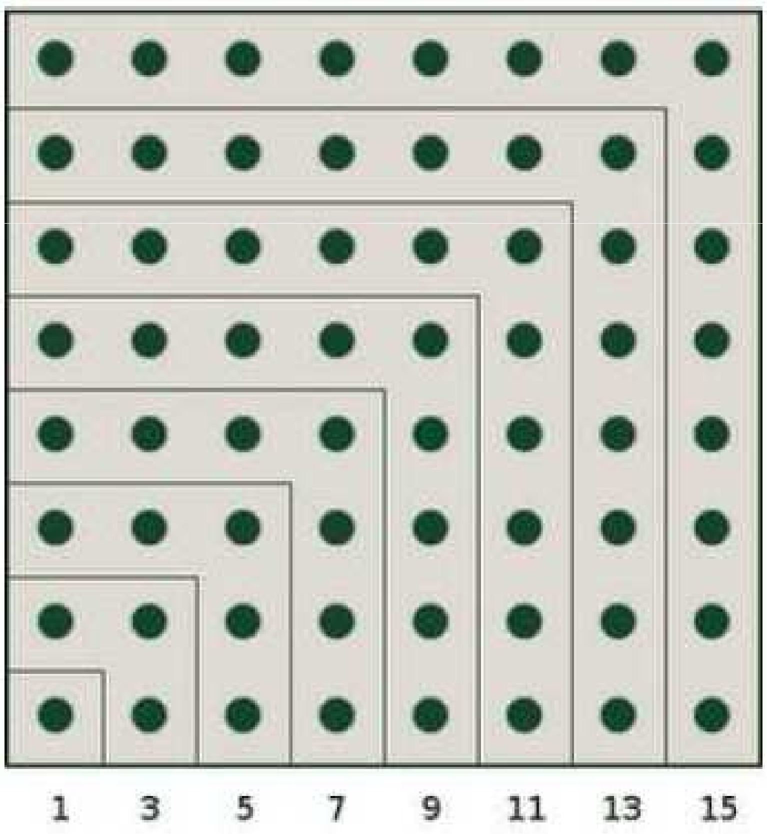
$$\frac{(k-1)\cdot k}{2}+k=\frac{k^2-k+2k}{2}=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

4. Secinājums. Ja pasākumā ierodas n personas un savstarpēji sarokojas, tad ir notikuši (n-1)·n/2 rokasspiedieni.

UZDEVUMS. Pierādīt, ka katram naturālam *n* izpildās vienādība

$$1+3+5+7+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$$

Vizuāls modelis



Apzīmēsim summu $1+3+5+\ldots+(2n+1)$ ar $S(n)$, bet vienādību $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$ apzīmēsim ar $A(n)$

1. Bāze. Vienādība $A(1)$ ir patiesa, jo $1+3=2^2$

2. Pieņēmums. Izvēlēsimies kaut kādu naturālu skaitli k un pieņemsim, ka vienādība $A(k)$ ir pareiza, t.i., ka
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k+1) = (k+1)^2$

3. Pāreja. Pierādīsim, ka tad pareiza ir arī vienādība $A(k+1)$. Pierādāmo vienādību $A(k+1)$ iegūstam, vienādībā $A(n)$ ievietojot n vietā k+1:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1)+1) = ((k+1)+1)^2 = (k+2)^2$.

Šī vienādība tiešām ir patiesa, jo
$S(k+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k+1) + (2k+3)=S(k) + (2k+3) = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1+ 2k + 3 = (k+2)^2$.

4. Secinājums. Katram naturālam skaitlim n ir spēkā vienādība
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

UZDEVUMS.

Pierādīt, ka n^3+5n dalās ar 6, ja n - naturāls skaitlis.

1. Bāze. Ja $n=1$, tad $1^3+5\cdot1 = 6$ dalās ar 6.

2. Pieņēmums. Pieņemsim, ka $k^3+5\cdot k$ dalās ar 6.

3. Pāreja. Pārbaudīsim, vai $(k+1)^3+5\cdot(k+1)$ dalās ar 6.

$(k+1)^3+5\cdot(k+1) = k^3+3\cdot k^2+3\cdot k+1+5\cdot k+5 = (k^3+5\cdot k) + (3k^2+3\cdot k) + 6.$

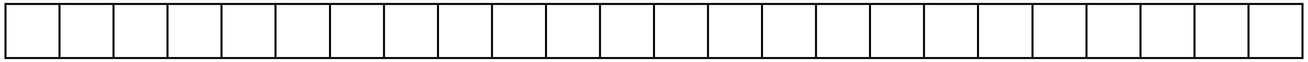
Skaidrs, ka 6 dalās ar 6. Pēc induktīvā pieņēmuma arī $k^3+5\cdot k$ dalās ar 6. Tātad induktīvā pāreja būs pierādīta, ja pratīsim pierādīt, ka $3\cdot(k^2+k)$ dalās ar 6 vai, kas ir tas pats, ka k^2+k dalās ar 2.

To, ka k^2+k dalās ar 2, var pierādīt, ievērojot, ka $k^2+k=k\cdot(k+1)$ un viens no diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem k un k+1 ir pāra skaitlis.

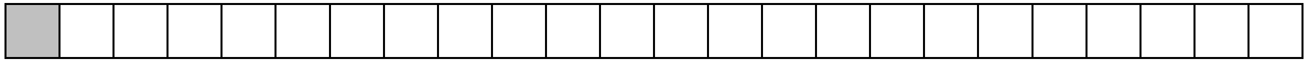
4. Secinājums. n^3+5n dalās ar 6 visiem naturāliem skaitļiem n.

Kā ģeometriski varētu ilustrēt MIP?

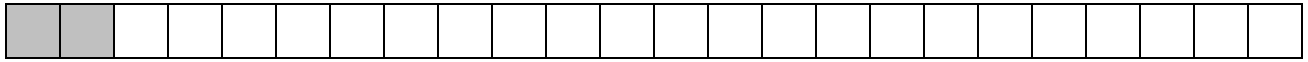
- Apgalvojumu A(n) attēlosim ar rūtiņu rindu



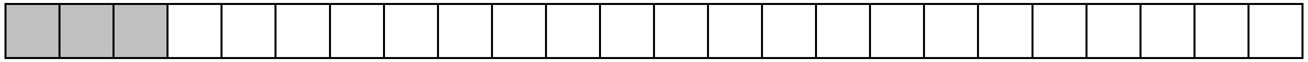
Ja A(1) ir patiess, tad varam aizkrāsot pirmo rūtiņu (BĀZE):



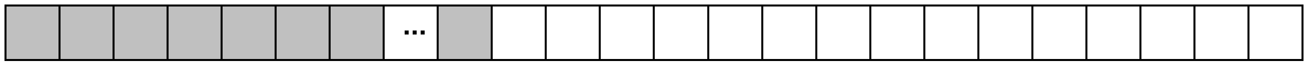
Ja A(2) ir patiess, tad varam aizkrāsot otro rūtiņu (BĀZE):



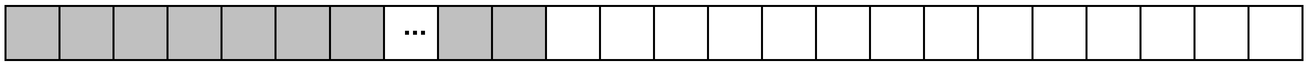
Ja A(3) ir patiess, tad varam aizkrāsot trešo rūtiņu (BĀZE):



Ja A(k) ir patiess, tad varam aizkrāsot k-to rūtiņu (PIEŅĒMUMS):



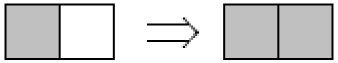
Ja A(k+1) ir patiess, tad varam aizkrāsot k+1-mo rūtiņu (PĀREJA):



Indukcijas shēmas

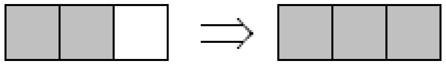
Ģeometriskajā interpretācijā jānokrāso visa figūra, kas attēlo vispārīgo apgalvojumu, vienalga, ar kādu krāsošanas paņēmienu; neviena rūtiņa, kas atbilst kādam atsevišķam apgalvojumam, nedrīkst palikt balta

Vienkāršākās vienvirziena indukcijas shēmas

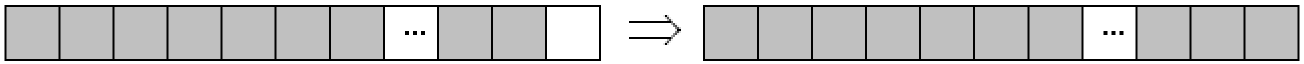


$k \Rightarrow k+1$

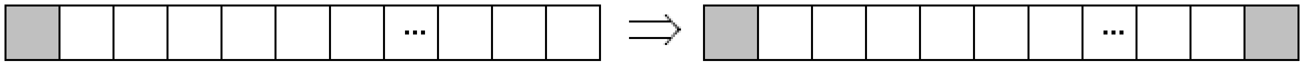
Sarežģītākas vienvirziena indukcijas shēmas



k un $k+1 \Rightarrow k+2$

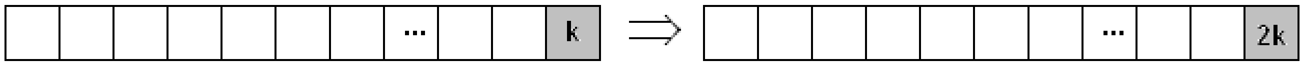


$k, k+1\ldots \Rightarrow k+m$

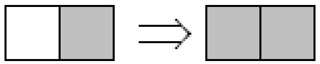


$k \Rightarrow k+m$

Divvirziena indukcijas shēmas

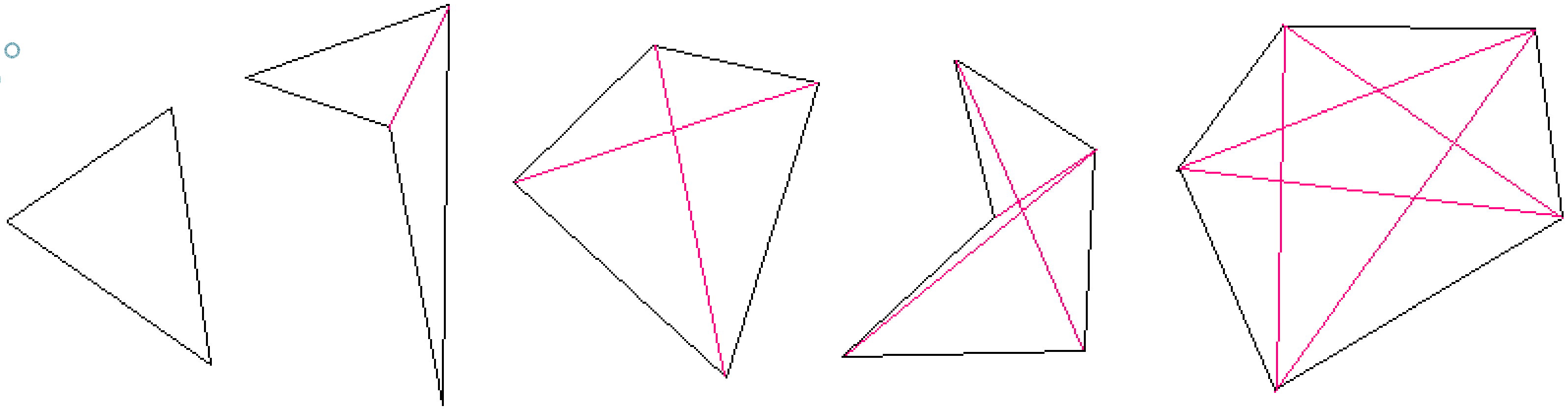


$k \Rightarrow 2k$



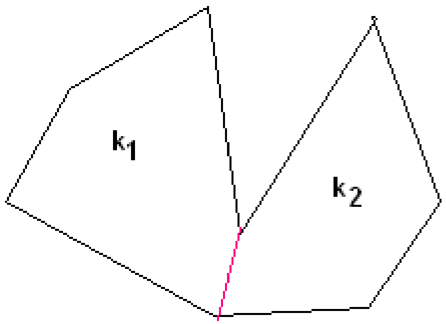
$k \Rightarrow k-1$

UZDEVUMS. Pierādīt, ka katram n-stūrim (ne noteikti izliektam) var novilkt vismaz n-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē.

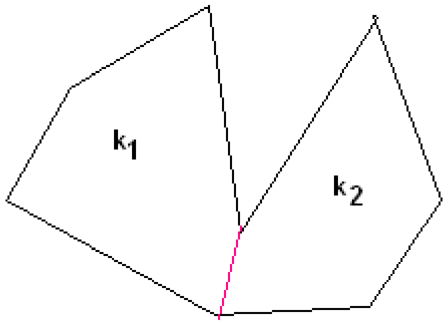


1. **Bāze.** Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess trijstūrim, četrstūrim, piecstūrim, ..., (m-1)-stūrim.

2. **Pieņēmums.** Aplūkosim kaut kādu m-stūri. Ja tas ir izliekts, tad no katras šī daudzstūra virsotnes iziet m-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē. Ja daudzstūris ir ieliekts, apskatām virsotni, pie kuras m-stūra iekšējais leņķis lielāks nekā 180 grādi.



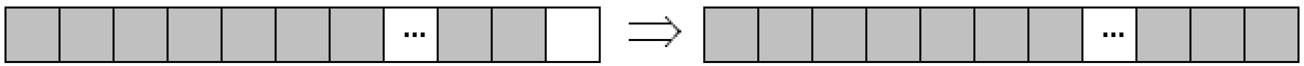
No šīs virsotnes iziet vismaz viena diagonāle, kas atrodas m-stūra iekšpusē: šī diagonāle sadala m-stūri k_1-stūrī un k_2-stūrī, pie tam $k_1<m$, $k_2<m$ un $k_1+k_2=m+2$.



3. Pāreja. Pēc induktīvā pieņēmuma k_1-stūra iekšpusē atrodas vismaz k_1-3 tā diagonāles (tās ir arī dotā m-stūra diagonāles) un k_2-stūra iekšpusē atrodas vismaz k_2-3 tā diagonāles (kas arī ir dotā m-stūra diagonāles), tāpēc dotā m-stūra iekšpusē atrodas vismaz $(k_1-3) + (k_2-3) + 1 = k_1 + k_2 - 5 = (m+2) - 5 = m - 3$ diagonāles, ko arī vajadzēja pierādīt.

4. Secinājums. Katram n-stūrim (ne noteikti izliektam) var novilkt vismaz n-3 diagonāles, kas atrodas tā iekšpusē.

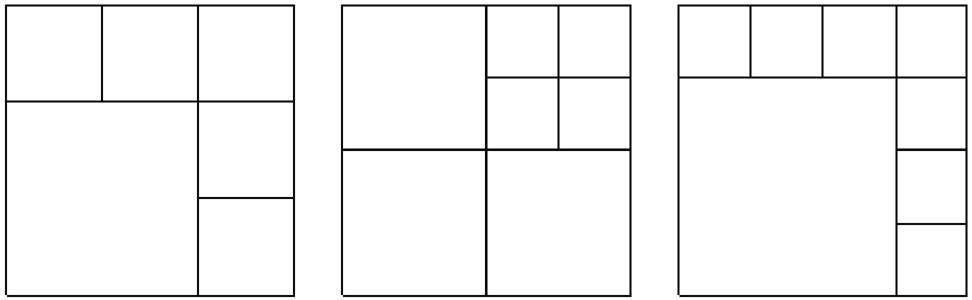
Izmantota ir sarežģītāka vienvirziena indukcijas shēma:



$3, 4, \ldots, m-1 \Rightarrow m$

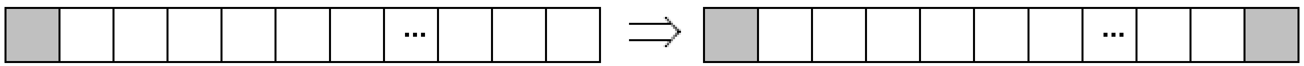
UZDEVUMS. Pierādīt, ka jebkuru kvadrātu var sagriezt n kvadrātos, ja n>=6.

1. Bāze. Zīmējumā parādīts, kā kvadrātu var sagriezt 6, 7, un 8 kvadrātos.



2. Pieņēmums. Kvadrātu var sagriezt m kvadrātos.
3. Pāreja. Ja kvadrātu var sagriezt m kvadrātos, tad to var sagriezt arī m+3 kvadrātos: pietiek vienu no m kvadrātiem sagriezt 4 vienādos kvadrātos.
4. Secinājums. Jebkuru kvadrātu var sagriezt n kvadrātos, ja n>=6.

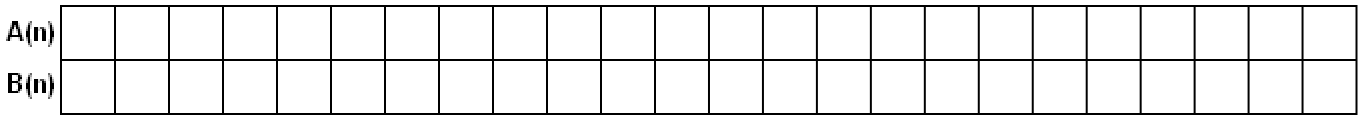
Sarežģītāka viendimensiju indukcijas shēma:



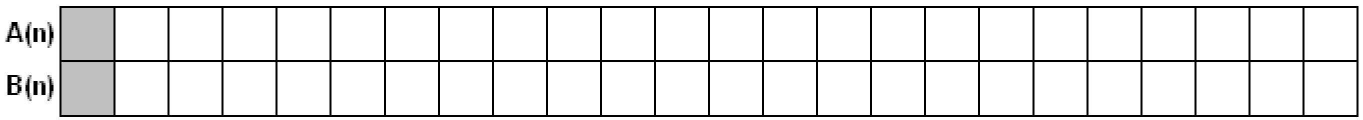
Indukcijas shēmas

Ģeometriskajā interpretācijā jānokrāso visa figūra, kas attēlo vispārīgo apgalvojumu, vienalga, ar kādu krāsošanas paņēmienu; neviena rūtiņa, kas atbilst kādam atsevišķam apgalvojumam, nedrīkst palikt balta

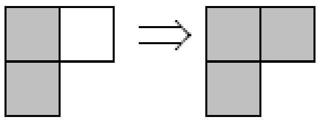
Paralēlā indukcija



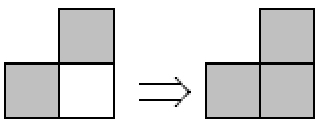
Indukcijas bāze nozīmē, ka abām lentēm drīkst aizkrāsot pirmās rūtiņas



Pirmo induktīvo pāreju grafiski attēlo



Otro induktīvo pāreju grafiski attēlo



UZDEVUMS. Dotas divas skaitļu virknes $a_1, a_2, \ldots$ un $b_1, b_2, \ldots$, kuras veido šādi: $a_1=3$, $b_1=4$; ja $n\geq 1$, tad

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}.$$

Pierādīt, ka visiem naturāliem n ir pareizas vienādības

$$a_n=1+\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \quad un \quad b_n=\frac{1}{3}\left(11+\frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

1. Bāze. A(1) un B(1) ir pareizas vienādības, jo

$$1+\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^1}\right)=3=a_1 \quad un \quad \frac{1}{3}\left(11+\frac{1}{4^0}\right)=4=b_1.$$

3. Pārejas.

1. Ja A(k) un B(k) ir pareizas vienādības, tad pareiza ir arī vienādība A(k+1). Pierādīt patstāvīgi.

2. Ja A(k+1) un B(k) ir pareizas vienādības, tad arī B(k+1) ir pareiza vienādība. Pierādīt patstāvīgi.

4. Secinājums. Ir pierādīts gan vispārīgais apgalvojums A(n), gan vispārīgais apgalvojums B(n), $n\in N$.

Indukcijas shēmas

Ģeometriskajā interpretācijā jānokrāso visa figūra, kas attēlo vispārīgo apgalvojumu, vienalga, ar kādu krāsošanas paņēmienu; neviena rūtiņa, kas atbilst kādam atsevišķam apgalvojumam, nedrīkst palikt balta

Divdimensionālā indukcija

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	...
1								
2								
3								
4								
5								
...								

Vispārīgu apgalvojumu ar diviem parametriem var attēlot ar plaknes kvadrantu (divdimensiju lenti). Katra rūtiņa atbilst atsevišķam apgalvojumam, ko iegūst no vispārīgā apgalvojuma, piešķirot parametriem n un k noteiktas vērtības. Piemēram, rūtiņa, kas atrodas trešajā rindiņā un ceturtajā kolonnā, atbilst parametru vērtībām k=3, n=4, t.i., atsevišķajam apgalvojumam A(3;4).

UZDEVUMS. Pierādīt, ka n(n+1)(n+2) … (n+k-1) dalās ar k! ($k \in N$, $n \in N$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$)

- **UZDEVUMS. m dažāda nosaukuma grāmatas, katra n eksemplāros, saliktas uz m galdiņiem tā, lai uz katra galdiņa būtu n grāmatas. Pierādīt, ka lasītājs var paņemt no katra galdiņa pa vienai grāmatai tā, lai viņam būtu dažāda nosaukuma grāmatu pilns komplekts.**

Ja n=1, apgalvojums acīmredzot ir patiess: katra no m dažādo nosaukumu grāmatām ir vienā eksemplārā, un tās novietotas uz m galdiņiem, uz katra galdiņa pa vienai grāmatai.

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	…
1								
2								
3								
4								
5								
…								

KĻŪDAINI PIERĀDĪJUMI

- **Uzdevums**. Jebkuri n punkti atrodas uz vienas taisnes.

1. Bāze. Ja n=1 (un arī, ja n=2), apgalvojums ir patiess.

2. Pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums patiess, ja n=k.

3. Pāreja. Aplūkosim k+1 punktus $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$.
Punkti $A_1, A_2, \ldots, A_k$ atrodas uz vienas taisnes pēc induktīvā pieņēmuma; apzīmēsim šo taisni ar t_1.

Punkti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, A_{k+1}$ atrodas uz vienas taisnes pēc induktīvā pieņēmuma; apzīmēsim šo taisni ar t_2.

Tā kā gan t_1, gan t_2 iet caur punktiem A_2 un A_k, bet caur diviem punktiem var novilkt tikai vienu taisni, tad t_1 un t_2 sakrīt.

Līdz ar to induktīvā pāreja pierādīta.

4. Secinājums. Jebkuri n punkti atrodas uz vienas taisnes.

ATSEVIŠĶI APGALVOJUMI

- **UZDEVUMS.** Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}>\frac{1}{10\sqrt{2}}$$

Mēģināsim atrast tādu **vispārīgu** apgalvojumu, kura speciāls gadījums ir pierādāmā nevienādība?

Samērā viegli nonākam pie šādas hipotēzes:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2\sqrt{n}},\ ja\ n\geq 2$$

Pierādāmo nevienādību iegūst no šīs nevienādības, ja n = 50.

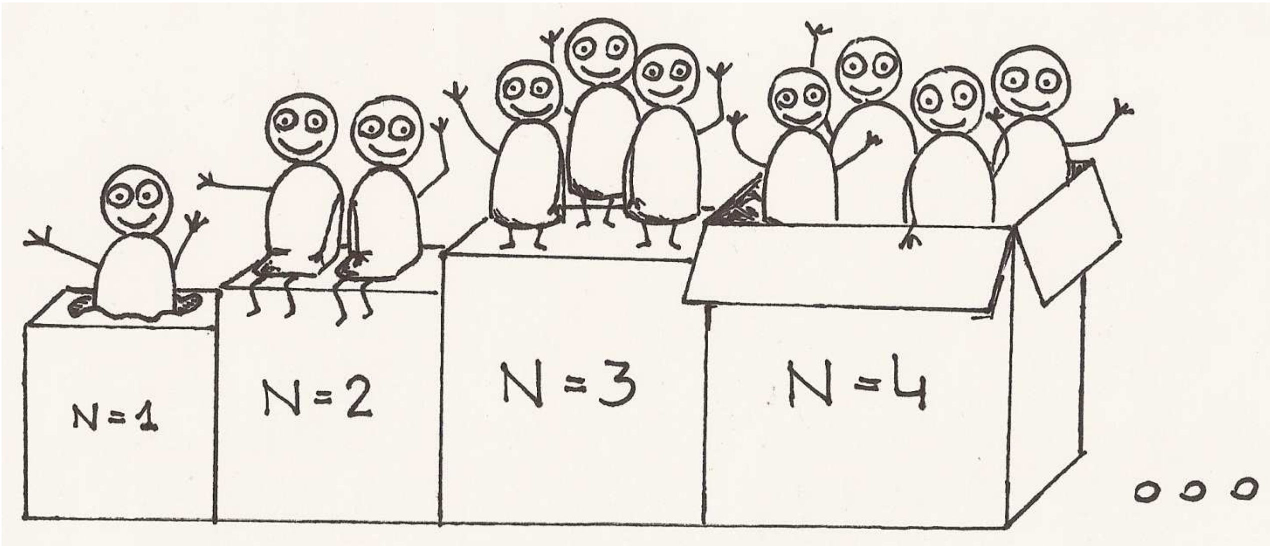
UZDEVUMI

1. Pierādīt, ka visiem $n \geq 1$, ir spēkā vienādība $3 + 11 + 19 + ... + (8n-5) = 4n^2 - n$

2. Pierādīt, ka $7^n + 2$ dalās ar 3.

3. Plaknē novilktas n dažādas taisnes sadala šo plakni apgabalos. Pierādīt, ka, krāsojot katru apgabalu vienā no divām dotajām krāsām, var tā nokrāsot visu plakni, ka nekādi divi apgabali ar kopēju malu nav vienā krāsā.

4. No 3^n vienāda izskata monētām viena ir nedaudz smagāka, bet pārējām $3^n - 1$ monētām ir vienāds svars. Pierādīt, ka, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar n svēršanām var atrast smagāko monētu.



Paldies par uzmanību!

Aija Cunska
aijac@lanet.lv