Jauno matemātiķu konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Skaitļu mīkla

Aprēķini doto izteiksmju vērtības un iegūtos skaitļus ieraksti krustskaitļu mīklā!

					■	■			■
■			■						■
				■	■		■		
	■	■			■		■	■	■
		■	■						■
			■	■	■	■	■		■
	■						■	■	■
■				■	■				
		■	■	■				■	■
					■	■			■

Horizontāli	Vertikāli
$286 + 402$	$4260 : 5$
$8486 - 2571$	$8805 : 15$
$81 - 23$	$894 : 6$
$11 \cdot 4$	$76 \cdot 57$
$18807 + 24451$	$23398 + 28078$
$26 \cdot 28$	$37 \cdot 2$
$72749 - 20208$	$1121 : 19$
$31 \cdot 3$	$15 + 19$
$624 : 13$	$393 - 112$
$10395 - 2887$	$6 \cdot 7$
$53 \cdot 1$	$71 - 18$
$65151 - 16705$	$9 + 11$
$660 : 10$	$2492 : 14$
$79 \cdot 1$	$255 + 410$
$4325 + 6922$	$129 - 40$
$216034 : 7$	$512 : 8$
$319 - 99$	$104 + 126$

Atrisinājums. Izpildot darbības, iegūst skaitļus, kuru izvietojums parādīts krustskaitļu mīklā.

Horizontāli	Vertikāli
$286 + 402 = 688$	$4260 : 5 = 852$
$8486 - 2571 = 5915$	$8805 : 15 = 587$
$81 - 23 = 58$	$894 : 6 = 149$
$11 \cdot 4 = 44$	$76 \cdot 57 = 4332$
$18807 + 24451 = 43258$	$23398 + 28078 = 51476$
$26 \cdot 28 = 728$	$37 \cdot 2 = 74$
$72749 - 20208 = 52541$	$1121 : 19 = 59$
$31 \cdot 3 = 93$	$15 + 19 = 34$
$624 : 13 = 48$	$393 - 112 = 281$
$10395 - 2887 = 7508$	$6 \cdot 7 = 42$
$53 \cdot 1 = 53$	$71 - 18 = 53$
$65151 - 16705 = 48446$	$9 + 11 = 20$
$660 : 10 = 66$	$2492 : 14 = 178$
$79 \cdot 1 = 79$	$255 + 410 = 665$
$4325 + 6922 = 11247$	$129 - 40 = 89$
$216034 : 7 = 30862$	$512 : 8 = 64$
$319 - 99 = 220$	$104 + 126 = 230$

1	1	2	4	7	■	■	6	6	■
■	4	8	■	4	8	4	4	6	■
5	9	1	5	■	■	3	■	5	8
1	■	■	9	3	■	3	■	■	■
4	4	■	■	4	3	2	5	8	■
7	2	8	■	■	■	■	■	9	■
6	■	5	2	5	4	1	■	■	■
■	2	2	0	■	■	7	5	0	8
5	3	■	■	■	6	8	8	■	■
3	0	8	6	2	■	■	7	9	■

2. Klases pārgājiens

Kādas skolas 6.a un 6.b klases skolēni devās pārgājienā. Katra klase pārgājienu sāka no citas vietas un satikās norunātajā vietā pie ugunskura. No 6.a klases pārgājienā piedalījās 9 skolēni, un viņiem līdzi bija pārtika 5 stundām. Satiekot 6.b klasi, izrādījās, ka viņi nebija paņēmuši līdzi pārtiku. Abas klases līdzi paņemto pārtiku sadalīja savā starpā, pie kam visiem kopā ar to pietika 3 stundām. Cik skolēnu no 6.b klases devās pārgājienā?

Atrisinājums. Ieviešam jēdzienu *pārtikas vienība* – pārtikas daudzums, kas nepieciešams vienam skolēnam vienā stundā. Tā kā no 6.a klases bija 9 skolēni un līdzi paņemtās pārtikas viņiem pietiktu 5 stundām, tad viņiem kopā bija $9 \cdot 5 = 45$ *pārtikas vienības*. Pēc satikšanās ar 6.b klases skolēniem pārtikas, visiem skolēniem pietika 3 stundām, tātad kopējais skolēnu skaits bija $45 : 3 = 15$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka no 6.b klases pārgājienā devās $15 - 9 = 6$ skolēni.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, izmantojot apgriezto proporcionalitāti vai izmantojot darbības ar daļām.

3. Atkārtosim dalīšanu

Atrodi tādu mazāko skaitli A, kam vienlaicīgi izpildās:

- A dalot ar 45, atlikumā iegūst 4;
- A dalot ar 454, atlikumā iegūst 45;
- A dalot ar 4545, atlikumā iegūst 454;
- A dalot ar 45454, atlikumā iegūst 4545.

Atrisinājums. Mazākais skaitlis, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, ir 35641667749.

Piezīme. Tā kā neuzmanības dēļ bijām formulējuši uzdevumu, kura pamatojums (neizmantojot datora palīdzību) ir sarežģīts pamatskolas skolēniem, maksimālais punktu skaits tika piešķirts visiem dalībniekiem, kas bija atraduši skaitli, neskatoties uz to, vai šis rezultāts tika iegūts izmantojot analītiskus spriedumus, datorprogrammu, Excel vai vienkārši uzminēts.

4. Zīmuļi uz skolotājas galda

Skolotājai Marutai uz galda ir viens zils un viens sarkans zīmuļu trauks un vairāki zīmuļi, uz kuriem uzrakstīti naturāli skaitļi tā, ka uz katra zīmuļa ir uzrakstīts tieši viens skaitlis un uzrakstītie skaitļi neatkārtojas. Skolotāja lūdz Lāsmu salikt zīmuļus traukos, ievērojot šādus noteikumus:

- zīmulim, uz kura ir uzrakstīts mazākais skaitlis, jāatrodas sarkanajā traukā;
- nevienā traukā nav zīmuļa, uz kura ir skaitlis, kas ir divu citu uz šajā traukā esošajiem zīmuļiem uzrakstīto skaitļu summa;
- nevienā traukā nav zīmuļa, uz kura ir skaitlis, kas ir divas reizes lielāks nekā skaitlis, kas uzrakstīts uz kāda cita šajā traukā esoša zīmuļa.

a) Parādi, kā, ievērojot skolotājas dotos noteikumus, salikt traukos zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3 un 4.

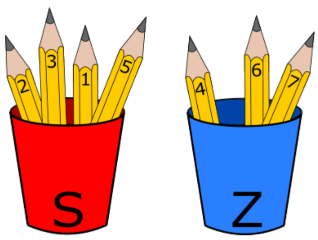
b) Parādi, kā, ievērojot skolotājas dotos noteikumus, salikt traukos zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9.

c) Kāpēc, ievērojot noteikumus, traukos nevar salikt zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5?

d) Ja skolotājai uz galda būs trīs trauki – viens sarkans, viens zils un viens zaļš – vai Lāsma, ievērojot dotos noteikumus, varēs salikt zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 12 traukos tā, ka katrā traukā ir tieši četri zīmuļi?

Piemēram, zīmuļu, uz kuriem uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 7, izkārtojums pa traukiem, kā parādīts 1. att. neatbilst nosacījumiem, tāpēc, ka

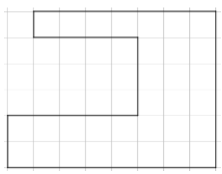
- neizpildās otrais nosacījums: sarkanajā traukā atrodas gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 2, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 3, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 5 un $2 + 3 = 5$,
- neizpildās trešais nosacījums: sarkanajā traukā atrodas gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 1, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 2 un skaitlis 2 ir divas reizes lielāks nekā skaitlis 1.

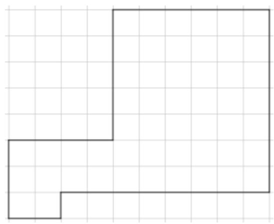


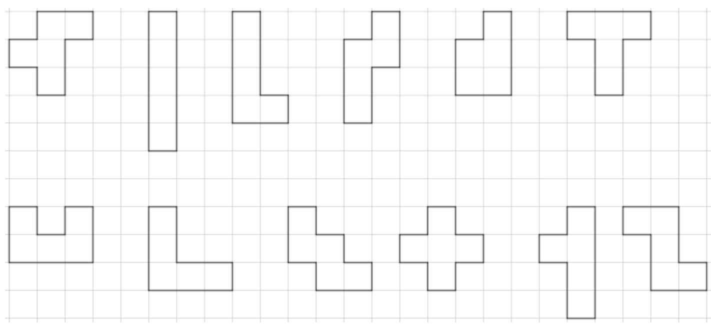
1. att.

Atrisinājums. a) Prasīto var izdarīt, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 1 un 4, bet zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2 un 3.
b) Prasīto var izdarīt, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2, 3, 8 un 9, bet zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 4, 5, 6 un 7.
c) Pēc pirmā nosacījuma sarkanajā traukā jāliek zīmulis ar skaitli 1, tātad zilajā traukā jāliek zīmulis ar skaitli 2, jo 2 ir divas reizes lielāks nekā skaitlis 1 un nevar atrasties kopā ar šo zīmuli (trešais nosacījums). Tā kā $4 = 2 \cdot 2$, tad zīmuli ar skaitli 4 jāliek sarkanajā traukā. Zīmulis ar skaitli 3 jāliek zilajā traukā, jo $1 + 3 = 4$ un tas nevar atrasties vienā traukā ar zīmuli, uz kura uzrakstīts skaitlis 1 (otrais nosacījums). Tā kā $5 = 1 + 4$ un $5 = 2 + 3$, tad zīmuli ar uzrakstītu skaitli 5 nevar ievietot ne zilajā, ne sarkanajā traukā (otrais nosacījums). Esam ieguvuši pretrunu, tātad esam pamatojuši, ka prasīto izdarīt nav iespējams.
d) Jā, prasīto var izdarīt. Piemēram, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 1, 5, 8 un 12, zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2, 6, 7 un 11, bet zaļajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 3, 4, 9 un 10.

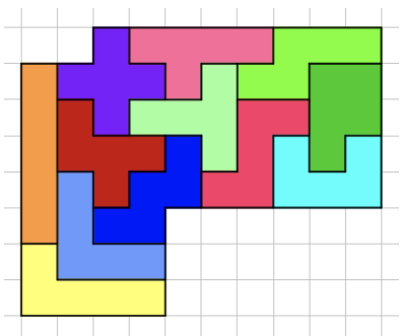
5. Vai vari salikt?
Astoņstūri, kas uzzīmēts uz rūtiņu lapas, sauksim par maģisku, ja tā visas malas atrodas uz rūtiņu līnijām un to garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ja, sākot ar vienu virsotni, astoņstūra malas ir sakārtotas viena pēc otras augošā vai dilstošā secībā, tad šādu astoņstūri sauc par perfektu. Piemēram, 2. att. ir uzzīmēts maģisks astoņstūris, bet 3. att. ir perfekts astoņstūris.
a) Izmantojot visas 4. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, saliec maģisko astoņstūri!
b) Vai, izmantojot visas 4. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, iespējams salikt 3. att. perfekto astoņstūri?
c) Atrodi vēl kādu citu daudzstūri, kuru var salikt no visām 4. att. dotajām figūrām!

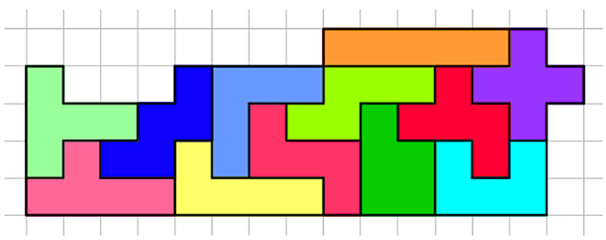

2. att.


3. att.


4. att.

Atrisinājums. a) Saliktu maģisko astoņstūri skat., piemēram, 5. att.
b) Nē, nevar salikt, jo dotā perfektā astoņstūra laukums ir 52, bet visu pentamino laukumu summa ir 60, kas ir vairāk nekā 52.
c) Der jebkurš daudzstūris, kas iegūts, izmantojot visas 4. att. figūras, tā, lai šīs figūras nepārklātos un iegūtajam daudzstūrim nebūtu caurumu, piemēram, skat. 6. att.


5. att.


6. att.

6. Profesora Cipariņa tricikls

Profesora cipariņa triciklam ir trīs vienādas riepas, bet to nolietošanās ātrums atšķiras atkarībā no tā, kur tās novietotas – priekšā vai aizmugurē. Priekšējā riteņa riepa nolietojas pēc 30000 km, bet abas aizmugurējās tricikla riepas nolietojas pēc 20000 km. Braukšanas procesā riepas nolietojas vienmērīgi. Kādu lielāko attālumu Cipariņš var nobraukt ar trīs sākotnējām riepām un vienu rezerves riepu?

Atrisinājums. Nobraucot $1\ \mathrm{km}$, riepa uz priekšā riteņa nolietojas par $\frac{1}{30000}$, bet katras aizmugurējā par $\frac{1}{20000}$. Tātad kopā pēc nobraukta kilometra tiek "iztērēta" $\frac{1}{30000}+\frac{1}{20000}+\frac{1}{20000}=\frac{4}{30000}$ riepa. Tā kā kopā ir 4 riepas, ieskaitot rezerves riepu, tad lielākais attālums, ko iespējams nobraukt, ir $4\cdot\frac{30000}{4}\ \mathrm{km}=30000\ \mathrm{km}$. Tagad tikai jāpārliecinās, ka šādu attālumu iespējams realizēt.

Apzīmēsim riepas ar burtiem A, B, C un D un cikliski mainīsim tās ik pēc $100\ \mathrm{km}$, sekojot šādai shēmai:

Priekšējais ritenis	Aizmugurējais ritenis	Aizmugurējais ritenis	Rezerve
A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

Šādi katra riepa ik pēc $400\ \mathrm{km}$ būs nolietota vienādi, jo katra no tām būs bijusi katrā pozīcijā. Pie tam katra no riepām būs nolietojusi $\frac{4}{300}=\frac{1}{75}$ no savas "dzīves". Tas nozīmē, ka šo ciklu varam atkārtot 75 reizes jeb rezultātā nobraukt $75\cdot 400\ \mathrm{km}=30000\ \mathrm{km}$.

7. Svētku lente

Nākamais gads atzīmē 48. Profesora Cipariņa kluba pastāvēšanas gadadienu. Lai tam sagatavotos, Profesors Cipariņš izveidojis garu papīra lenti, uz kuras uzrakstīti 120 cipari, katrs no kuriem ir vai nu 4, vai 8. Skaitli sauc par palindromu, ja tā pieraksts nemainās, izlasot to no otra gala. Piemēram, palindromi ir $4; 884488$ un 484. Pamatot, ka Profesors Cipariņš šo lenti var sagriezt ne vairāk kā 48 daļās tā, lai uz katra papīra gabaliņa būtu uzrakstīts palindroms.

Atrisinājums. Vispirms sagriezīsim Profesora Cipariņa lenti gabalos pa 5 cipariem. Šādi griežot, iegūsim 24 gabaliņus. Kopā ir iespējami $2^5=32$ gadījumi (jo katru ciparu var izvēlēties 2 veidos), kā varētu būt izkārtoti cipari 4 un 8 uz šiem gabaliņiem. Pamatosim, ka vai nu uz katra no šiem gabaliņiem ir uzrakstīts palindroms, vai arī to var sadalīt divās daļās tā, lai uz abām daļām būtu uzrakstīts palindroms. Simetrijas dēļ apskatīsim 16 iespējamos skaitļus (pārējos 16 skaitļus var iegūt, aizstājot "4" ar "8" un otrādi) un kā tos var sadalīt palindromos.

Skaitlis	Palindromi	Skaitlis	Palindromi
44444	44444	44448	4444 un 8
44484	44 un 484	44488	444 un 88
44844	44844	44848	44 un 848
44884	4 un 4884	44888	44 un 888
48444	484 un 44	48448	4 un 8448
48484	48484	48488	484 un 88
48844	4884 un 4	48848	4884 un 8
48884	48884	48888	4 un 8888

Tātad katru no esošajiem 24 gabaliņiem varam sagriezt ne vairāk kā divos gabaliņos, lai uz katras lapiņas iegūtu palindromu. Šādi rīkojoties, rezultātā mums būs ne vairāk kā 48 gabaliņi.

2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ciparu izteiksmes

Rāmīšos ieraksti ciparus no 1 līdz 9 tā, lai visas vienādības būtu patiesas un viens no cipariem būtu izmantots tieši divas reizes, bet visi pārējie cipari būtu izmantoti katrs tieši vienu reizi!

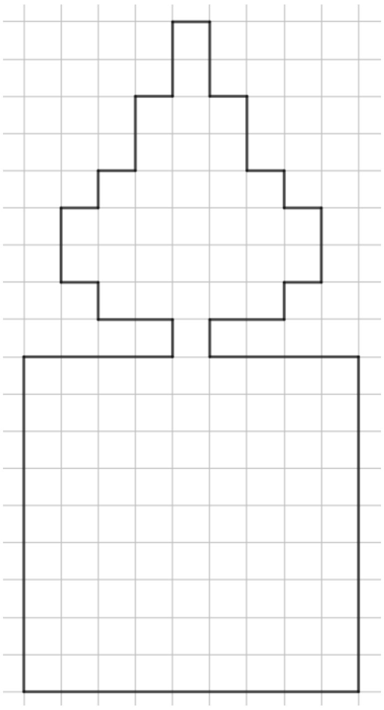
$$\square \cdot \square = \square - \square = \square : \square = \square - \square = \square : \square$$

Atrisinājums. Cipari ierakstāmi, piemēram, šādi:

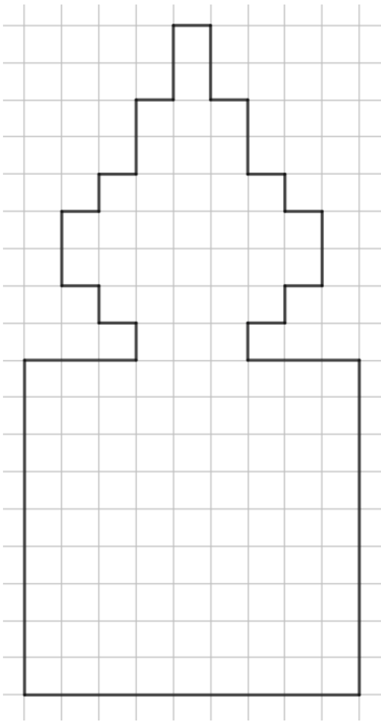
$$\boxed{2} \cdot \boxed{1} = \boxed{7} - \boxed{5} = \boxed{6} : \boxed{3} = \boxed{9} - \boxed{7} = \boxed{4} : \boxed{2}$$

2. Svētku sveces

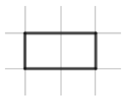
Klāt ir Latvijas svētku mēnesis – novembris. Vai **a)** 7. att., **b)** 8. att. doto sveci var sagriezt 9. att. dotajās figūrās tā, lai neviena rūtiņa nepaliek pāri? *Piezīme.* Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 9. att. figūra var būt pagriezta.



7. att.



8. att.

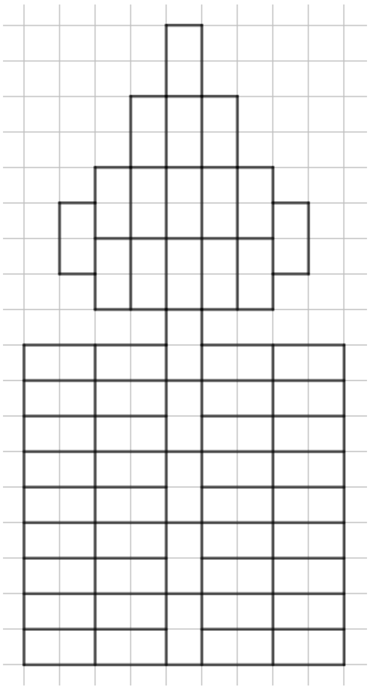


9. att.

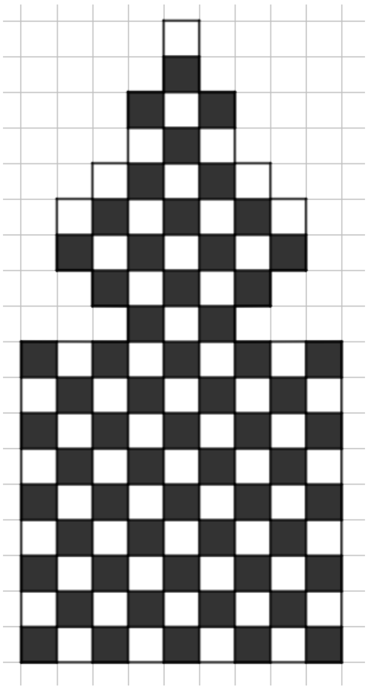
Atrisinājums

a) Prasīto var izdarīt, piemēra, skat. 10. att.

b) Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim visu sveci šaha galdiņa veidā (skat. 11. att.). Melnā krāsā ir nokrāsotas 59 rūtiņas, bet baltā krāsā – 57 rūtiņas. Lai kā svece tiktu griezta, 3. att. dotā figūra vienmēr noklāj vienu melnu un vienu baltu rūtiņu, tātad vienādu skaitu melno un balto rūtiņu. Tā kā melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds, doto sveci nevar sagriezt 3. att. dotajās figūrās.



10. att.



11. att.

3. Halovīna konfektes

Halovīna svētku vakarā pie Annas tantes mājas durvīm pēc kārtas paviesojās 7 bērni. Annas tante katram bērnam teica: “Tu drīksti paņemt tieši pusi no traukā esošajām konfektēm un pēc tam vēl vienu konfekti no atlikušajām.” Kad katrs bērns no trauka bija paņēmis konfektes, trauks bija tukšs. Cik konfekšu traukā bija sākumā, ja zināms, ka katrs bērns varēja paņemt tieši pusi no traukā esošajām konfektēm, tas ir, neviena konfekte nebija jāsalauž vai kā citādi jāsadala?

Atrisinājums. Aplūkosim pretēju procesu: bērni, sākot ar pēdējo un beidzot ar pirmo, pēc kārtas pienāk pie konfekšu trauka un vispirms tajā ieliek vienu konfekti, bet pēc tam traukā esošo konfekšu daudzumu dubulto.

Pirms 7. bērna pienākšanas traukā ir 0 konfekšu. Pēc viņa darbībām traukā ir $(0+1)\cdot 2=2$ konfektes. Pēc 6. bērna pienākšanas traukā ir $(2+1)\cdot 2=6$ konfektes. Līdzīgi iegūstam skaitļu virkni $(6+1)\cdot 2=14$; $(14+1)\cdot 2=30$; $(30+1)\cdot 2=62$; $(62+1)\cdot 2=126$; $(126+1)\cdot 2=254$. Tātad traukā no sākuma bija 254 konfektes.

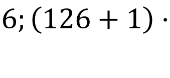
4. Pagalma štābiņi

Vecmāmiņa pa otrā stāva istabas logu vēro, ko viņas mazbērni dara pagalmā – viņi uzbūvējuši sešus “štābiņus” un starp tiem dubļos ieminuši vairākas taciņas. Katra taciņa sākas un beidzas pie kāda “štābiņa”, taciņas var krustoties.

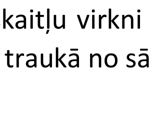
- **a)** Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 2, 2, 4, 4, 4, 4 taciņas?
- **b)** Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 1, 2, 2, 3, 4, 5 taciņas?
- **c)** Vēlāk mazbērni “štābiņus” uzbūvēja arī otrā mājas pusē. Kāds ir lielākais iespējamais uzbūvēto “štābiņu” skaits, ja vecmāmiņa pa logu redz 11 taciņas (katra taciņa savieno divus šajā mājas pusē uzbūvētos “štābiņus”) un no katra “štābiņa” iziet vismaz 3 taciņas?

Atrisinājums

- **a)** Jā, piemēram, skat. 12. att., kur ar punktiem apzīmēti “štābiņi”, bet ar līnijām – taciņas.
- **b)** Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet $1+2+2+3+4+5=17$ ir nepāra skaitlis, tāpēc prasītais nav iespējams.
- **c)** Lielākais iespējamais “štābiņu” skaits, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 7, skat., piemēram, 13. att. Pamatosim, ka vairāk kā 7 “štābiņi” nav iespējami. Tā kā vecmāmiņa pa logu redz 11 taciņas, tad kopā ir $11\cdot 2=22$ taciņu gali. Ja būtu uzbūvēti vismaz 8 “štābiņi” un no katra štābiņa izietu vismaz 3 taciņas, tad kopā būtu vismaz $8\cdot 3=24$ taciņu gali, kas ir vairāk nekā 22. Līdz ar to esam pamatojuši, ka 7 ir lielākais iespējamais uzbūvēto “štābiņu” skaits.



12. att.



13. att.

5. Ģimenes spēle

Brālis un māsa spēlē spēli. Brālis sauc ciparu un māsa ieraksta šo ciparu kādas "$*$" vietā (skat. 14. att.). Tā viņi turpina, kamēr katras zvaigznītes vietā ir ierakstīts kāds cipars.

$$\begin{array}{cccccc} & * & * & * & * \\ - & * & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

14. att.

Brālis cenšas panākt, lai izveidoto skaitļu starpība ir pēc iespējas lielāka, savukārt māsa cenšas ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūto skaitļu starpība ir pēc iespējas mazāka. Pamato, ka

a) māsa var ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūtā starpība nebūtu lielāka kā 4000, neatkarīgi no tā, kādus skaitļus nosauca brālis;

b) brālis var nosaukt ciparus tā, lai iegūtā starpība būtu vismaz 4000 neatkarīgi no tā, kā māsa izkārtoja ciparus zvaigznīšu vietā!

Atrisinājums. Apzīmēsim ciparu "*kolonnas*" k_1, k_2, k_3, k_4 (skat. 15. att.).

$$\begin{array}{ccccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ & * & * & * & * \\ - & * & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

15. att.

Pieņemsim, ka spēlei ir divas fāzes. Otrā fāze sākas tajā brīdī, kad māsa kādu zvaigznīti no kolonnas k_1 aizstāj ar brāļa nosaukto ciparu.

Ja brālis sākumā nosauc mazu ciparu (tas, ir, 0, 1, 2, 3) vai arī lielu ciparu (tas ir, 6, 7, 8, 9), tad māsa nosaukto ciparu ievieto kolonnā k_1 zvaigznīšu vietā (mazo ciparu – pirmajā skaitlī, lielo ciparu – otrajā skaitlī) un nonāk spēles otrajā fāzē, kas viņai nodrošina vajadzīgo – iegūto skaitļu starpība nav lielāka kā 3999, jo lielākais mazināmais var būt 3999. Savukārt, ja brālis sākumā nosauc ciparu 4 vai 5, tad māsa šo ciparu ieraksta kolonnā k_1 (spēle uzreiz pāriet otrajā fāzē) attiecīgi $k_1 = \binom{4}{*}$ vai $k_1 = \binom{*}{5}$. Pēc tam, ja brālis sauc attiecīgi tikai ciparus 0 vai 9, tad māsa tos ieraksta kolonnā k_2, k_3 vai k_4, iegūstot, ka nevar iegūt lielāku starpību kā 4000, jo veidojas situācija $-\frac{4000}{0000}$ vai $-\frac{9999}{5999}$. Savukārt, ja brālis nosauc kādu ciparu, kas nav ne 0, ne 9, tad māsa to ieraksta kolonnā k_1 atlikušās zvaigznītes vietā, nodrošinot, ka skaitļu starpība nav lielāka kā 3999, neatkarīgi no atlikušajiem abu spēlētāju gājieniem. Līdz ar to esam pamatojuši, ka māsa var ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūtā starpība nebūtu lielāka kā 4000, neatkarīgi no tā, kādus skaitļus nosauca brālis, tātad esam pierādījuši uzdevuma a) gadījumu.

Aplūkosim, vai māsa, ievietojot ciparus 4 un 5 kolonnās k_2, k_3, k_4 un kādā sev izdevīgā brīdī pārejot otrajā fāzē, var panākt, ka skaitļu starpība ir mazāka nekā 4000. Lai šādu situāciju nepieļautu, brālim jāuzmana kolonna k_i ar mazāko indeksu i, kurā jau ir ievietots viens cipars vai arī kurā ir divi dažādi cipari:

- ja $k_i = \binom{*}{4}$ vai $k_i = \binom{*}{5}$, tad brālim jāsauc cipars 5;
- ja $k_i = \binom{4}{*}$ vai $k_i = \binom{5}{*}$, tad brālim jāsauc cipars 4;
- ja visas kolonnas ir vienādas vai arī $k_i = \binom{5}{4}$, tad var saukt jebkuru ciparu, piemēram, ciparu 5.

Bīstamā situācija, kad $k_i = \binom{4}{5}$, jo tad ir "*jāaizņemas*" no nākamās šķiras, pie šādas brāļa stratēģijas nav iespējama.

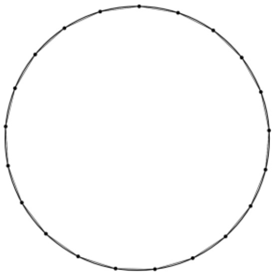
Pēc šādas pirmās fāzes stratēģijas, nonākot otrajā fāzē, brālis tālāk visu laiku var saukt 0, ja kolonnā k_1 cipars ir ievietots pirmajā skaitlī, vai 9, ja cipars ir ievietots otrajā skaitlī. Līdz ar to brālis būs panācis situāciju, kad starpība nav mazāka kā 4000. Tātad esam pamatojuši, ka brālis var nosaukt ciparus tā, lai iegūtā starpība būtu vismaz 4000 neatkarīgi no tā, kā māsa izkārto ciparus zvaigznīšu vietā.

6. Viesības

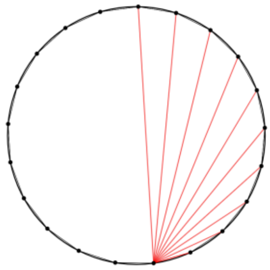
Profesors Cipariņš uz viesībām uzaicinājis 20 draugus. Pie apaļa galda visi sasēdušies tā, lai blakussēdošie būtu tieši 2 metru attālumā viens no otra. Maltītes vidū Profesors Cipariņš izteica šādu apgalvojumu: ja katru klātesošo cilvēku uzskatītu par punktu, tad jebkura slēgta lauzta līnija, kas iziet cauri visiem šiem punktiem vienu reizi, saturēs vismaz trīs posmus ar vienādu garumu. Vai viņam ir taisnība?

Atrisinājums. Profesoram Cipariņam ir taisnība. Kopā ap galdu sēž 21 cilvēks, ieskaitot profesoru Cipariņu. Viņi ir izkārtojušies tā, lai izveidotos regulārs 21-stūris, ap kuru var apvilkt riņķa līniju, kā tas redzams 16. att.

Lauztās līnijas posmi būs hordas starp šie punktiem. Ņemot vērā to, ka mēs strādājam ar simetrisku figūru, tad kopā ir iespējami tikai 10 dažādi garumi hordām, kas veidojas, savienojot šos punktus (skat. 17. att.).



16. att.



17. att.

Tā kā jebkura slēgta lauzta līnija, kas savieno visus punktus, saturēs 21 posmu, un kopā ir 10 iespējami garumi, tad pēc Dirihlē principa varam secināt, ka vismaz 3 posmiem būs vienāds garums.

7. Profesora Cipariņa žetoni

Profesoram Cipariņam ir divu veidu žetoni – balti un melni. Daļu no šiem žetoniem viņš ir salicis 10 trauciņos. Katrā no trauciņiem ir vai nu tikai melni žetoni, vai arī tikai balti žetoni. Var arī gadīties, ka Cipariņš dažus no trauciņiem ir atstājis tukšus. Pie tam šajos trauciņos žetoni izvietoti tā, lai kopumā balto žetonu skaits sakristu ar melno žetonu skaitu. Viņš sev ir izdomājis divus iespējamos gājienus:

1) no katra trauciņa ar baltajiem žetoniem noņemt pa vienam žetonam un vienlaikus katru trauciņu ar melnajiem žetoniem papildināt ar melnu žetonu. Gadījumā, ja kāds no trauciņiem ir tukšs, tad tam tiek pievienots melns žetons;
2) izvēlēties jebkurus trīs trauciņus un iemainīt žetonus tajos uz pretējām krāsām.

Vai ar šiem gājieniem Profesors Cipariņš vienmēr var panākt, ka katrs trauciņš ir tukšs?

Atrisinājums. Pamatosim, ka šis vienmēr nav iespējams. Šajā spēlē baltos žetonus varam interpretēt kā pozitīvus veselus skaitļus un melnos žetonus kā negatīvus veselus skaitļus. Tātad varam iztēloties, ka rīkojamies ar 10 veseliem skaitļiem. Sākotnējais nosacījums, ka kopumā balto žetonu skaits sakrīt ar melno žetonu skaitu, tiek nomainīts ar to, ka visu 10 skaitļu summa ir 0. No šāda skata punkta gājiens 1) no katra skaitļa atņem 1, bet gājiens 2) apmaina zīmi trīs skaitļiem.

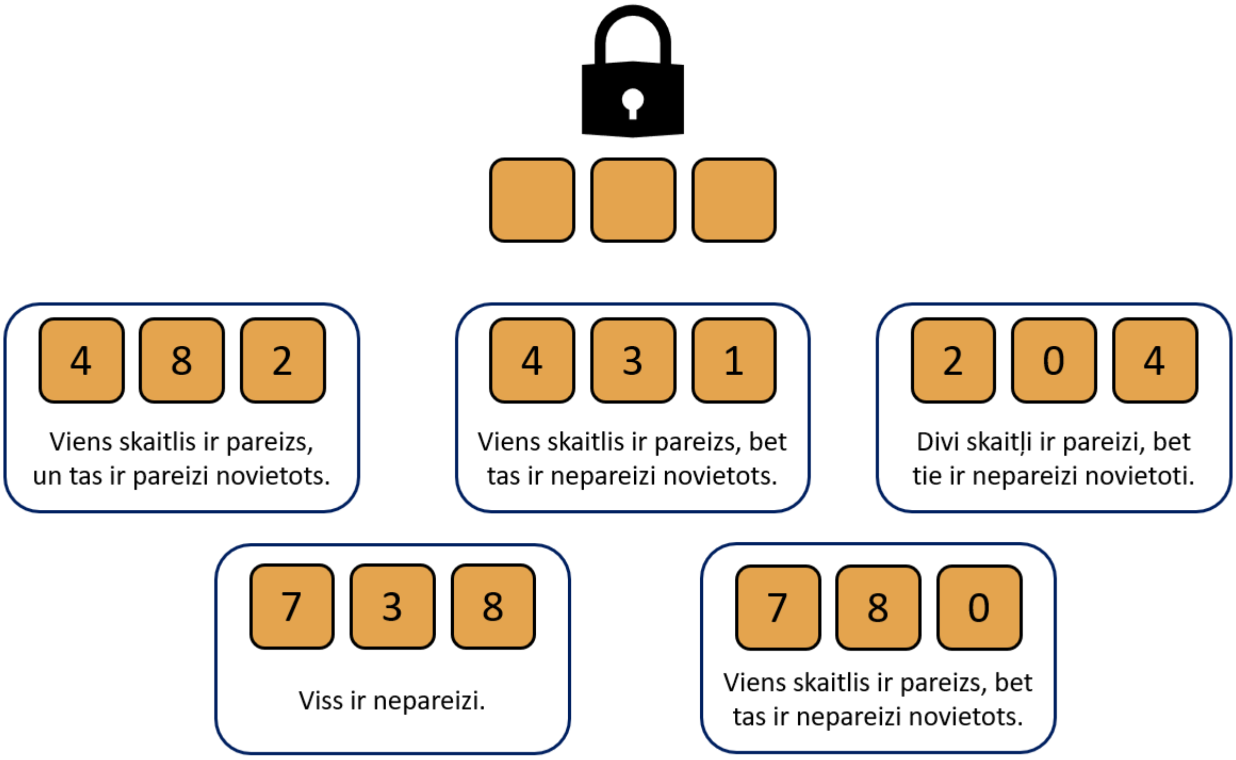
Apskatīsimies uz gadījumu, ja ir doti skaitļi $2;\ -1;\ -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0$. Šis pieraksts ir ekvivalents tam, ka ir viens trauciņš ar 2 baltiem žetoniem, 2 trauciņi ar vienu melnu žetonu un 7 tukši trauciņi. Pamatosim, ka šajā gadījumā nevarēs panākt to, ka visi skaitļi ir 0 (katrs trauciņš ir tukšs). Šim nolūkam atradīsim invariantu, tas ir, īpašību, kas nemainās, izpildot gājienus, bet nepiemīt mūsu vēlamajam rezultātam (visi skaitļi vienādi ar 0). Viens no šādiem invariantiem varētu būt tas, ka mums sākotnēji ir gan nepāra skaitļi, gan pāra skaitļi, bet rezultātā visiem skaitļiem jābūt pāra skaitļiem. Pamatosim, ka patiešām abi iespējamie gājieni vienmēr atstās kādu pāra un nepāra skaitli izvēlētajā piemērā.

Tā kā mums sākotnēji ir vismaz viens nepāra skaitlis un viens pāra skaitlis, tad atņemot 1 no visiem skaitļiem, šiem skaitļiem paritāte mainīsies uz pretējo, tas ir, katrs nepāra skaitlis nomainīsies uz pāra skaitli, bet pāra skaitļi – uz nepāra. Tātad rezultātā mums vēl joprojām būs kāds nepāra un pāra skaitlis. Tāpat arī nav grūti ievērot, ka otrais gājiens nemaina skaitļiem paritāti. Secinām, ka dotajā piemērā nevarēsim nonākt līdz situācijai, kad visi skaitļi (trauciņi) ir vienādi ar 0 (tukši).

3. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ziemassvētku dāvana

Kārlis Ziemassvētku vakarā zem eglītes atrod dāvanu no vecākiem. Kā ierasts, pirms dāvanas saņemšanas, ir jāskaita dzejolītis, tomēr tā vietā Kārlim ir jāatmin vecāku izveidota mīkla, kas redzama zemāk. Dāvana ir iesaiņota tā, ka to var atvērt vienā veidā – ievadot atslēgas pareizo kodu. Palīdzi Kārlim atrisināt mīklu!



Atrisinājums. Mīklas atrisinājums ir kods 0 1 2. No apgalvojuma par skaitļiem 7, 3, 8 seko, ka kodā nav neviens no šiem skaitļiem. No pēdējā apgalvojuma var secināt, ka kodā būs skaitlis 0, bet tas nebūs pēdējais. No pirmā apgalvojuma var secināt, ka kods var būt 4 _ _ vai _ _ 2, jo neder skaitlis 8. No otrā apgalvojuma var secināt, ka neder variants 4 _ _, jo tam jābūt nepareizi novietotam, kā arī neder skaitlis 3. Tātad kods var būt 1 0 2 vai 0 1 2. No trešā apgalvojuma var secināt, ka pareizie skaitļi ir 2 un 0, bet tie ir nepareizi izvietoti, tāpēc neder kods 1 0 2 un mīklas atrisinājums ir 0 1 2.

2. Testu veikšana

Profesors Cipariņš zinātniskā rakstā izlasīja, ka, lai pārbaudītu ūdens kvalitāti, tiek ņemti ūdens paraugi no attiecīgām ūdens tilpnēm, un šajos paraugos tiek ievietota testa lapiņa. Ja šī testa lapiņa nokrāsojas, tad ūdens tilpnē ir baktērijas, kuras sauc par leģionellām. Izlasījis rakstu, profesors Cipariņš nolēma pārbaudīt 25 dažādas ūdens tilpnes. Tā kā profesors iegādājās tikai 10 testa lapiņas, bet paraugus no ūdens tilpnēm var iegūt neierobežotā skaitā, viņš izlēma jaukt vairākus paraugus kopā. Vai profesors Cipariņš var noskaidrot, kurās divās no 25 ūdens tilpnēm ir baktērijas, izmantojot 10 testa lapiņas?

Piemēram, ja, sajaucot 3 ūdens tilpņu paraugus kopā un pārbaudot šo maisījumu, testa lapiņa iekrāsojas, tad kādā no ūdens tilpnēm ir leģionellas baktērijas.

Atrisinājums. Jā, ar 10 testa lapiņām ir iespējams atrast tās divas ūdens tilpnes, kurās ir leģionellas baktērijas. Teiksim, ka paraugs vai to maisījums ir *pozitīvs*, ja testa lapiņa iekrāsojas, ievietojot to paraugā vai to maisījumā. Aplūkosim vienu no veidiem, kā ar 10 testa lapiņām atrast abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām. Vispirms visus 25 ūdens paraugus sajauksim atsevišķos četros maisījumos, kur kopā sajauc 6, 6, 6 un 6 ūdens paraugus, un 1 ūdens paraugs tiek atlikts. Ar **4 testa lapiņām** pārbaudīsim katru no maisījumiem, kuros sajaukti 6 ūdens paraugi. Iespējami divi rezultāti:

1) divi no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvi,
2) viens no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvs.

Aplūkosim <u>pirmo gadījumu</u>, kad divi no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvi. Vispirms izpētīsim vienu no šiem maisījumiem, no attiecīgajām sešām ūdens tilpnēm sajaucot 2 maisījumus, katrā pa trim ūdens paraugiem. Vienu no šiem maisījumiem pārbaudīsim, izmantojot vēl **1 testa lapiņu**. Iespējami divi rezultāti, jo viena no ūdens tilpnēm ar baktērijām atrodas otrā 6 paraugu maisījumā:

- pārbaudītajā maisījumā testa lapiņa iekrāsosies. Tādā gadījumā pozitīvā maisījuma divus no ūdens paraugiem pārbaudīsim ar **2 testa lapiņām**. Ja kāda no tām iekrāsosies, tad attiecīgā ūdens tilpne ir ar leģionellas baktērijām. Ja neviena neiekrāsojas, tad trešā ūdens tilpne ir ar baktērijām.
- pārbaudītajā maisījumā testa lapiņas neiekrāsojas, tātad nepārbaudītajā 3 paraugu maisījumā būs ūdens tilpne ar baktērijām. Tādā gadījumā nepārbaudītā maisījuma divus no ūdens paraugiem pārbaudīsim ar **2 testa lapiņām**. Ja kāda no tām iekrāsosies, tad attiecīgā ūdens tilpne ir ar leģionellas baktērijām. Ja tā neiekrāsojas, tad trešā ūdens tilpne ir ar baktērijām.

Lai vienā no pozitīvajiem 6 paraugu ūdens maisījumiem atrastu to ūdens tilpni, kurā ir leģionellas baktērijas, tiek izmantotas trīs testa lapiņas. Tieši tāpat pārbauda arī otru pozitīvo 6 ūdens paraugu maisījumu. Rezultātā tiek atrastas abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām, izmantojot $4 + 3 + 3 = 10$ testa lapiņas.

Aplūkosim otro gadījumu, kad tikai viens no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvs. Ar **6 testa lapiņām** pārbaudīsim katru ūdens paraugu no pozitīvā sešu paraugu maisījuma. Iespējami divi rezultāti:

- divi no paraugiem ir pozitīvi un tiek atrastas abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām.
- viens no paraugiem ir pozitīvs, tātad viens atliktais ūdens paraugs ir no ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām.

Abos gadījumos abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām tiek atrastas ar $4 + 6 = 10$ testa lapiņām.

3. Ziemassvētku ornamenti

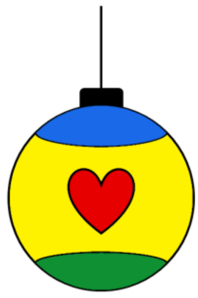
Jauno matemātiķu skolā ir tradīcija – katru gadu skolēni izrotā eglītes skolas telpās ar pašu veidotiem rotājumiem. Šogad visa skola ir vienojusies, ka eglītes rotās ar ornamentiem, kas redzami 18. att., turklāt to krāsošanai izmantos tikai četras krāsas: zaļu, sarkanu, dzeltenu un zilu. Katru ornamenta daļu var krāsot tikai vienā krāsā un jāizmanto visas četras krāsas. Piemēram, viens ornamenta krāsojums redzams 19. att.

a) 7.a klases 25 skolēniem nepieciešams izrotāt savas klases eglīti. Katram skolēnam ir jāizkrāso savs Ziemassvētku ornaments. Vai eglītē noteikti būs ornaments, kas redzams 19. att.?

b) Vai noteikti 7.a klases eglītē būs iekārti vismaz divi vienādi izkrāsoti ornamenti, ja klasē ir 25 skolēni?

c) Šogad visām trim piektajām klasēm ir tas gods izrotāt skolas lielo egli. Vai noteikti lielajā eglē būs iekārti 4 vienādi ornamenti, ja katrā piektajā klasē ir attiecīgi 24, 25 un 26 skolēni?

18. att.



19. att.

Atrisinājums. a) Nē, ne obligāti, jo var gadīties, ka, piemēram, visi klases skolēni izdomā krāsot ornamentus vienādi veidā, kas atšķiras no 19. att. redzamā ornamenta.

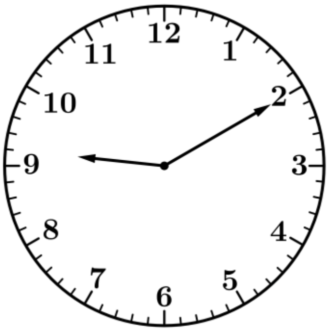
b) Kopā ornamentu var izkrāsot 24 dažādos veidos. Tā kā klasē ir 25 skolēni, tad noteikti būs divi skolēni, kuru ornamenti būs iekrāsoti vienādi.

c) Kopā ornamentu var iekrāsot 24 dažādos veidos. Visās trīs klasēs kopā ir $24 + 25 + 26 = 75$ skolēni. Izdalām skolēnu skaitu ar dažādo ornamentu skaitu un iegūstam $75 : 24 = 3$ atlikumā 3. Tātad noteikti Ziemassvētku eglē būs iekārti vismaz 4 vienādi ornamenti.

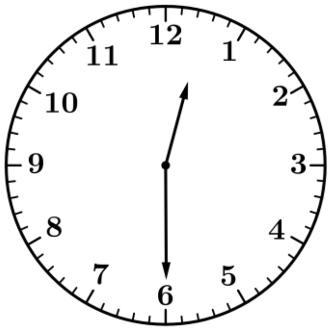
4. Summa pulkstenī

Kad pulkstenis rāda 10 minūtes pāri deviņiem, tad minūšu rādītājs ir novietots pretī skaitlim 2 un stundu rādītājs ir pavirzījies mazliet pāri 9. Par *rādītāju summu* sauksim to divu skaitļu summu, kuriem tuvāk ir novietoti abi rādītāji. Minētajā piemērā (skat. 20. att.), kad pulkstenis rāda plkst. 9.10, *rādītāju summa* ir $2+9=11$.

Ja pulksteņa rādītājs ir tieši pa vidu diviem skaitļiem, *rādītāju summā* ņem to skaitli, kas ir nākamais, ja skatās pulksteņrādītāja kustības virzienā. Piemēram, 21. att. plkst. 12.30, minūšu rādītājs rāda tieši 6, bet stundu rādītājs ir starp 12 un 1, tātad *rādītāju summa* ir $6+1=7$.



20. att.



21. att.

a) Kāda ir *rādītāju summa* plkst. 9.45?

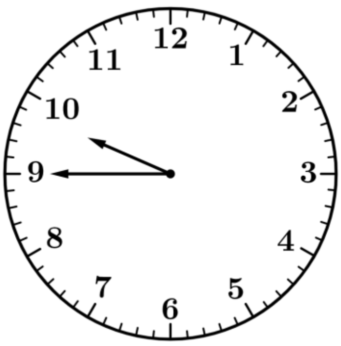
b) Kāda ir *rādītāju summa* plkst. 14.29? Kāda tā ir 4 minūtes vēlāk?

c) Cikos *rādītāju summa* ir 5? Uzraksti četrus piemērus, kurā katrs no laikiem atšķiras vismaz par 30 minūtēm.

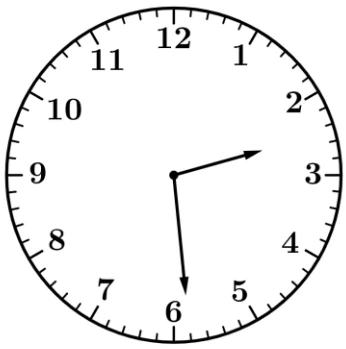
d) Cikos *rādītāju summa* ir 7 laika posmā no plkst. 15.00 līdz 16.00?

Atrisinājums

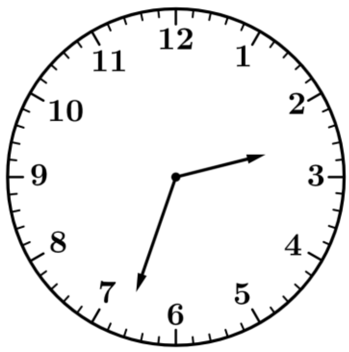
a) Plkst. 9.45 (skat. 22. att.) minūšu rādītājs būs novietots pretī 9, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 9 un 10, turklāt tuvāk 10. Līdz ar to *rādītāju summa* plkst. 9.45 būs $9+10=19$.



22. att.



23. att.



24. att.

b) Plkst. 14.29 (skat. 23. att.) minūšu rādītājs būs novietots starp 5 un 6, turklāt tuvāk 6, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 2 un 3, turklāt tuvāk 2. Līdz ar to plkst. 14.29 *rādītāju summa* būs $6+2=8$.

Kad būs pagājušas 4 minūtes no plkst. 14.29, būs plkst. 14.33. Plkst. 14.33 (skat. 24. att.) minūšu rādītājs atradīsies starp 6 un 7, turklāt tuvāk 7, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 2 un 3, turklāt tuvāk 3. Līdz ar to plkst. 14.33 *rādītāju summa* būs $7+3=10$.

c) Rādītāju summa ir 5, piemēram, plkst. 4.05 ($1+4=5$), plkst. 3.10 ($2+3=5$), plkst. 2.15 ($3+2=5$), plkst. 1.20 ($4+1=5$), kur katrs no šiem laikiem atšķiras vismaz par 30 minūtēm.

Piezīme. Piemērus var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi.

Ievērosim, ka summu 5 var iegūt kā $1+4$, $2+3$, $3+2$ un $4+1$. Šo rezultātu varam izmantot, lai atrastu uzdevumā prasītos laikus. Piemēram, varam izvēlēties, ka pirmais saskaitāmais atbilst minūšu rādītājam, bet otrais saskaitāmais atbilst stundu rādītājam.

Summu $1+4$ dos jebkurš pulksteņa laiks no 4.02.**30** (treknrakstā izceltas sekundes) līdz 4.07.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 4.05.

Summu $2+3$ dos jebkurš laiks no 3. 07.30 līdz 3.12.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 3.10.

Summu $3+2$ dos jebkurš laiks no 2.12.30 līdz 2.17.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 2.15.

Summu $4+1$ dos jebkurš laiks no 1.17.30 līdz 1.22.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 1.20.

d) *Rādītāju summa* ir 7 laika posmā no 15.17.30 līdz 15.22.30 (neieskaitot). Pamatosim, ka citu derīgu pulksteņa laiku laika posmā no plkst. 15.00 līdz 16.00 nav.

No 15.00 līdz 15.02.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $12+3=15$.

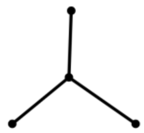
No 15.02.30 līdz 15.07.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $1+3=4$.
No 15.07.30 līdz 15.12.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $2+3=5$.

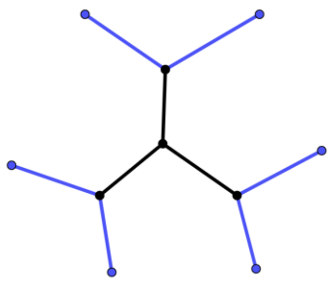
No 15.12.30 līdz 15.17.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $3+3=6$.
No 15.17.30 līdz 15.22.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $4+3=7$.

No 15.22.30 līdz 16.00 *rādītāju summa* ir lielāka nekā 7, jo minūšu rādītājs *rādītāju summā* dod vismaz 5, bet stundu rādītājs – vismaz 3.
Līdz ar to atbilde ir visi derīgie plkst. laiki no 15.17.30 līdz 15.22.30.

5. Sniegpārsliņa

Guna nolēma, ka šogad Ziemassvētkus gaidīs īpašā veidā. Lielas papīra lapas vidū viņa uzzīmēja 25. att. redzamo zīmējumu. Meitene 1. decembrī katram 25. att. zīmējumā aplūkojamajam nogrieznim piezīmēja klāt vēl divus nogriežņus, kā parādīts 26. att. Katrā nākamajā dienā Guna katram iepriekšējā dienā uzzīmētajam nogrieznim piezīmēja klāt vēl divus nogriežņus; tā viņa turpināja līdz pat 24. decembrim (ieskaitot).


25. att.


26. att.

a) Cik nogriežņu meitene kopā būs uzzīmējusi pirmajās trīs decembra dienās?
b) Cik nogriežņu Guna novilks septītajā dienā?
c) Cik nogriežņu Guna novilks 24. decembrī?
Atrisinājums. Ievērosim, ka katru dienu meitene novelk divas reizes vairāk posmu nekā iepriekšējā dienā. Apkoposim šo informāciju tabulā.
a) Guna 1. decembrī uzzīmēja 6 posmus, 2. decembrī uzzīmēja 12 posmus un 3. decembrī uzzīmēja 24 posmus. Līdz ar to pirmajās trīs decembra dienās meitene būs uzzīmējusi $6+12+24=42$ posmus.
b) Septītajā dienā Guna novilks 384 posmus.
c) Guna 24. decembrī novilks 50331648 posmus.

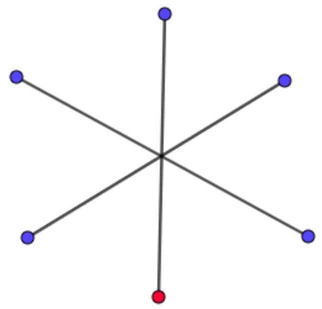
	Posmu skaits
Sākumā	3
1. decembrī	$3\cdot 2=6$
2. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2=12$
3. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=24$
4. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=48$
5. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=96$
6. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=192$
7. decembrī	$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=384$
…	…
24. decembrī	$3\cdot\underbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}_{24\text{ reizes}}=50331648$

6. Piecstūra diagonāles

Pēc veiksmīgajām viesībām Profesors Cipariņš turpināja domāt par daudzstūru diagonālēm. Kādu vakaru pacenšoties, viņam sanāca uzzīmēt dažādus piecstūrus, kuru diagonāles krustojas nevienā, vienā, divos, trīs un piecos punktos. Lai kā viņš arī nemēģinātu, viņam nesanāca uzzīmēt piecstūri, kuram diagonāles krustojas četros vai arī vairāk nekā piecos punktos. Palīdzi Cipariņam uzzīmēt šos piecstūrus vai arī pamato, ka tie neeksistē!

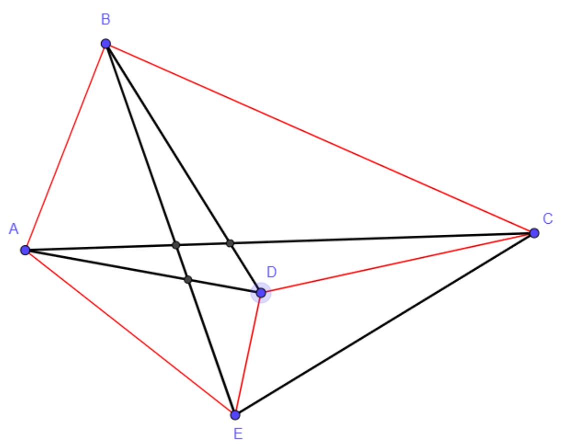
Atrisinājums. Pamatosim, ka abos gadījumos nebūs iespējams uzzīmēt prasītos piecstūrus. Izvēloties 4 dažādas virsotnes piecstūrim, varam kopumā izveidot 5 dažādus četrstūrus no piecstūra virsotnēm. Lai šo saskatītu, mēs faktiski izveidojam četrstūri, izlaižot kādu no 5 piecstūra virsotnēm. Šo četrstūru diagonāles būs arī piecstūru diagonāles. Skaidrs, ja diagonāles krustojas kādā no četrstūriem, tad tās arī krustosies piecstūrī, tāpēc varam apskatīt šos četrstūrus. Tā kā kopā varam izveidot tikai 5 četrstūrus, tad kopumā var būt ne vairāk kā 5 dažādi punkti, kuros krustojas diagonāles.

Ar šādu pašu analīzi varam saprast, ja piecstūris ir izliekts, tad visi četrstūri būs izliekti. Tā kā katrs četrstūris būs izliekts, tad to diagonāles krustosies un veidos 5 punktus. Tas, kāpēc nevar būt mazāks punktu skaits izliektam piecstūrim, saskatāms no tā, ka, ja divas diagonāles krustojas vienā punktā, un vēlamies piespiest kādai citai diagonālei krustoties šajā punktā, tad izveidotos sešstūris (skat 27. att.).



27. att.

Tas nozīmē, ka, lai iegūtu piecstūri, kura diagonāles krustojās mazāk par 5 reizēm, jāapskata ieliekti piecstūri. Ja piecstūris ir ieliekts, tad kāda no tā diagonālēm būs izolēta, t.i., tā nekrustosies ar nevienu citu. Piemēram, ja ieliektais stūris ir D (piemēram, skat 28. att.), tad četrstūri, kuru kāda no diagonālēm ir nogrieznis EC un satur virsotni D, būs arī ieliekti un to diagonāles nekrustosies. Tā kā šiem ieliektajiem četrstūriem jau ir izvēlētas virsotnes C, D un E, tad, lai pabeigtu četrstūri ir divas opcijas – virsotne A vai B. Tātad vienmēr būs vismaz divi no pieciem četrstūriem, kas būs ieliekti un kuru diagonāles nekrustosies, ja sākotnējais piecstūri būs ieliekts. No šī secinām, ka neeksistē piecstūris, kura diagonāles krustojas tieši 4 punktos.



28. att.

7. Čūskas kvadrāts

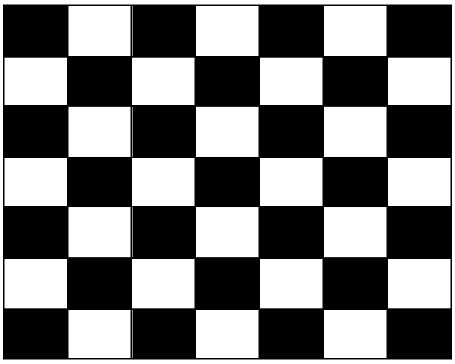
Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Šajās rūtiņās ierakstīti skaitļi no 1 līdz 49 (katrs tieši vienu reizi un katrā rūtiņā tieši viens skaitlis). Pie tam tie izkārtoti tā, lai tie skaitļi, kuru starpība ir 1, atrastos rūtiņās ar kopīgu malu. Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var atrasties vienā rindā vai vienā kolonnā?

Atrisinājums. Vispirms parādīsim piemēru, kā iegūt 5 pirmskaitļus vienā rindā (skat. 29. att.)

3	**2**	**17**	18	**19**	36	**37**
4	1	16	21	20	35	38
5	14	15	22	23	34	39
6	13	26	25	24	33	40
7	12	27	28	29	32	41
8	11	48	47	30	31	42
9	10	49	46	45	44	43

29. att.

Pamatosim, ka vairāk nevar iegūt. Tā kā tie skaitļi, kuru starpība ir 1, atrodas rūtiņās ar kopīgu malu, tad pamīšus tiek izkārtoti pāra un nepāra skaitļi. Ja 7×7 kvadrātu izkrāsojam šaha galdiņa rakstā (skat. 30. att.), tad melnie un baltie lauciņi var atzīmēt attiecīgi nepāra un pāra skaitļus (vai arī otrādi).



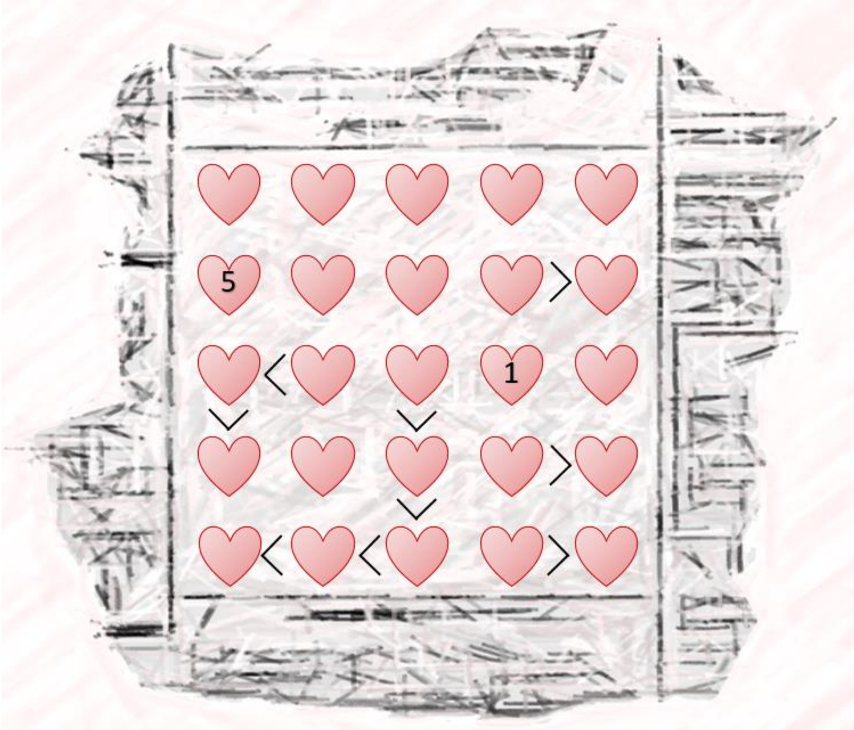
30. att.

Tas nozīmē, ka katrā rindā (vai kolonnā) būs tieši 4 nepāra skaitļi un 3 pāra skaitļi vai otrādi. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tad secinām, ka vairāk par 5 pirmskaitļiem rindā (vai kolonnā) nevar iegūt.

4. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

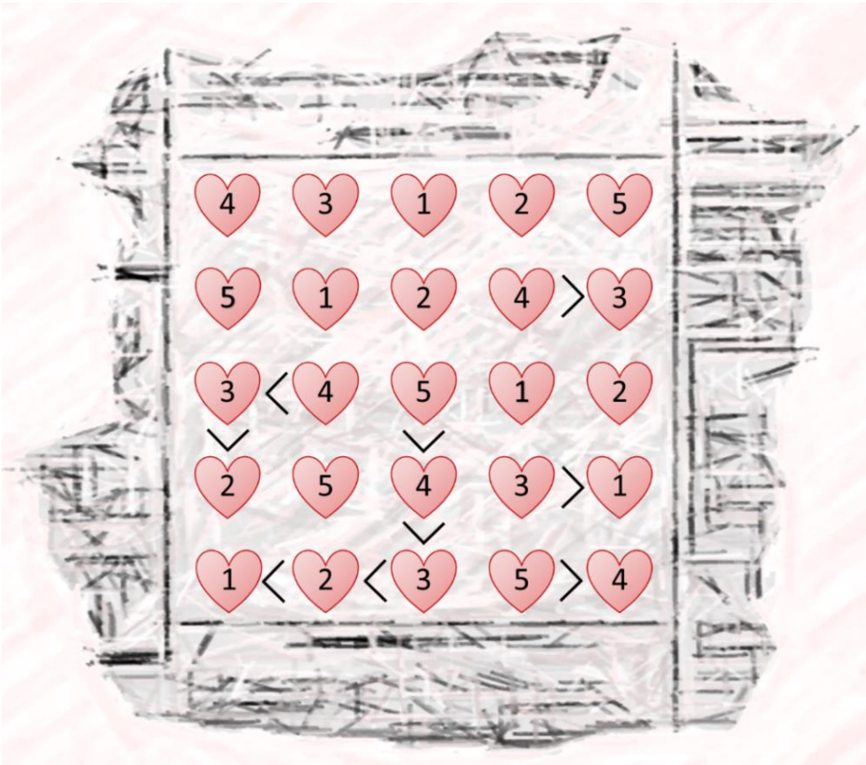
1. Valentīndienas uzdevums

Anniņa avīzē atrada Valentīndienas uzdevumu (skat. 31. att.), kurā piecās rindās un piecās kolonnās ir sakārtotas sirsniņas. Katrā sirsniņā jāieraksta viens cipars no 1 līdz 5 tā, lai dotās nevienādības būtu patiesas un katrā rindā un katrā kolonnā būtu ierakstīti visi cipari no 1 līdz 5. Palīdzi Anniņai izpildīt uzdevumu!



31. att.

Atrisinājums. Ciparus iespējams izvietot tikai vienā veidā, kas redzams 32. att.

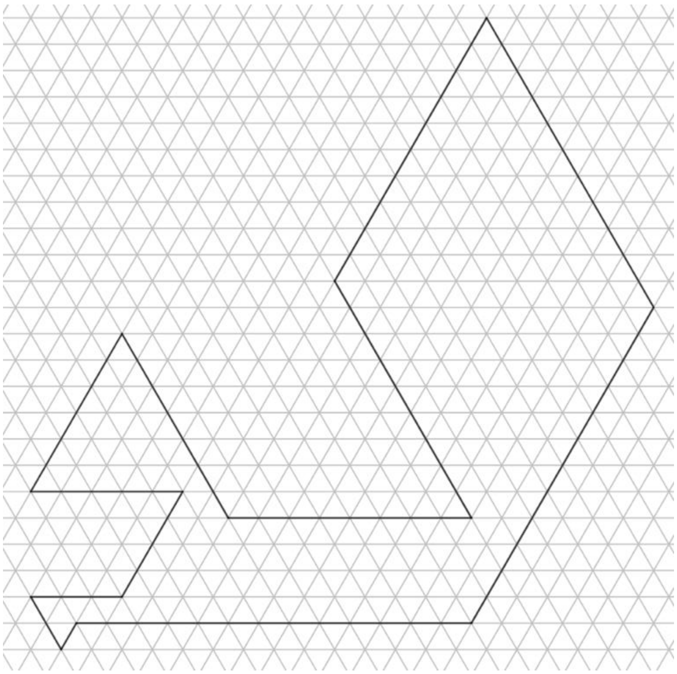


32. att.

2. Perfekts polimonds

Vai trijstūra režģī pa režģa līnijām var uzzīmēt tādu trīspadsmitstūri, kura malu garumi, sākot ar kādu virsotni, ir 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, skat. 33. att.



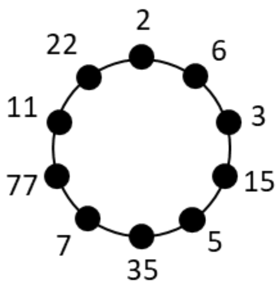
33. att.

3. Aktivitāte klasē

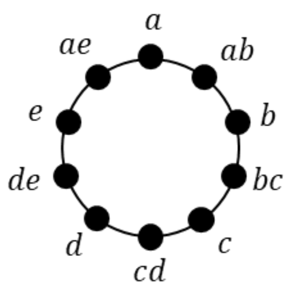
Stundā 10 skolēni sasēdās aplī un katrs uz savas lapas uzrakstīja vienu naturālu skaitli. Izrādījās, ka katrs skolēns uz savas lapas uzrakstīja citu skaitli, turklāt jebkuriem diviem skolēniem, kas sēž blakus, viens no uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar otru uzrakstīto skaitli. Vai noteikti var atrast tādus divus skolēnus, kuri aplī nesēž blakus un kuriem viens no uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar otra skolēna uzrakstīto skaitli?

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Skat., piemēram, 34. att., kurā ar punktiem ir atzīmēti skolēni un viņu uzrakstītie skaitļi. Var redzēt, ka viens skaitlis dalās ar otru tikai tad, ja tie atrodas blakus.

Piezīme. Var iegūt daudzus izvietojumus ar prasīto īpašību. Viens no paņēmieniem ir parādīts 35. att. Vispirms pa riņķa līniju uzraksta dažādus pirmskaitļus a, b, c, d, e, bet pēc tam starp katriem diviem blakus uzrakstītiem pirmskaitļiem uzraksta to reizinājumu.



34. att.



35. att.

4. Profesora Cipariņa skaitlis

Profesors Cipariņš uz tāfeles uzrakstīja lielu skaitli un uzdeva skolēnam uzrakstīt šī skaitļa visus dalītājus. Skolēns kā atbildi pēc kārtas uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 2 līdz 31. Pēc tam profesors pateica, ka divi pēc kārtas sekojoši uzrakstītie skaitļi nav pareizi. Kuri divi uzrakstītie skaitļi nav Profesora Cipariņa dotā skaitļa dalītāji?

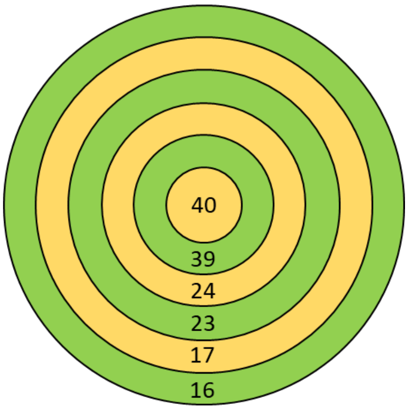
Atrisinājums. Nepareizi uzrakstītie dalītāji ir 16 un 17. Tā kā kļūdaini uzrakstītie skaitļi ir viens pēc otra sekojoši, tad viens no tiem ir pāra un otrs – nepāra skaitlis. Visi skaitļi no 2 līdz 15 neder kā nepareizie dalītāji, jo pretējā gadījumā uzrakstītais skaitlis nedalītos arī ar divreiz lielāku skaitli, kas ir pretrunā ar profesora Cipariņa teikto. Ja skaitļi a un b ir savstarpēji pirmskaitļi (to vienīgais kopīgais dalītājs ir 1) un uzrakstītais skaitlis dalās gan ar a, gan ar b, tad tas noteikti dalās arī ar $a \cdot b$. Jau zināms, ka visi skaitļi no 2 līdz 15 noteikti ir skaitļa dalītāji. Ja skaitli var uzrakstīt kā savstarpēju pirmskaitļu reizinājumu, izmantojot skaitļus no 2 līdz 15, tad tas neder kā nepareizi uzrakstītais dalītājs. Tātad kā aplamie dalītāji neder arī šādi skaitļi:

$18 = 2 \cdot 9,$	$22 = 2 \cdot 11,$	$28 = 4 \cdot 7,$
$20 = 4 \cdot 5,$	$24 = 3 \cdot 8,$	$30 = 2 \cdot 15.$
$21 = 3 \cdot 7,$	$26 = 2 \cdot 13,$	

Tā kā nepieciešami divi pēc kārtas sekojoši skaitļi, der tikai skaitļi 16 un 17.

5. Trīs biatlonisti

Trīs biatlonisti Šāviņš, Trāpiņš un Lociņš šāva mērķī (skat. 36. att.). Katram no viņiem bija seši šāvieni un katra lode trāpīja mērķī. Trāpot centrā, biatlonists saņem 40 punktus, trāpot gredzenos, attiecīgi saņem 39, 24, 23, 17 un 16 punktus, skat. 36. att. Rezultātā Šāviņš ieguva 120 punktus, Trāpiņš ieguva 110 punktus un Lociņš ieguva 100 punktus. Nosaki, kā trāpīja mērķī katrs biatlonists, ja zināms, ka centrā trāpīja tikai viena lode!



36. att.

1. atrisinājums. Biatlonistam, kas trāpīja centrā, ir jāveic vēl 5 šāvieni, tāpēc mazākais punktu skaits, ko viņš var iegūt ir $40 + 5 \cdot 16 = 120$. Tā kā $120 > 110$ (Trāpiņa iegūtais punktu skaits) un $120 > 100$ (Lociņa iegūtais punktu skaits), tad centrā varēja trāpīt tikai Šāviņš, un pārējos šāvienus viņš trāpīja gredzenā ar vērtību 16.

Ja Lociņš vai Trāpiņš būtu trāpījis gredzenā ar vērtību 39, tad iegūtais punktu skaits būtu vismaz $5 \cdot 16 + 39 = 119$, kas nav iespējams.

Mazākais punktu skaits, ko var iegūt biatlonists sešos šāvienos, ir $6 \cdot 16 = 96$. Ja kādā šāvienā biatlonists trāpītu gredzenā, kura vērtība ir 23 vai lielāka, tad viņš iegūtu vismaz $5 \cdot 16 + 23 = 103$. Tā kā $103 > 100$, tad Lociņš trāpīja tikai gredzenos, kuru vērtības ir 16 un 17. Ievērojot, ka $100 - 96 = 4$, secinām, ka četri šāvieni ar vērtību 16 ir jāaizvieto ar vērtību 17, tādā veidā palielinot kopējo punktu skaitu par 4. Tātad Lociņš divas reizes trāpīja gredzenā ar vērtību 16 un četras reizes gredzenā ar vērtību 17.

Ievērojam, ka $16 = 16 + 0$; $17 = 16 + 1$; $23 = 16 + 7$ un $24 = 16 + 8$ kur katrā izteiksmē otrais saskaitāmais parāda, par cik punktiem iespējams palielināt iegūto punktu skaitu, 16 vietā iegūstot citu iespējamo punktu skaitu. Tā kā $110 - 16 \cdot 6 = 14$, tad jānoskaidro, kā skaitli 14 var izteikt kā sešu saskaitāmo (kuru vērtības ir 0; 1; 7; 8) summu:

- $8 + 8 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau divi saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14);
- $8 + 7 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau divi saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14);
- $8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < 14$ (neder);
- $7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < 14$ (neder)
- $7 + 7 + 0 + 0 + 0 + 0 = 14$ (der);
- $7 + 7 + 1 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau trīs saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14).

Tā kā citu derīgu variantu nav, tad Trāpiņš divas reizes trāpīja gredzenā ar vērtību $16+7=23$ un četras reizes gredzenā ar vērtību 16.

2. atrisinājums. Lociņš lodes trāpīja 4 reizes gredzenā ar punktu skaitu 17 un 2 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $4\cdot17+2\cdot16=100$. Trāpiņš lodes 2 reizes trāpīja gredzenā ar punktu skaitu 23 un 4 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $2\cdot23+4\cdot16=110$. Savukārt Šāviņš lodes vienu reizi trāpīja centrā un 5 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $1\cdot40+5\cdot16=120$. Pamatosim, ka šis ir vienīgais veids kā lodes varēja trāpīt mērķī, lai katrs no dalībniekiem iegūtu attiecīgi uzdevumā norādīto punktu skaitu.
Biatlonistam, kas trāpīja centrā, ir jāveic vēl 5 šāvieni, tāpēc mazākais punktu skaits, ko viņš var iegūt ir $40+5\cdot16=120$. Tā kā $120>110$ (Trāpiņa iegūtais punktu skaits) un $120>100$ (Lociņa iegūtais punktu skaits), tad centrā varēja trāpīt tikai Šāviņš, un pārējos šāvienus viņš trāpīja gredzenā ar vērtību 16.
Tā kā ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja centrā, tad viņi sešos šāvienos ieguva attiecīgi 110 un 100 punktus, trāpot lodes tikai gredzenos. Skaidrs, ka

1) tā kā punktu skaits, ko var iegūt trāpot 6 reizes vienā un tajā pašā gredzenā ir $6\cdot16=96$, $6\cdot17=102$, $6\cdot23=138$ vai $6\cdot24=144$, ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja 6 reizes vienā un tajā pašā gredzenā,

2) ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja sešos dažādos gredzenos, jo, ja tas tā būtu, kāds no viņiem būtu trāpījis centrā, bet centrā trāpīja tikai viens no biatlonistiem, kurš, kā mēs jau pamatojām, bija Šāviņš,

3) neviens no biatlonistiem netrāpīja piecos dažādos gredzenos, jo tādā gadījumā iespējamais mazākais punktu skaits ir, ja divas reizes trāpa gredzenā ar mazāko punktu skaitu, bet pārējās reizes – katru savā gredzenā, tātad $16\cdot2+17\cdot1+23\cdot1+24\cdot1+39\cdot1=135$ punkti, kas ir vairāk nekā jebkura biatlonista iegūtais punktu skaits,

4) ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja četros dažādos gredzenos, jo tādā gadījumā iespējamais mazākais punktu skaits ir, ja trīs reizes trāpa gredzenā ar mazāko punktu skaitu, bet pārējās reizes – katra lode savā gredzenā ar nākamo mazāko punktu skaitu, tātad $16\cdot3+17\cdot1+23\cdot1+24\cdot1=112$ punkti, kas ir vairāk nekā ieguva Trāpiņš un Lociņš,

5) ja biatlonists trāpa trīs dažādos gredzenos, tad mazākais iespējamais punktu skaits ir, ja visas lodes trāpa gredzenos ar 16, 17 un 23 punktiem, un šādi ir visi iespējamie gadījumi:

$$\begin{array}{ll}
16\cdot4+17\cdot1+23\cdot1=104 & 16\cdot2+17\cdot2+23\cdot2=112\\
16\cdot3+17\cdot2+23\cdot1=105 & 16\cdot1+17\cdot3+23\cdot2=113\\
16\cdot2+17\cdot3+23\cdot1=106 & 16\cdot2+17\cdot1+23\cdot3=118\\
16\cdot1+17\cdot4+23\cdot1=107 & 16\cdot1+17\cdot2+23\cdot3=119\\
16\cdot3+17\cdot1+23\cdot2=111 & 16\cdot1+17\cdot1+23\cdot4=125
\end{array}$$

Ja punktu summa ir lielāka nekā 110 un kāda no šiem trim gredzeniem ar mazāko punktu skaitu (attiecīgi 16, 17 vai 23) vietā būtu kāds gredzens ar lielāku punktu skaitu (attiecīgi 24 vai 39), arī summas būtu vēl lielākas. Tātad, jāaplūko tikai pirmie četri gadījumi un jāpārliecinās, ka arī tajos summas nevar būt 100 vai 110, nomainot iegūto punktu skaitu kādā no šāvieniem.

$$\begin{array}{l|l|l}
24\cdot4+17\cdot1+23\cdot1=136 & 16\cdot4+24\cdot1+23\cdot1=111 & 16\cdot4+17\cdot1+24\cdot1=105\\
39\cdot4+17\cdot1+23\cdot1=196 & 16\cdot4+39\cdot1+23\cdot1=126 & 16\cdot4+17\cdot1+39\cdot1=120\\
24\cdot3+17\cdot2+23\cdot1=129 & 16\cdot3+24\cdot2+23\cdot1=119 & 16\cdot3+17\cdot2+24\cdot1=106\\
39\cdot3+17\cdot2+23\cdot1=174 & 16\cdot3+39\cdot2+23\cdot1=149 & 16\cdot3+17\cdot2+39\cdot1=121\\
24\cdot2+17\cdot3+23\cdot1=122 & 16\cdot2+24\cdot3+23\cdot1=127 & 16\cdot2+17\cdot3+24\cdot1=107\\
39\cdot2+17\cdot3+23\cdot1=152 & 16\cdot2+39\cdot3+23\cdot1=172 & 16\cdot2+17\cdot3+39\cdot1=122\\
24\cdot1+17\cdot4+23\cdot1=115 & 16\cdot1+24\cdot4+23\cdot1=135 & 16\cdot1+17\cdot4+24\cdot1=108\\
39\cdot1+17\cdot4+23\cdot1=130 & 16\cdot1+39\cdot4+23\cdot1=195 & 16\cdot1+17\cdot4+39\cdot1=123
\end{array}$$

Tā kā neviena no šīm summām nav ne 100, ne 110, ne Trāpinš, ne Lociņš savas lodes netrāpīja trīs dažādos gredzenos.

6) ja biatlonists trāpa divos dažādos gredzenos, tad tikai vienā veidā var iegūt 110 un 100 punktus. Visas iespējamās summas redzamas tabulā:

$16 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 97$	$16 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 98$	$16 \cdot 3 + 17 \cdot 3 = 99$
$16 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 103$	$16 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 110$	$16 \cdot 3 + 23 \cdot 3 = 117$
$16 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 104$	$16 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 112$	$16 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 120$
$16 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 119$	$16 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 142$	$16 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 165$
$17 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 101$	$17 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 100$	$17 \cdot 3 + 23 \cdot 3 = 120$
$17 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 108$	$17 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 114$	$17 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 123$
$17 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 109$	$17 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 116$	$17 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 168$
$17 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 124$	$17 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 146$	
		$23 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 141$
$23 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 131$	$23 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 124$	$23 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 186$
$23 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 132$	$23 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 126$	$24 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 189$
$23 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 139$	$23 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 140$	
$23 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 154$	$23 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 170$	
$24 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 136$	$24 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 128$	
$24 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 137$	$24 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 130$	
$24 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 143$	$24 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 142$	
$24 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 159$	$24 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 174$	
$39 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 211$	$39 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 188$	
$39 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 212$	$39 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 190$	
$39 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 218$	$39 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 202$	
$39 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 219$	$39 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 204$	

Līdz ar to, esam ieguvuši, ka vienīgais veids kā katrs no biatlonistiem varēja iegūt uzdevuma doto punktu skaitu, ir, ja Lociņš un Trāpiņš savas lodes trāpīja divos dažādos gredzenos, tas ir,

- Lociņš četras lodes trāpīja gredzenā ar 17 punktiem un divas reizes gredzenā ar 16 punktiem,
- Trāpinš divas lodes trāpīja gredzenā ar 23 punktiem un četras reizes gredzenā ar 16 punktiem.

6. Epidemioloģiskie krēsli

Aplī stāv 2022 krēsli. Brīdi pa brīdim pienāk kāds cilvēks un apsēžas uz kāda no brīvajiem krēsliem. Tajā pašā brīdī viens no kaimiņiem, ja tāds ir, pieceļas un aiziet. Sākumā visi krēsli ir brīvi. Kāds ir lielākais krēslu daudzums, kas vienlaicīgi var būt aizņemti? (Apsēšanās un piecelšanās brīži netiek aplūkoti.)

Atrisinājums. Pamatosim, ka lielākais aizņemto krēslu skaits ir 2020. Vispirms parādīsim, kā iegūt šo skaitu. Dotos krēslus sanumurēsim no 1 līdz 2022. Tādā gadījumā, varam rīkoties, kā parādīts tabulā.

Apsēžas	1.	3.	2.	4.	3.	5.	4.	…	2020.	2019.	2021.	2020.
Pieceļas			3.		4.		5.	…		2020.		2021.

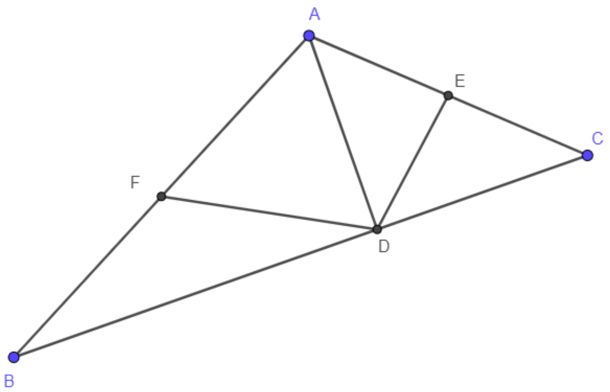
Šādi mēs pakāpeniski esam aizpildījuši visus krēslus, sākot ar 1. un beidzot ar 2020. Palikuši pāri ir tikai divi krēsli un skaidrs, ka šādi mēs nevaram turpināt, jo, lai kur arī kāds cilvēks šajā brīdī apsēstos, viņam vienmēr būs vismaz viens kaimiņš. Šis vēl nav pilns pierādījums tam, ka nevar iegūt lielāku aizņemto krēslu skaitu, jo varbūt mūsu piedāvātā metode nav optimāla.

Pieņemsim, ka pastāv metode, kur ir aizņemts vismaz 2021 krēsls. Tā kā apsēšanās un piecelšanās notiek pakāpeniski, tad jābūt tādam brīdim, kad tiek aizņemti 2020 krēsli, pirms tiek aizņemts 2021. krēsls. Tajā brīdī aplī būtu brīvi tikai 2 krēsli, kas nozīmē, ka brīdī, kad apsēstos nākamais cilvēks, lai kopumā tiktu aizņemts 2021 krēsls, viņam būtu kaimiņš, kas noteikti pieceltos. Tātad iegūstam pretrunu, ka varam iegūt situāciju, kad ir aizņemts vismaz 2021 krēsls.

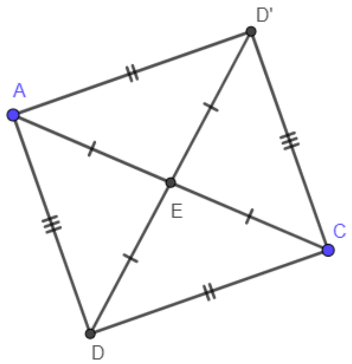
7. Daudzstūru dalīšana

Darbojoties ar piecstūra diagonālēm, Profesors Cipariņš pamanīja, ka dala piecstūri trīsstūros. Ir zināms, ka jebkuru izliektu daudzstūri var sadalīt trīsstūros ar tā diagonālēm, tomēr šie trīsstūri ir ar patvaļīgu izskatu. Profesoru Cipariņu ieinteresēja šāds jautājums – vai daudzstūri var sadalīt vienādsānu trīsstūros, izmantojot ne tikai diagonāles. Palīdzi viņam to noskaidrot!

Atrisinājums. Prasīto vienmēr varēs izdarīt. Pieņemsim, ka sākotnējais daudzstūris ir sadalīts trīsstūros un apskatīsim kādu no tiem. Trīsstūrim ABC varam novilkt augstumu AD pret pamatu BC. Tas izveidos divus taisnleņķa trīsstūrus ADC un ADB. Ja atliekam viduspunktu šo trijstūru hipotenūzām, tad katrā no taisnleņķa trīsstūriem izveidojas divi trīsstūri (skat. 37. att.).



37. att.



38. att.

Pamatosim, ka visi šie trīsstūri ir vienādsānu. Apskatīsim vienu no taisnleņķa trīsstūriem, kas izveidojas, novelkot augstumu. Piemēram, mēs varam papildināt trīsstūri ADC līdz taisnstūrim, atliekot punktu D', lai $AD' \parallel DC$ un $AD \parallel D'C$. Zināms, ka taisnstūra diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tātad $EA = EC = ED = ED'$ (skat. 38. att.). No šī secinām, ka trīsstūri ADE un CED ir vienādsānu.

Tātad, ja sākotnējo n-stūri sadala $(n-2)$ trīsstūros, izmantojot diagonāles, tad to noteikti var sadalīt $4(n-2)$-os vienādsānu trīsstūros.

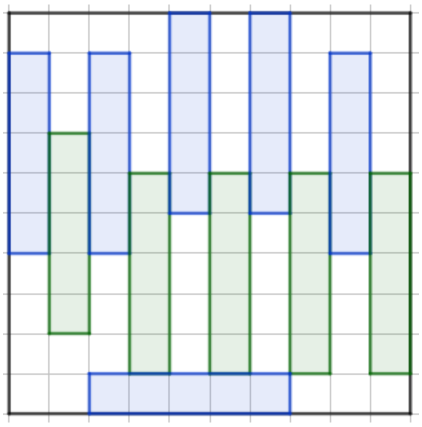
5. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Kuram taisnība?

Alise apgalvo, ka 10×10 rūtiņu kvadrātā, kurā ir novietoti 11 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas, noteikti var ievietot vēl vienu šādu taisnstūri, kas nepārklājas ar jau ievietotajiem. Kristaps uzstāj, ka vienmēr to izdarīt nevar. Kuram no abiem ir taisnība?

Piezīme. Taisnstūri ir novietoti tā, ka to malas iet pa kvadrāta rūtiņu malām, taisnstūri nepārklājas un neiziet ārpus dotā kvadrāta.

Atrisinājums. Kristapam ir taisnība, jo var atrast tādu taisnstūru izkārtojumu, ka dotajā kvadrātā nevar ievietot vēl vienu taisnstūri tā, lai tas nepārklātos ar citiem jau ievietotajiem taisnstūriem (skat. 39. att.).



39. att.

2. Skaitļa cipari

Trīsciparu skaitlī desmitu cipars ir vienāds ar pārējo divu ciparu reizinājumu, turklāt pārējie divi cipari ir pirmskaitļi. Zināms, ka dotā skaitļa un tā simetriskā skaitļa starpība ir 99. Kāda ir šī skaitļa ciparu summa?

Piebilde. Par skaitļa simetrisko skaitli sauc skaitli, kuram cipari ir uzrakstīji pretējā secībā. Piemēram, skaitļa 127 simetriskais skaitlis ir 721.

Atrisinājums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 11. Dotais skaitlis var būt 263 vai 362. Tie abi ir viens otra simetriskie skaitļi un to starpība ir 99, un abu skaitļu ciparu summa ir 11. Pamatosim, ka šī ir vienīgā iespējamā atbilde.

Divi no trīs cipariem ir pirmskaitļi, tie var būt 2, 3, 5 vai 7. Tā kā desmitu cipars ir pārējo divu ciparu reizinājums, tad simtu un vienu cipars var būt tikai 2 vai 3, jo pārējo reizinājums pārsniegs 9. Tādā gadījumā vienīgie derīgie varianti ir 242, 263, 362, 393. Aplūkosim katra skaitļa un tā simetriskā skaitļa starpību.

$$242 - 242 = 0$$
$$362 - 263 = 99$$
$$393 - 393 = 0$$

Redzams, ka der tikai skaitļi 263 un 362, lai to starpība būtu 99.

3. Skaitļu virkne

Profesors Cipariņš skolēniem vadīja nodarbību par interesantām virknēm, kurām katru nākamo locekli iegūst kā iepriekšējo divu virknes locekļu nenulles ciparu reizinājumu, piemēram, 3; 2; 6; 12; 12; 4; …

Šādas virknes viegli aplūkot un pētīt ar datorprogrammu palīdzību, bet nodarbības laikā profesors Cipariņš skolēniem izstāstīja, ka eksistē arī citas risināšanas metodes. Atrisini dotos uzdevumus un apraksti risināšanas metodi, kurā nav jāizmanto palīgierīces:

a) Kāda ir pirmo 2022 virknes locekļu summa, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 10?

b) Kāds ir 2022. virknes loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 4?

c) Cik reizes b piemērā dotajā virknē parādās cipars 9, ja ir uzrakstīti tikai tās pirmie 2022 locekļi?

Atrisinājums.

a) Dotā virkne ir 1; 10; 1; 1; … Tās visi pirmie 2022 locekļi ir vienādi ar 1, izņemot otro, kas ir 10. Tātad, pirmo 2022 locekļu summa ir $2021 \cdot 1 + 10 = 2021 + 10 = 2031$

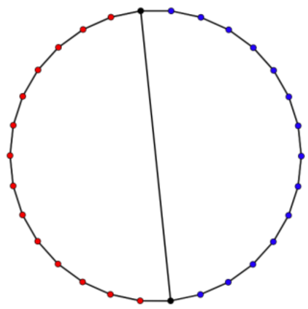
b) Dotā virkne ir 1, 4, 4, 16, 24, 48, 256, 1920, 1080, 144, 128, 256, 960, 3240, 1296, 2592, 19440, 25920, 25920, 32400, 4320, 576, **5040, 4200, 160, 48, 192, 576, 3780, 35280, 40320, 5760,** 5040, 4200, 160, 48, 192, 576, 3780, 35280, 40320, 5760,…
Ievērojam, ka šai virknei ir periods, kas sastāv no 10 locekļiem (iekrāsots treknrakstā), bet pirmie 22 skaitļi neietilpst periodā. Tātad līdz 2022. virknes loceklim tieši $(2022 - 22) : 10 = 200$ reizes būs uzrakstīti visi perioda skaitļi. Līdz ar to 2022. loceklis būs perioda pēdējais skaitlis jeb 5760.
c) Lai noskaidrotu, cik reizes cipars 9 parādās b) piemērā dotās virknes pirmajos 2022 locekļos, jāsaskaita, cik reizes cipars 9 parādās, pirms sākas periods, un tam jāpieskaita cipara 9 skaits periodā, kas pareizināts ar periodu skaitu līdz 2022. loceklim. No b) piemēra zinām, ka līdz 2022. loceklim perioda skaitļi ir uzrakstīti tieši 200 reizes. Tas nozīmē, ka b) piemēra dotajā virknē $7 + 1 \cdot 200 = 207$ reizes parādās cipars 9.

4. Lieldienu olas

Lieldienās satikās sešas māsīcas, lai apmainītos ar iepriekšējā vakarā nokrāsotajām olām. Katrai meitenei bija 6 olas un katra no viņām uzdāvināja dažas olas citām (dāvanā saņemtās olas tālāk nedāvināja). Rezultātā viņām visām bija atšķirīgi olu daudzumi. Vai var gadīties, ka katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās?
Atrisinājums. Nē, nevar. Pierādīsim no pretējā, tāpēc pieņemsim, ka tomēr katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās.
Ja kādai no meitenēm beigās bija ne vairāk kā 3 olas, tad vismaz $6 - 3 = 3$ olas viņa uzdāvināja citai. Bet tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu nekā viņai bija sākumā. Tātad katrai no māsīcām bija vairāk nekā 3 olas jeb vismaz 4 olas. No nosacījuma, ka visām māsīcām beigās bija atšķirīgi olu daudzumi, seko, ka kopā visām meitenēm beigās bija vismaz $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ olas (saskaitām mazākos iespējamos 6 dažādos naturālos skaitļus, kas ir vismaz 4). Bet māsīcām sākumā bija $6 \cdot 6 = 36$ olas. Tā kā $39 > 36$, esam ieguvuši pretrunu, līdz ar to pieņēmums ir nepareizs un katra no māsīcām nevarēja uzdāvināt citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās.

5. Kura komanda uzvarēs?

Aplī izvietoti 30 krēsli, un 32 skolēni ir sadalījušies divās komandās, katrā pa 16 skolēniem. Katrai komandai ir astoņas virves un katra no komandām pamīšus veic gājienu. Vienā gājienā divi skolēni no vienas komandas paņem virvi un apsēžas katrs savā krēslā tā, lai viņu virve nekrustotu jau kādu esošu virvi starp citiem diviem skolēniem. Apsēžoties skolēni virvi nostiepj tā, lai tā veidotu taisnu līniju starp abiem skolēniem. Kura komanda – pirmā vai otrā – vienmēr varēs veikt pēdējo gājienu, tādējādi uzvarot?
Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmā komanda.
Attēlosim krēslus kā punktus uz riņķa līnijas un virves starp diviem skolēniem kā nogriežņus. Pirmajā gājienā pirmās komandas diviem skolēniem jāapsēžas tā, lai virves (nogriežņa) katrā pusē paliktu 14 krēsli (punkti) (skat. 40. att.).



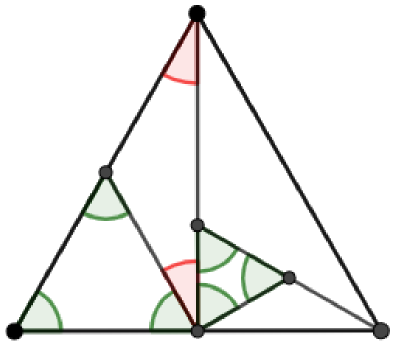
40. att.

Katrā savā nākamajā gājienā pirmās komandas diviem skolēniem jāapsēžas simetriski otrās komandas pēdējiem diviem skolēniem attiecībā pret 40. att. novietoto nogriezni, tātad arī nogriežņi (virves) būs simetriskas pret pirmo nogriezni (virvi). Ja otrā komanda varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmā komanda to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrai komandai un tā zaudēs.

6. Trīsstūra dalīšana

Profesors Cipariņš, darbojoties ar daudzstūriem, veiksmīgi spēja sadalīt patvaļīgu trīsstūri vairākos vienādsānu trīsstūros. Šoreiz viņš vēlas sadalīt vienādmalu trīsstūri piecos dažādos vienādsānu trīsstūros. Vai to var izdarīt?

Atrisinājums. Jā, var. Piemēram, skatīt 41. att.

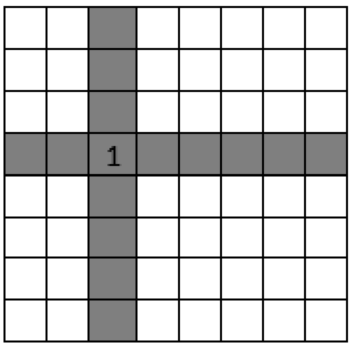


41. att.

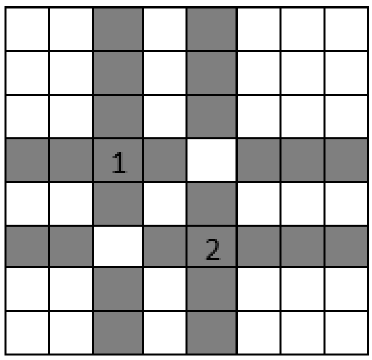
Leņķi 41. att., kas iezīmēti ar zaļu, ir $60°$, bet ar sarkanu – $30°$. Nav grūti pārliecināties, ka 41. att. trīsstūris sadalīts dažādos trīsstūros, jo platleņķu vienādsānu trīsstūri balstās uz dažādām malām.

7. Krustu kvadrāts

Dots 8×8 rūtiņu kvadrāts, kurā katra rūtiņa ir nokrāsota balta. Katrā gājienā var izvēlēties kādu rūtiņu un mainīt tās kolonnas un rindas, kurās atrodas izvēlētā rūtiņa, katras rūtiņas krāsas uz pretējo, t.i., ja tā bija balta, tad uz melnu, un, ja tā bija melna, tad uz baltu. Kāds ir mazākais skaits gājienu, lai sākotnējo balto kvadrātu padarītu melnu? Pirmā un otrā gājiena piemēram skatīt attiecīgi 42. att. un 43. att.



42. att.

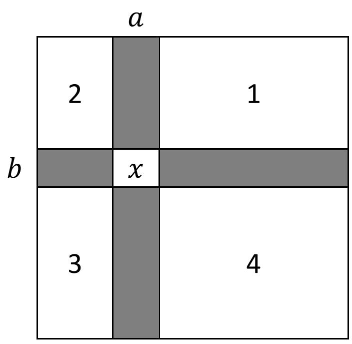


43. att.

Atrisinājums.

Mazākais gājienu skaits būs 64. Viegli pārliecināties, ka, ja veic gājienu katrā rūtiņā, tad beigās iegūs melnu kvadrātu, jo katra rūtiņa mainīs krāsu nepāra skaitu reižu (15).

Pamatosim, ka mazāku gājienu skaitu nevar iegūt. Pieņemsim pretējo, t.i., var iegūt melnu kvadrātu ar mazāk nekā 64 gājieniem. Skaidrs, ka nav vērts veikt gājienu vienā un tajā pašā rūtiņā vairāk par 1 reizi, jo divreiz izdarīts gājiens tajā pašā rūtiņā pats sevi “anulē”. Tātad katrā rūtiņā veikto gājienu skaits ir vai nu 0, vai arī 1. Tā kā mēs vēlamies iegūt mazāk par 64 gājieniem, tad kādā no rūtiņām jāveic 0 gājieni. Tas nozīmē, ka būs tāda rūtiņa x, kurā nav veikts gājiens.



44. att.

Kolonnu, kurā atrodas x, apzīmēsim ar a un rindu – ar b. Kad runāsim par a un b, rūtiņa x netiks ņemta vērā, t.i., tiek apspriests tikai iekrāsotais reģions 44. att. Pēc pieņēmuma katra rūtiņa kolonnā a un rindā b ir mainījušas krāsu nepāra skaitu reižu, jo pretējā gadījumā kāda no tām būtu balta. Tā kā kopumā ir 14 rūtiņas, neieskaitot x, tad kolonnā a un rindā b kopumā ir notikušas pāra skaits krāsu maiņu.

Krāsu maiņa a un b rūtiņās var notikt divos veidos: 1) veikts gājiens kādā no ārējiem reģioniem 1, 2, 3 vai 4 (skat. 44. att.); 2) veikts gājiens iekrāsotajā daļā kolonnā a vai rindā b. Ja tiek veikts gājiens kādā no ārējiem reģioniem, tad tas kopumā nomainīs krāsu divām rūtiņām no a un b. Tātad gājieni reģionos 1, 2, 3 un 4 kopumā krāsu rūtiņām no a un b ir mainījuši pāra skaitā.

Veikto gājienu skaitu a apzīmēsim ar a_g un veikto gājienu skaitu b ar b_g. Katrs gājiens, kas veikts rūtiņās no a vai b, nomaina krāsu 7 rūtiņām attiecīgi no a vai b. Tātad kopumā ir veiktas $7a_g + 7b_g = 7(a_g + b_g)$ krāsu maiņas. Tā kā kopumā a un b ir veiktas pāra skaits krāsu maiņu, tad secinām, ka $(a_g + b_g)$ ir pāra skaitlis, jo arī ārējie reģioni deva pāra skaitu krāsu maiņu. Tas nozīmē, ka rūtiņā x ir notikusi krāsu maiņa pāra skaitā. Tas ir pretrunā ar to, ka rūtiņa x ir melna, jo tas prasītu nepāra skaitu krāsu maiņu. Secinām, ka pieņēmums, ka kādā rūtiņā nav veikts gājiens, ir aplams.