MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITATE
ANNO 1919

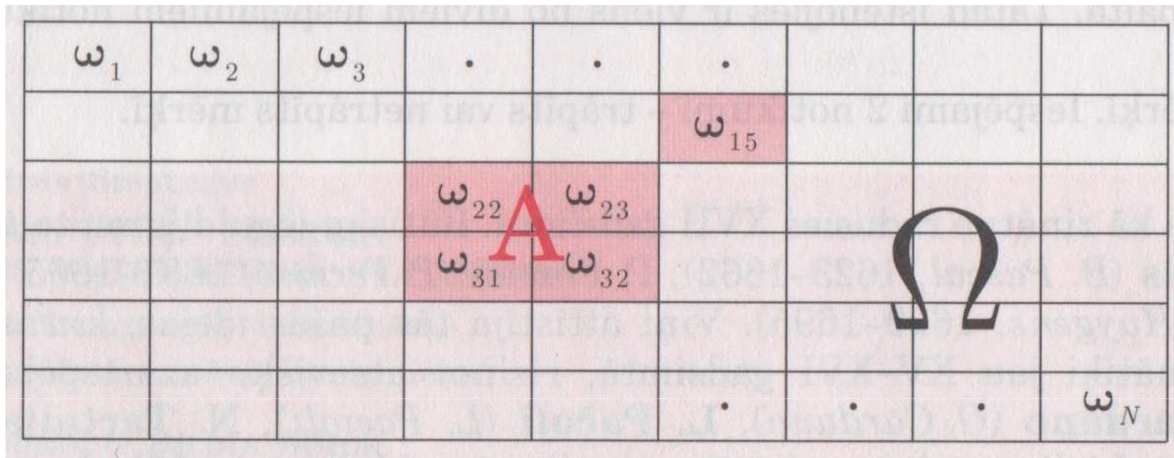
NMS
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

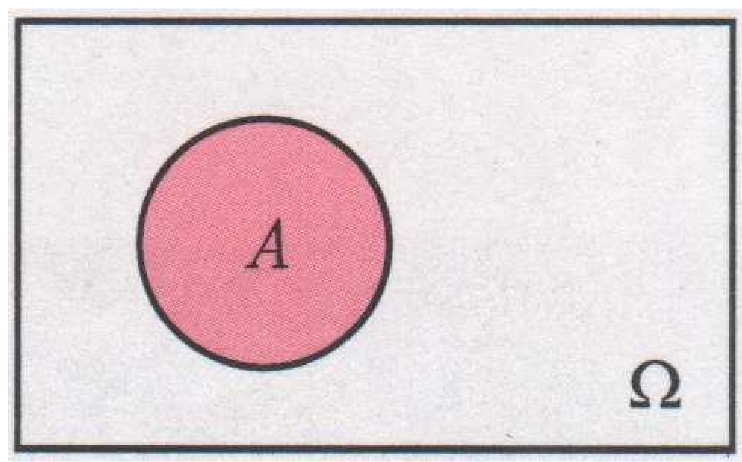
FIZMATI.LV

Klasiskā varbūtību teorija

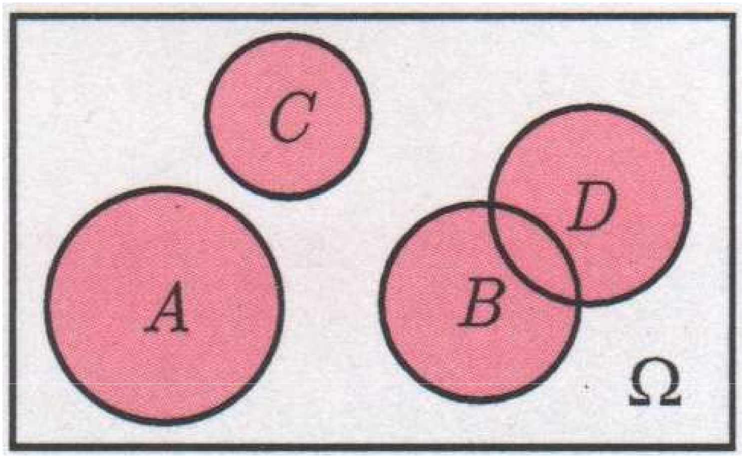
LU FMF lektors
Jānis Smotrovs

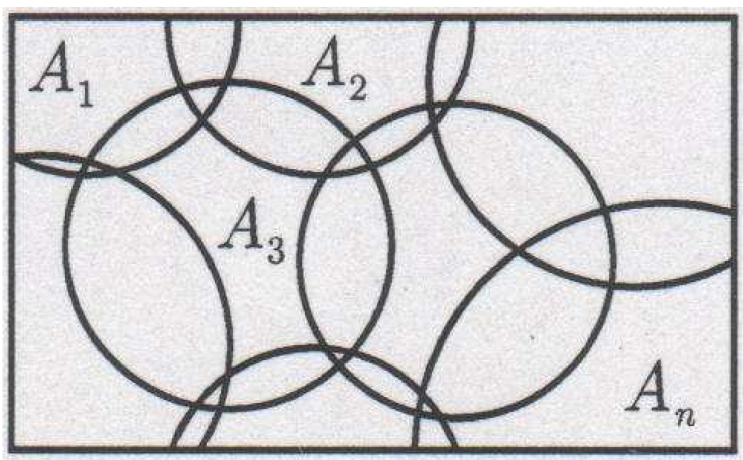
Elementāro notikumu telpa Ω

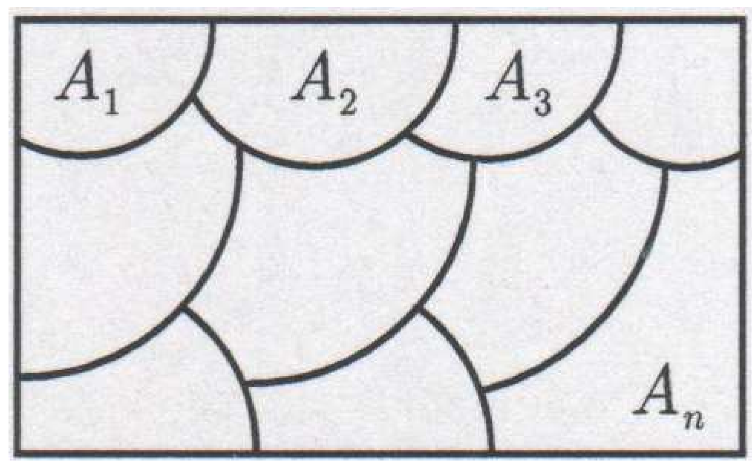




Nesavienojami un savienojami notikumi

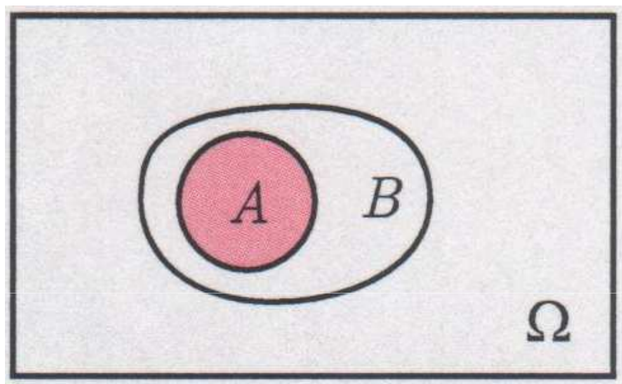




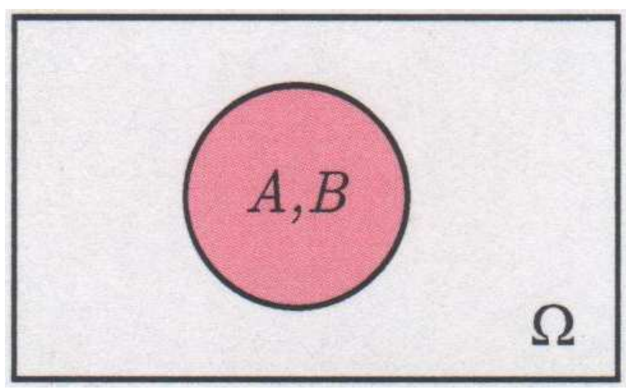


Notikumu algebra

Notikums *A* ir labvēlīgs notikumam *B*



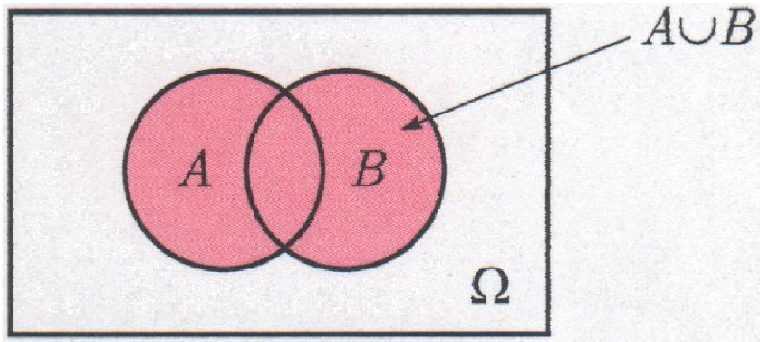
$A \subset B$ jeb $B \supset A$



Vienādi notikumi

$A = B$

Notikumu apvienojums



<u>Īpašības:</u>

$A \cup B \subset \Omega,\ A \cup \varnothing = A,$

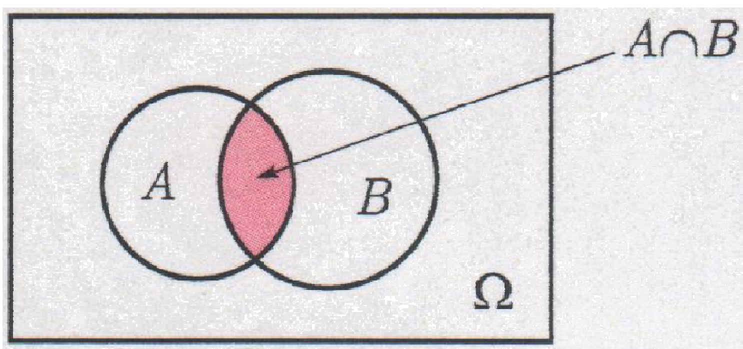
$A \cup \Omega = \Omega,\ \Omega \cup \varnothing = \Omega$

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup A = A$

Notikumu šķēlums



<u>Īpašības:</u>

$A \cap B \subset \Omega,\ A \cap \Omega = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing, \Omega \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cap B = B \cap A;\ A \cap A = A$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

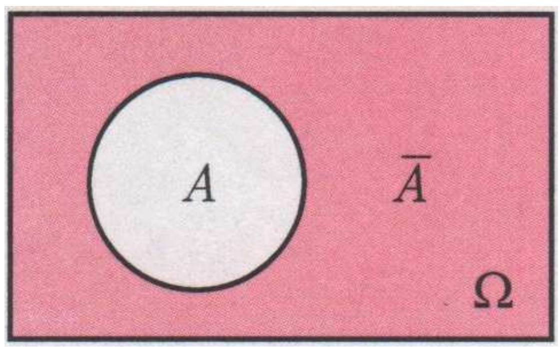
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup B = B$ tad un tikai tad, ja $A \cap B = A$

Pretējais notikums

<u>Īpašības:</u>

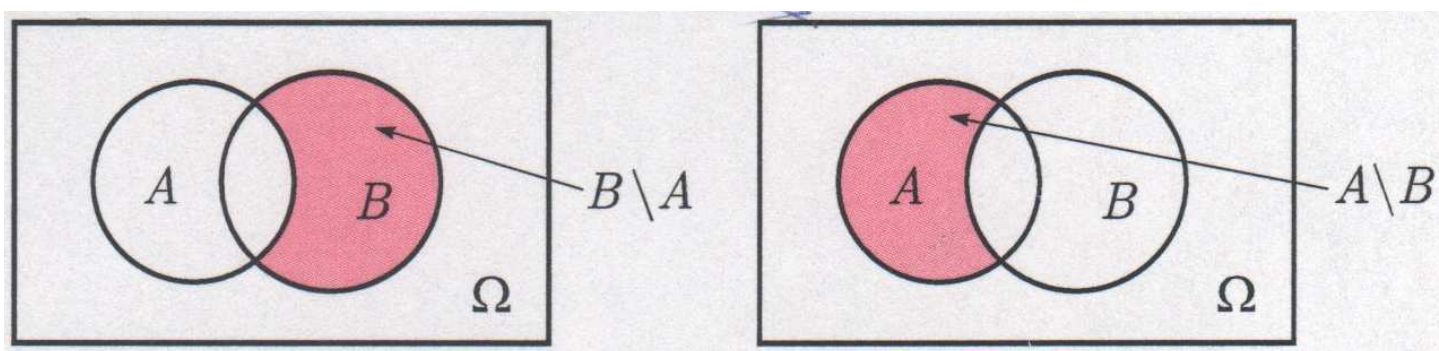


$$A \cap \bar{A} = \varnothing,$$

$$\bar{A} = \Omega \setminus A,$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

Notikumu starpība



$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Likumi

$$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}} = A, \ \ \overline{\varnothing} = \Omega, \ \ \overline{\Omega} = \varnothing$$

$$\mathrm{A} \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup B$$

Vispārinājumi:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} \quad \text{un} \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Paskaidrojumi:

Ja ir doti *n* notikumi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ tad visu šo notikumu **apvienojums** ir

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$

bet **šķēlums**: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n.$

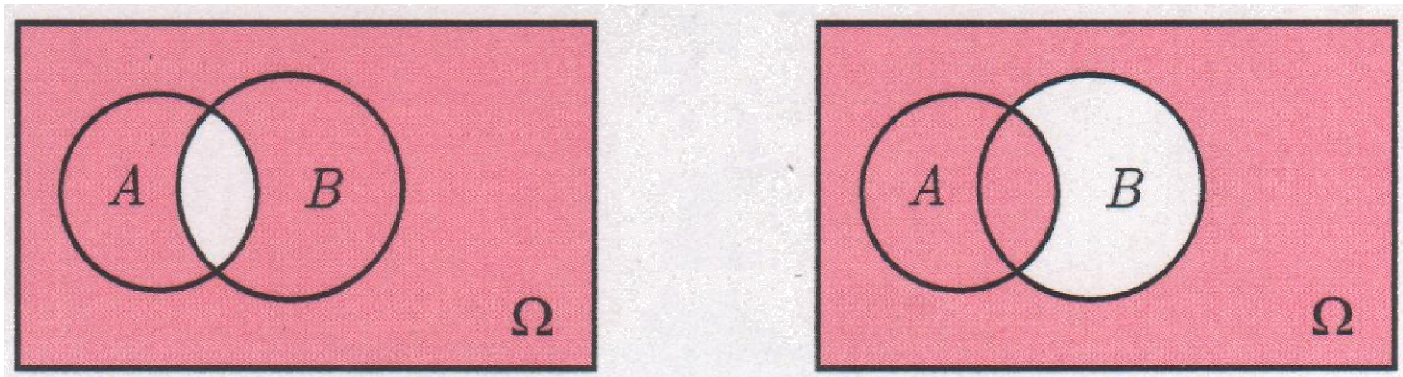
Līdzīgi kā skaitļiem:

Summa: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Produkts jeb reizinājums: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$

<u>Piemērs:</u>

Izteiksim saliktus notikumus:



$$\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega\setminus\left(A\cap B\right)$$

$$A\cup\overline{B}$$

Piemērs: No 52 spēļu kāršu kavas tiek izvilkta viena kārts.

A – «izvilkta ercena kārts»

B – «izvilkts dūzis»

$A \cup B$ – «izvilkta ercena kārts vai dūzis»

$A \cap B$ – «izvilkts ercena dūzis»

$\overline{A} \cap B$ – «izvilkts vai nu kreiča, vai kārava, vai pīķa dūzis»

$\overline{A} \cap \overline{B}$ – «nav izvilkts ne ercens, ne dūzis»

$A \setminus B$ – «izvilkta ercena kārts, kas nav dūzis»

<u>Piemērs:</u> *A*, *B*, *C* – patvaļīgi notikumi telpā Ω.

Uzrakstīt sekojošus notikumus:

1) «No šiem notikumiem iestājas tikai A»

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2) «Īstenojas divi un tikai divi no tiem»

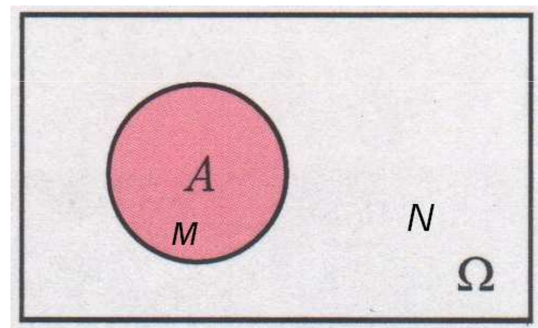
$$\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$$

Varbūtības

1. Klasiskā varbūtība

! Visi iznākumi ir vienlīdziespējami

$$P(A) = \frac{M}{N}$$



M – labvēlīgo iznākumu skaits

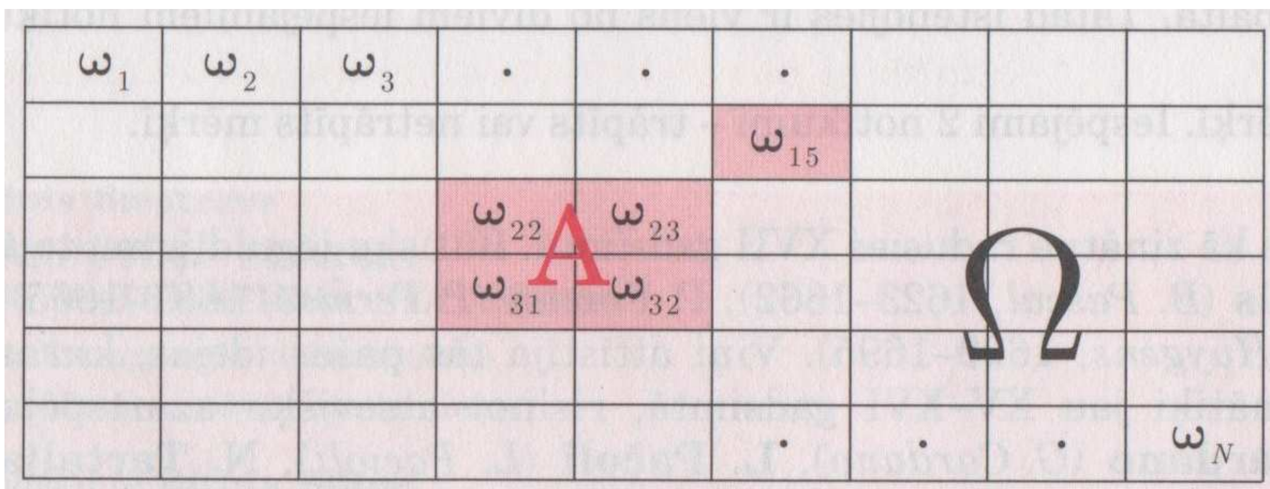
N – visu iznākumu skaits

2. Aksiomātiskā varbūtība

<u>A1</u> Visiem $\omega_i \in \Omega:\ 0 \le P(\omega_i) \le 1,\ i = 1,2,\ldots,N$

<u>A2</u> $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$

<u>A3</u> $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$, visiem $A \subset \Omega,\ P(\varnothing) = 0$



Piemērs: Met 2 simetriskus spēļu kauliņus. Mēģinājuma iznākumi ir uzkritušo punktu summa.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

36 vienlīdziespējami notikumi

Elementārie notikumi (11)	Varbūtības $p_i = P(\omega_i)$
ω_1 – «uzkrīt 2 punkti»	$p_1 = \frac{1}{36}$
ω_2 – «uzkrīt 3 punkti»	$p_2 = \frac{2}{36}$
ω_3 – «uzkrīt 4 punkti»	$p_3 = \frac{3}{36}$
ω_4 – «uzkrīt 5 punkti»	$p_4 = \frac{4}{36}$
ω_5 – «uzkrīt 6 punkti»	$p_5 = \frac{5}{36}$
ω_6 – «uzkrīt 7 punkti»	$p_6 = \frac{6}{36}$
ω_7 – «uzkrīt 8 punkti»	$p_7 = \frac{5}{36}$
ω_8 – «uzkrīt 9 punkti»	$p_8 = \frac{4}{36}$
ω_9 – «uzkrīt 10 punkti»	$p_9 = \frac{3}{36}$
ω_{10} – «uzkrīt 11 punkti»	$p_{10} = \frac{2}{36}$
ω_{11} – «uzkrīt 12 punkti»	$p_{11} = \frac{1}{36}$

Kāda ir varbūtība notikumam *A* – «uzkritušo punktu summa dalās ar 5»?

Kāda ir varbūtība notikumam *A* – «uzkritušo punktu summa dalās ar 5»?

$$P(A) = P(\omega_4) + P(\omega_9) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$$

<u>Piemērs:</u> Uz galda atrodas 8 pāri cimdu, kopā 16 cimdi. Pie galda pēc kārtas pienāk 8 bērni un uz labu laimi izvēlas 2 cimdus. Kāda ir varbūtība tam, ka katram bērnam būs cimdu pāris?

K:

L:

$$M = 8! \cdot 8! \cdot 2^8$$

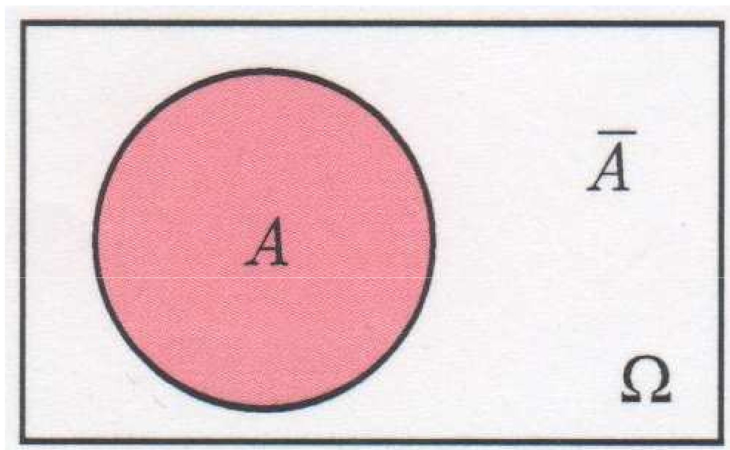
16 cimdi

$$N = 16!$$

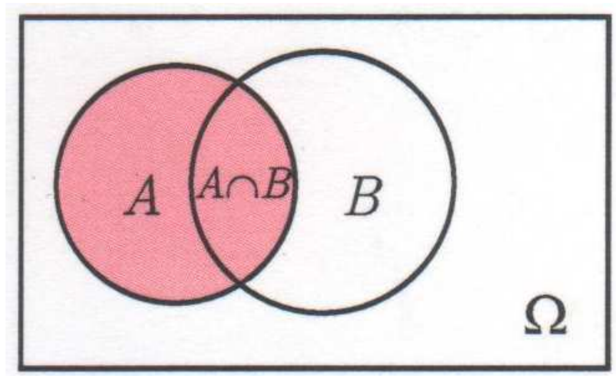
$$P = \frac{8! \cdot 8! \cdot 2^8}{16!} = \frac{384}{19305} \approx 0{,}02$$

Pamatteorēmas

T1 $$P(A)+P(\overline{A})=1$$



T2 $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$



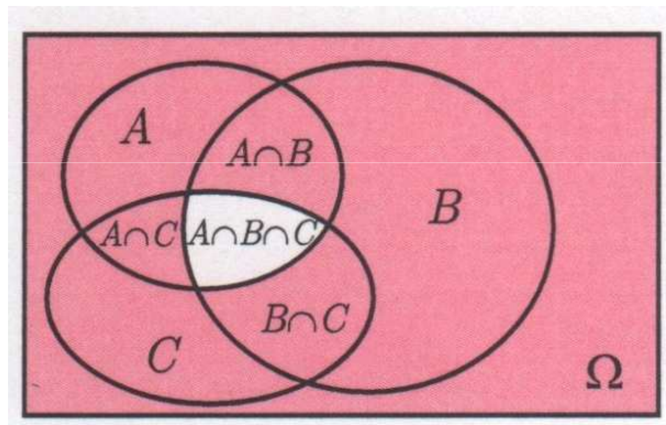
Sekas: 1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2) $P(A \cap B) = 0$ (notikumi ir nesavienojami)

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Vispārinājums:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Piemērs: Uz kastītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100, uz labu laimi izvēlas vienu kastīti. Kāda ir varbūtība tam, ka skaitlis uz kastītes nedalās ne ar 2, ne ar 5 un ne ar 7?

Vieglāk ir atrast pretējā notikuma varbūtību:

A – "skaitlis nedalās ar 2, 5 vai 7"

$\overline{A}$ – "skaitlis dalās ar 2, 5 vai 7"

Atradīsim to skaitļu skaitu, kas dalās ar kādu no šiem skaitļiem.

$$n_2 = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$$

$$n_5 = \left[\frac{100}{5}\right] = 20$$

$$n_7 = \left[\frac{100}{7}\right] = 14$$

$$n_{2;5} = \left[\frac{100}{2\cdot 5}\right] = 10$$

$$n_{2;7} = \left[\frac{100}{2\cdot 7}\right] = 7$$

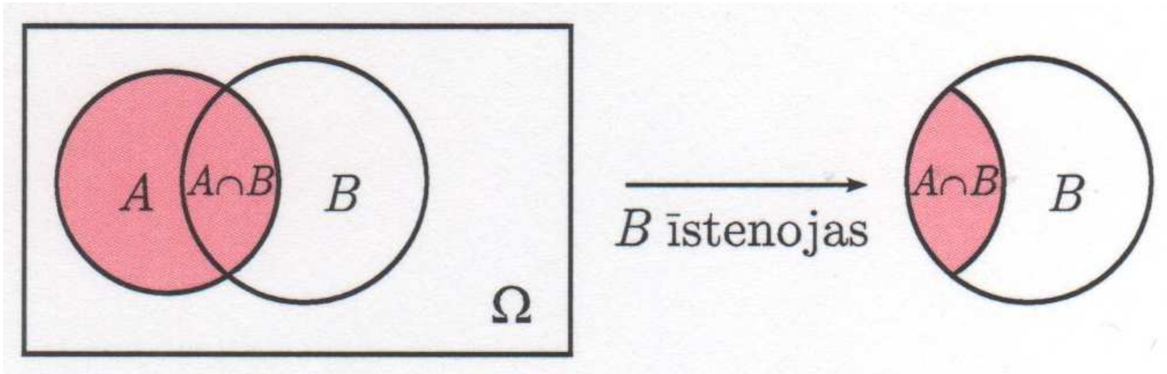
$$n_{5;7} = \left[\frac{100}{5\cdot 7}\right] = 2$$

$$n_{2;5;7} = \left[\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right] = 1$$

$$P(\overline{A}) = \frac{M}{N} = \frac{50+20+14-10-7-2+1}{100} = \frac{85-19}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{17}{50}$$

Nosacītā varbūtība



N iznākumi

M_A ir labvēlīgi A

M_B ir labvēlīgi B

$M_{A \cap B}$ ir labvēlīgi $A \cap B$

$$P(A \mid B) = \frac{M_{A \cap B}}{M_B} = \frac{\frac{M_{A \cap B}}{N}}{\frac{M_B}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\underline{\text{T3}}$ Varbūtību reizināšanas teorēma

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

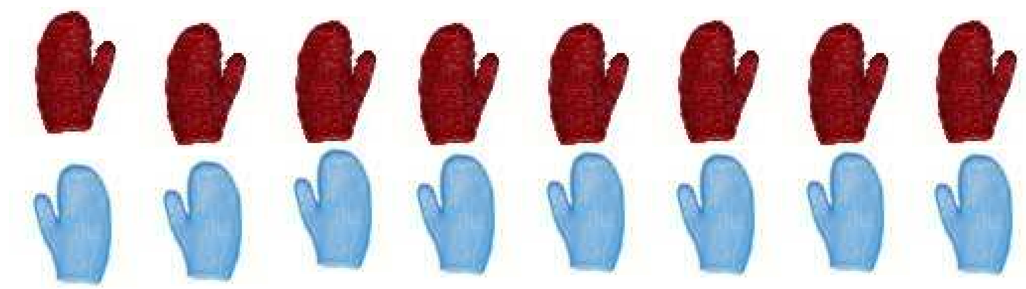
Vispārinājums:

Doti *n* notikumi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

<u>Piemērs:</u> Uz galda atrodas 8 pāri cimdu, kopā 16 cimdi. Pie galda pēc kārtas pienāk 8 bērni un uz labu laimi izvēlas 2 cimdus. Kāda ir varbūtība tam, ka katram bērnam būs cimdu pāris?



A_k – «k-tais bērns paņem cimdu pāri», k = 1, 2, ..., 8
B – «visi bērni ir paņēmuši cimdu pāri»

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_8$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_8 \mid \bigcap_{k=1}^{7} A_k\right) =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{384}{19305} \approx 0{,}02$$

Neatkarīgi notikumi

Definīcija: *A* un *B* sauc par neatkarīgiem notikumiem, ja

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sekas:

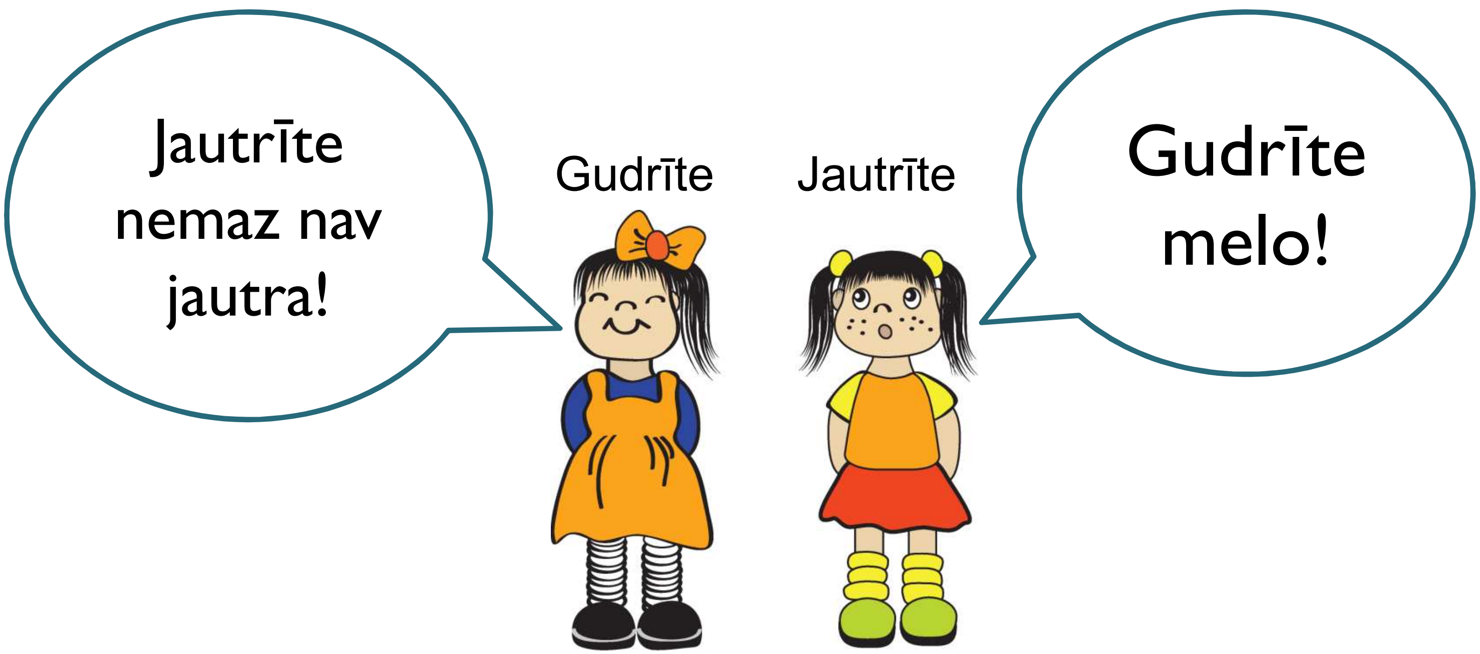
$$P(A) = P(A \mid B) \text{ un } P(B) = P(B \mid A)$$

T4 Ja A un B ir neatkarīgi, tad $\overline{A}$ un B arī ir neatkarīgi.

Sekas: Ja A un B ir neatkarīgi, tad arī $\overline{A}$ un $\overline{B}$, kā arī A un $\overline{B}$ ir neatkarīgi.

Piemērs: Gudrīte saka taisnību 80% gadījumu, bet Jautrīte saka taisnību 75% gadījumu, pie tam neatkarīgi viena no otras.

Gudrīte saka: «Jautrīte nemaz nav jautra», bet Jautrīte atbild: «Gudrīte melo». Kāda ir varbūtība tam, ka Gudrīte ir teikusi taisnību?



Apzīmēsim: A – «Gudrīte teica taisnību»

B – «Jautrīte teica taisnību»

Apzīmējām:

A – «Gudrīte teica taisnību»

B – «Jautrīte teica taisnību»

Noticis ir šāds salikts notikums:

$C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ - «Gudrīte saka taisnību, bet Jautrīte melo» vai «Gudrīte melo, bet Jautrīte saka taisnību».

Jāatrod ! $P(A \mid C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)}$

Aprēķinām $P(A \cap C)$ un $P(C)$.

Tā kā

$$A \cap C = A \cap \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) =$$
$$\left(A \cap \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cup \left(A \cap \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = A \cap \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cap \overline{B},$$

tad *A* un $\overline{B}$ neatkarības dēļ

$$P(A \cap C) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right) =$$
$$= P(A) \cdot (1 - P(B)) = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

Bet $P(C) = P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) =$

$$= P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{1}{5} + P\left(\overline{A}\right) \cdot P(B) =$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

Līdz ar to $P(A \mid C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{1 \cdot 20}{5 \cdot 7} = \dfrac{4}{7} \approx 0{,}57$

Paldies par uzmanību!