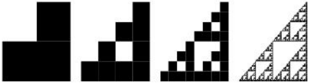
MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITATE
ANNO 1919

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

FIZMATI.LV

FRAKTĀĻI



LU Fizikas un matemātikas fakultātes

Asoc.profesore Inese Bula

Termins ”fraktālis” ir radies no latīņu valodas: darbības vārda ′frangere′ — lauzt un īpašības vārda ′fractus′ — daļveida, neregulārs. Šo terminu izveidoja 1975.gadā Benuā Mandelbrots (*Benoit Mandelbrot*), kurš tad arī tiek uzskatīts par fraktālās ğeometrijas pamatlicēju.

1.zīm. Benoit B. Mandelbrot, 20.11.1924. — 14.10.2010.

Lielā terminu vārdnīca, http://www.termini.lv :
Fraktālis — attēlā ietverta ğeometriska figūra (kontūra), kas precīzi saglabā savu apveidu neatkarīgi no tā, kā tiek palielināts vai samazināts pats attēls (piem., krasta līnija, mākonis, koks, u.c.).

B.Mandelbrota def.,
http://astronomy.swin.edu.au/ pbourke/fractals/fracintro:
Fraktālis ir neregulāra vai sadrumstalota forma, kuru var sadalīt mazākās daļās tā, ka jauniegūtās daļas ir sākotnējās formas samazināta izmēra kopijas.

Formāla matemātiska def.:
Fraktālis ir punktu kopa, kuras fraktālā dimensija ir lielāka par tās topoloğisko dimensiju.

Parasti ar jēdzienu "fraktālis" saprot tādu kopu F, kurai piemīt vairākas specifiskas īpašības:

⋆ kopa F ir ar smalku struktūru, t.i., tā satur daļas patvaļīgi mazā mērogā; jo vairāk attēls tiek palielināts, jo precīzāk redzama tā struktūra;

⋆ F ir pārāk neregulāra, lai to varētu apskatīt tradicionālās ģeometrijas valodā gan globāli, gan lokāli;

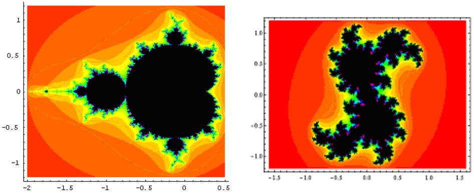
⋆ bieži kopai F ir kāda no pašlīdzības formām (stingra, daļēja vai statistiska);

⋆ bieži vien kopa F tiek definēta vienkāršā veidā (piemēram, rekursīvi).

Fraktāļus iedala divās lielās grupās: determinētie fraktāļi (*deterministic fractals*) un gadījuma fraktāļi (*random fractals*).

Determinētie fraktāļi tiek veidoti, izmantojot matemātiskas konstrukcijas. Būtībā tie ir iterāciju (rekursīva algoritma) rezultāts.

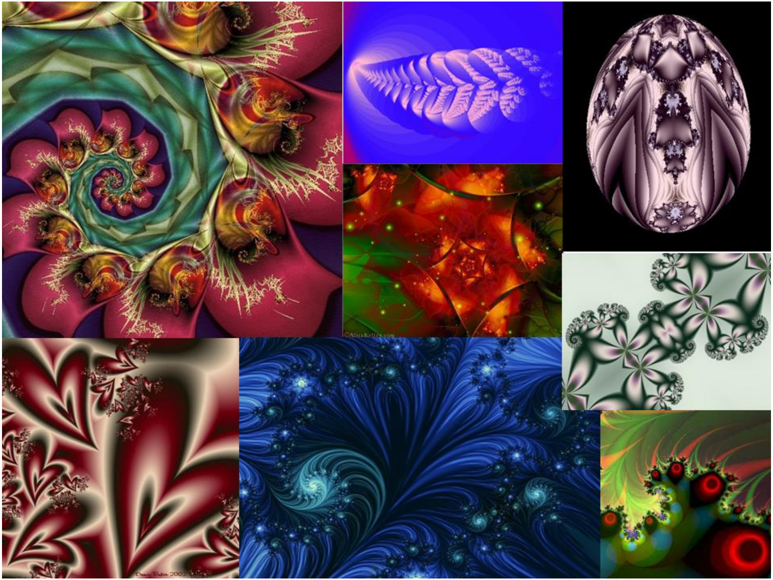
Determinētie fraktāļi ir Kantora kopa, Koha līkne, Serpinska trīsstūris un paklājs, arī Mandelbrota kopa un Džūlija kopas, u.c.



2.zīm. Mandelbrota kopa un viena no Džūlija kopām

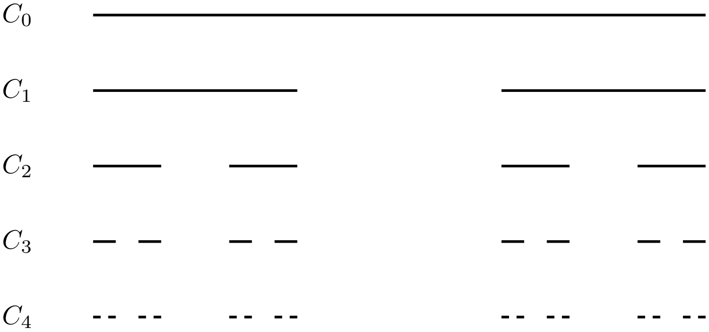
Gadījuma fraktāļiem ir daudz lielāka praktiska nozīme nekā determinētajiem. Gadījuma fraktāļi bieži tiek modelēti un pēc tam analizēti tādās nozarēs kā ķīmija, fizika, bioloģija. Būtiska gadījuma fraktāļu iezīme ir tā, ka fraktāļa veidošanās procesā ir iesaistīts nejaušības moments. Līdz ar to viena un tā paša procesa rezultātā var tikt iegūti atšķirīgi fraktāļi.

Gadījuma fraktāļi pamatā ir dabas fraktāļi, tādi kā papardes lapa, zibens šautra, krasta līnija, kalnu kontūras, asinsvadu sistēma, bronhu sazarojums, u.c.



KLASISKIE DETERMINĒTIE FRAKTĀĻI

Klasiskā Kantora kopa jeb **Kantora putekļi** nosaukta Georga Kantora vārdā, kurš šo kopu aprakstījis 1883.gadā.



3. zīm. Kantora kopas konstrukcija

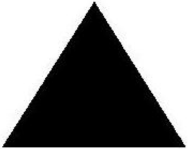
Formāli par fraktāli var saukt tikai tādu objektu, kuram iterācijas ir izpildītas bezgalīgi daudzas reizes. Figūras, kuras veidojas iterāciju laikā, dēvē par pirmsfraktāļiem lielumā k, kur k norāda izpildīto iterāciju skaitu. Redzes izšķirtspējas dēļ pēc zināma skaita iterācijas soļiem iegūtais pirmsfraktāļa attēls jau sakritīs ar īstā fraktāļa attēlu.

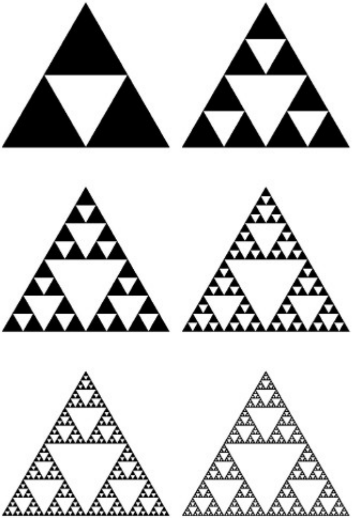
Izmesto intervālu garumu summa ir:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+...+\frac{2^{n-1}}{3^n}+...=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

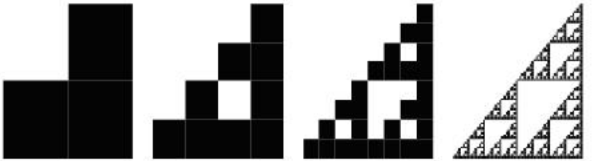
Vaclavs Serpinskis (*Waclaw Sierpinski*) (1882-1969): sākumā ir dots regulārs trīsstūris ar 1 vienību garu malu. Savienojot visu malu viduspunktus, iegūsim regulāru trīsstūri, kuru izgriežam ārā no sākotnējā trīsstūra. Paliek trīs mazāki trīsstūri, kuru malu garumi ir $\frac{1}{2}$ vienības. Nākošajā solī atkārtojam šo procedūru ar katru no trim trīsstūriem, rezultātā iegūsim 9 regulārus trīsstūrus ar malas garumu $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Turpinot šo procedūru, n-tajā solī mēs iegūsim 3^n regulārus trīsstūrus, kuru malas garums ir $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ja pieļaujam, ka procedūru var atkārtot bezgalīgi daudzas reizes, tad kā robežgadījumu iegūsi **Serpinska trīsstūri**.





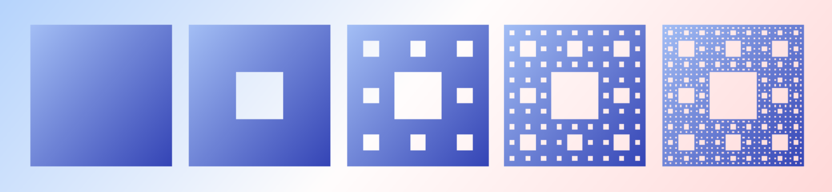
4.zīm. Serpinska trīsstūra pirmās 6 iterācijas

Serpinska trīsstūri var izveidot arī, ja kā sākumkopu izvēlas kvadrātu.



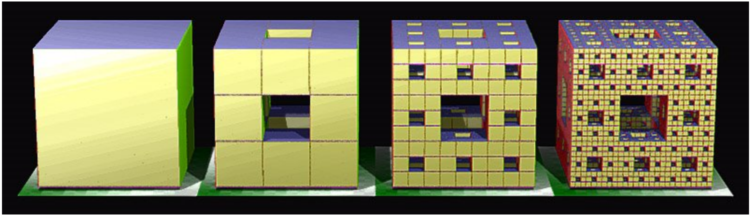
5.zīm. Serpinska trīsstūris ar sākumkopu kvadrāts

Serpinskis klasisko fraktāļu galerijai ir pievienojis vēl vienu objektu — **Serpinska paklāju** (*Sierpinski Carpet*). Šajā gadījumā 0.solis ir kvadrāts plaknē. Tas tiek sadalīts 9 mazos kvadrātiņos, no kuriem vidējo izņem ārā. Process tiek atkārtots bezgalīgi daudzas reizes.



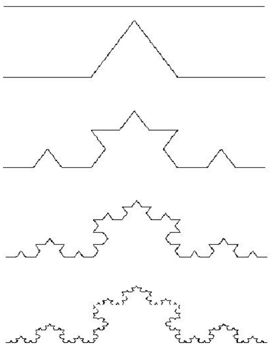
6.zīm. Serpinska paklāja pirmās 4 iterācijas

Mengera sūklis (*Menger Sponge*), tā autors ir Karls Mengers (*Karl Menger*), 1926.gads.



7.zīm. Mengera sūkļa pirmās 3 iterācijas

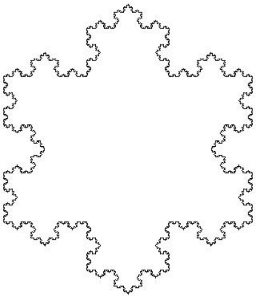
Koha līkne (*Koch Curve*). Zviedru matemātiķis Helge fon Kohs (*Helge von Koch*) to izveidoja 1904.gadā.



8.zīm. Koha līknes veidošana (pirmie četri soļi)

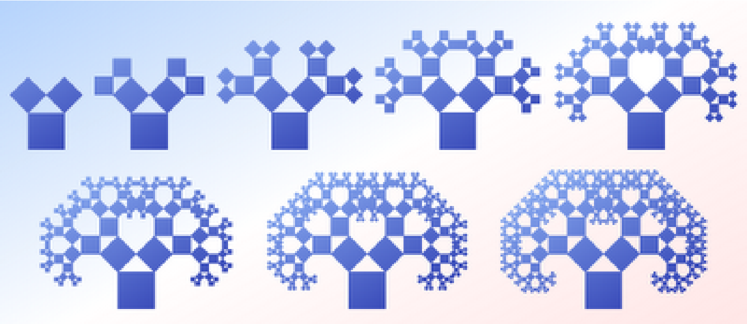
Koha līknei piemīt viena svarīga īpašība — tā ir bezgalīgi gara.

Savietojot kopā 3 Koha līknes, iegūst noslēgtu līkni, kuru sauc par **Koha sniegpārsliņu** (*Koch Snowflake*). Interesants ir fakts, ka sniegpārsliņa acīmredzami ierobežo galīgu laukumu, bet tās perimetrs ir bezgalīgi liels.

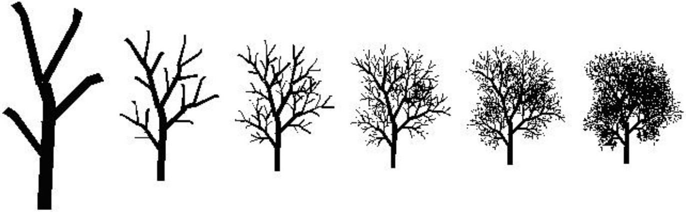


9.zīm. Koha sniegpārsliņa

Pitagora koks (*Pythagorean tree*), 1957.gads, tā autors ir vācu matemātiķis A.E.Bosmans (*Bosman*) (1891-1961).



10.zīm. Pitagora koka konstrukcija



PALDIES PAR UZMANĪBU!