Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Nevienādību mīkla

Pabeidz mīklu, katrā rindiņā un kolonnā tieši vienu reizi ierakstot ciparus no 1 līdz 5. Ievēro, ka jāizpildās nevienādībām starp cipariem (rūtiņām)!

Atrisinājums

Skat. 1. att.

3		1		5		2		4
		∧		∨				∨
1		2		4	<	5		3
4		5	>	3		1	<	2
∨						∧		
2		3		1		4	<	5
		∧		∧				
5	>	4		2		3	>	1

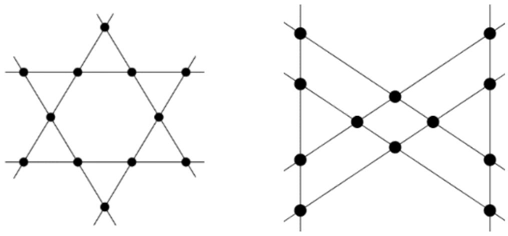
1. att.

2. Kastaņu spēles

Kādā saulainā rudens dienā mazais Miķelis salasīja 12 kastaņus un sāka tos uz zemes bīdīt. Viņam tos izdevās novietot tā, ka uz katras no sešām taisnēm ir pa četriem kastaņiem. Parādi divus piemērus, kā Miķelis kastaņus varēja novietot!

Atrisinājums

Iespējami vairāki varianti, divus no tiem skat. 2. att.



2. att.

3. Pirmskaitlis

Saskaitot divus pirmskaitļus, ieguva pirmskaitli p. Saskaitot trīs dažādus pirmskaitļus, arī ieguva to pašu pirmskaitli p. Kāda ir mazākā iespējamā p vērtība?

Atrisinājums

Pirmie 8 pirmskaitļi ir $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Mazākā iespējamā trīs dažādu pirmskaitļu summa ir $2+3+5=10$, kas nav pirmskaitlis, tātad p noteikti būs lielāks nekā 10. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2 un pārējie pirmskaitļi ir nepāra skaitļi, tad p noteikti ir nepāra skaitlis. Lai divu skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad viens no diviem saskaitāmajiem (pirmskaitļiem) ir 2. Tad otram saskaitāmajam jābūt lielākam nekā 8. Ja otrs saskaitāmais ir

- 11, tad abu pirmskaitļu summa $2+11=13$, taču to nevar iegūt, saskaitot 3 dažādus pirmskaitļus;
- 13, tad abu pirmskaitļu summa ir $2+13=15$, kas nav pirmskaitlis;

- 17, tad abu pirmskaitļu summa ir 19, ko var iegūt arī kā trīs dažādu pirmskaitļu summu: $19 = 3 + 5 + 11$.

Tātad esam ieguvuši, ka $p = 19$ ir mazākā iespējamā p vērtība.

4. Nauda klases ekskursijai

Lai klase aizbrauktu ekskursijā, tika savākti 420 eiro. Zināms, ka šī summa bija tikai 50, 20 un 10 eiro banknotēs un pavisam bija 20 banknotes. Cik katra veida banknošu varēja būt?

1. atrisinājums

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka no katra veida jābūt vismaz pa vienai banknotei. Ievērojam, ka nevar būt vairāk kā piecas 50 eiro banknotes, jo tad mazākā naudas summa, kas ir iegūstama, izmantojot atlikušās 14 banknotes, ir 150 eiro, jo ir jāizmanto vismaz viena 20 eiro banknote. Tā kā $6 \cdot 50 + 150 = 450 > 420$, tad nevar tikt izmantotas vairāk kā piecas 50 eiro banknotes.

50 eiro banknošu skaits	**Atlikusī naudas summa**	**Atlikušo banknošu skaits**	**20 eiro banknošu skaits**	**10 eiro banknošu skaits**
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{420 - 50 \cdot n}$	$\boldsymbol{20 - n}$		
1	370	19	18 Nevar būt lielāks, jo jau $19 \cdot 20 = 380 > 370$. Nevar būt mazāks, jo jau $17 \cdot 20 = 340$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar divām 10 eiro banknotēm.	1
2	320	18	14 Nevar būt lielāks, jo jau $15 \cdot 20 = 300$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar trīs 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $13 \cdot 20 = 260$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar piecām 10 eiro banknotēm.	4
3	270	17	10 Nevar būt lielāks, jo jau $11 \cdot 20 = 220$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar sešām 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $9 \cdot 20 = 180$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar astoņām 10 eiro banknotēm.	7
4	220	16	6 Nevar būt lielāks, jo jau $7 \cdot 20 = 140$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar deviņām 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $5 \cdot 20 = 100$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar vienpadsmit 10 eiro banknotēm.	10
5	170	15	2 Nevar būt lielāks, jo jau $3 \cdot 20 = 60$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar divpadsmit 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $1 \cdot 20 = 20$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar četrpadsmit 10 eiro banknotēm.	13

Tātad esam ieguvuši, ka ir iespējami pieci dažādi varianti, cik katra veida banknošu varēja būt:

- 1 banknote 50 eiro vērtībā, 18 banknotes 20 eiro vērtībā un 1 banknote 10 eiro vērtībā;

- 2 banknotes 50 eiro vērtībā, 14 banknotes 20 eiro vērtībā un 4 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 3 banknotes 50 eiro vērtībā, 10 banknotes 20 eiro vērtībā un 7 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 4 banknotes 50 eiro vērtībā, 6 banknotes 20 eiro vērtībā un 10 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 5 banknotes 50 eiro vērtībā, 2 banknotes 20 eiro vērtībā un 13 banknotes 10 eiro vērtībā.

2. atrisinājums
No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka no katra veida jābūt vismaz pa vienai banknotei. Apzīmēsim 20 eiro banknošu skaitu ar x un 10 eiro banknošu skaitu ar y.

- Ja izmantoja tikai vienu 50 eiro banknoti, tad iegūstam, ka $x+y=19$ un $20x+10y=370$. Otro vienādību izdalot ar 10, iegūstam $2x+y=37$ jeb $x+x+y=37$. Zināms, ka $x+y=19$, tāpēc $x+19=37$ jeb $x=18$. Esam ieguvuši, ka $x=18$ un $y=1$.
- Ja izmantoja divas 50 eiro banknotes, tad $x+y=18$ un $20x+10y=320$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=14$ un $y=4$.
- Ja izmantoja trīs 50 eiro banknotes, tad $x+y=17$ un $20x+10y=270$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=10$ un $y=7$.
- Ja izmantoja četras 50 eiro banknotes, tad $x+y=16$ un $20x+10y=220$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=6$ un $y=10$.
- Ja izmantoja piecas 50 eiro banknotes, tad $x+y=15$ un $20x+10y=170$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=2$ un $y=13$.
- Ja izmantotu sešas 50 eiro banknotes, tad mazākā naudas summa, kas ir iegūstama, izmantojot 14 atlikušās banknotes, ir 150 eiro, jo jāizmanto vismaz viena 20 eiro banknote. Tā kā $6\cdot 50+150=450>420$, tad nevar tikt izmantotas vairāk kā piecas 50 eiro banknotes.

Tātad esam ieguvuši, ka ir iespējami pieci dažādi varianti, cik katra veida banknošu varēja būt:

- 1 banknote 50 eiro vērtībā, 18 banknotes 20 eiro vērtībā un 1 banknote 10 eiro vērtībā;
- 2 banknotes 50 eiro vērtībā, 14 banknotes 20 eiro vērtībā un 4 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 3 banknotes 50 eiro vērtībā, 10 banknotes 20 eiro vērtībā un 7 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 4 banknotes 50 eiro vērtībā, 6 banknotes 20 eiro vērtībā un 10 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 5 banknotes 50 eiro vērtībā, 2 banknotes 20 eiro vērtībā un 13 banknotes 10 eiro vērtībā.

5. Vai kāds mānās?
Trīs minioni – apņēmīgais Kevins, dumpīgais Stjuarts un mazais Bobs – sēž katrs uz sava krēsla.
Kevins: "Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Stjuarta nekā no Boba."
Stjuarts: "Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Boba nekā no Kevina."
Bobs: "Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Stjuarta nekā no Kevina."
Zināms, ka vismaz divi no viņiem saka patiesību. Vai kāds noteikti mānās? Ja mānās, tad noskaidro, kurš tas ir!
Atrisinājums
Apzīmēsim attālumu starp Kevinu un Stjuartu ar KS, attālumu starp Stjuartu un Bobu ar SB un attālumu starp Kevinu un Bobu ir KB.
No dotajiem apgalvojumiem izriet, ka

$$KS>2\cdot KB \tag{1}$$
$$SB>2\cdot KS \tag{2}$$
$$SB>2\cdot KB \tag{3}$$

Pakāpeniski pārveidojot nevienādību (2), iegūstam

$$SB>\mathbf{2\cdot KS}$$
$$SB>KS+\boldsymbol{KS} \text{ (izmantojam nevienādību (1))}$$
$$SB>KS+\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{KB}$$

$$SB > KS + KB + KB$$
$$SB > KS + KB$$

Tā kā SB, KS un KB ir trijstūra malas, tad iegūtā nevienādība ir pretrunā ar trijstūra nevienādību (trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa). Tā kā izmantojām nevienādības (1) un (2), tad kāda no tām ir aplama, tas ir, vai nu Kevins, vai Stjuarts noteikti mānās.

Izmantojot nevienādības (2) un (3) iegūstam

$$SB + SB > 2 \cdot KS + 2 \cdot KB$$
$$2 \cdot SB > 2 \cdot KS + 2 \cdot KB$$
$$SB > KS + KB$$

Atkal esam ieguvuši nevienādību, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tā kā izmantojām nevienādības (2) un (3), tad kāda no tām ir aplama, tas ir, vai nu Stjuarts, vai Bobs noteikti mānās.

Tā kā ir dots, ka vismaz divi apgalvojumi ir patiesi, tad vienīgā iespēja ir, ka Kevins un Bobs saka patiesību, bet Stjuarts mānās.

Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ieraksti zīmes!

Starp cipariem **8 7 6 9 2 5 4 3 1** ieraksti aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „:”, „·”; ne obligāti visas) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 2016. Ciparu secību mainīt nedrīkst!

Atrisinājums

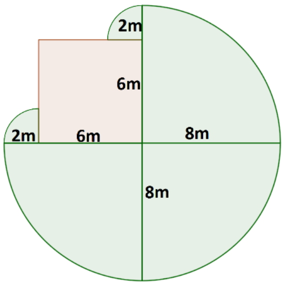
Der, piemēram, izteiksme $8 \cdot ((7+6) \cdot 9 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 3 + 1) = 2016$.

2. Par suni Rūdi

Suns Rūdis uz brītiņu ir piesiets pie dārza mājiņas stūra. Noskaidro, cik liels ir perimetrs laukumam, pa kuru var pārvietoties Rūdis, ja zināms, ka dārza mājiņa ir kā kubs, kuram katras malas garums ir 6 metri, un suņa siksna ir 8 metrus gara.

Atrisinājums

Teritorija, pa kuru Rūdis var pārvietoties ar 8 metru garu siksnu, iekrāsota zaļā krāsā (skat. A1. att.). Tā sastāv no trīs ceturtdaļām riņķa ar rādiusu 8 metri un vēl divu riņķu ceturtdaļām, kuru rādiuss ir 2 metri. Izmantojot riņķa līnijas garuma aprēķināšanas formulu $C = 2\pi r$, kur r ir riņķa līnijas rādiuss, aprēķinām šīs teritorijas perimetru: $6 + 6 + 2 + 2 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 16 + 12\pi + \pi + \pi = 16 + 14\pi\ (m)$.
(Ja gribam noteikt aptuveno teritorijas perimetru, tad, ievietojot $\pi \approx 3{,}14$, iegūstam $16 + 14\pi \approx 59{,}96\ (m)$.)



A1. att.

3. Ceļu būvnieks Kristaps

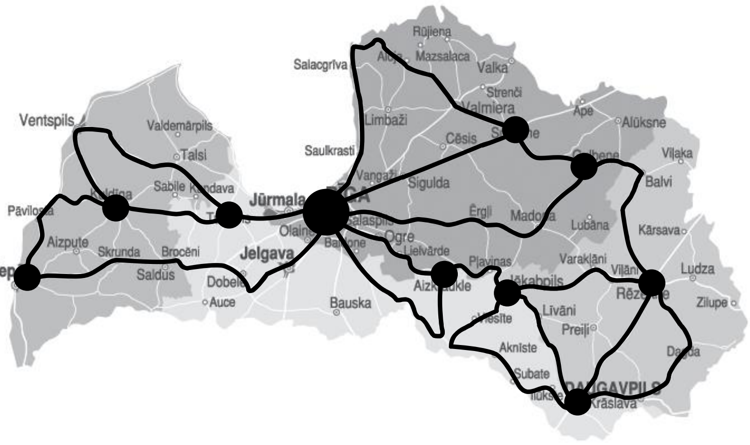
Kristaps strādā ceļu būves uzņēmumā un viņam jāapseko vairāki ceļi. Vai Kristaps var apsekot

a) 1. att. ar melno līniju izceltos ceļus;

b) 2. att. ar melno līniju izceltos ceļus

tā, lai viņš pārvietotos tikai pa izceltajiem ceļiem, turklāt pa katru tieši vienu reizi?

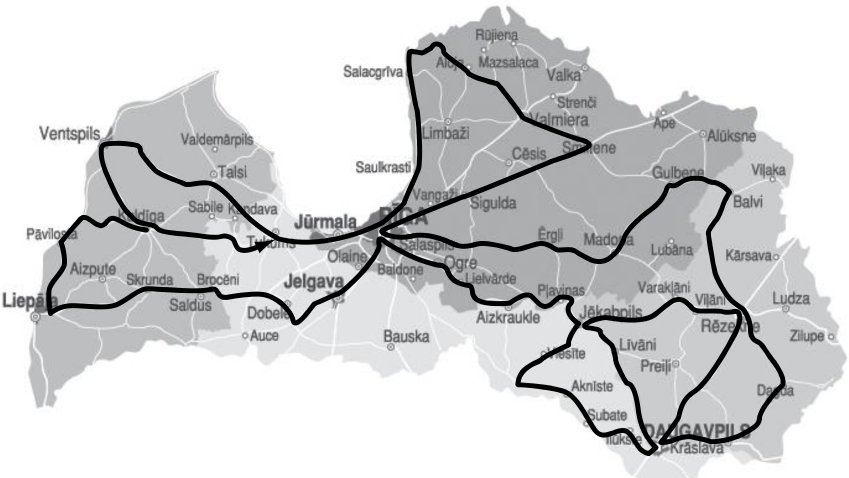
1. att.



2. att.

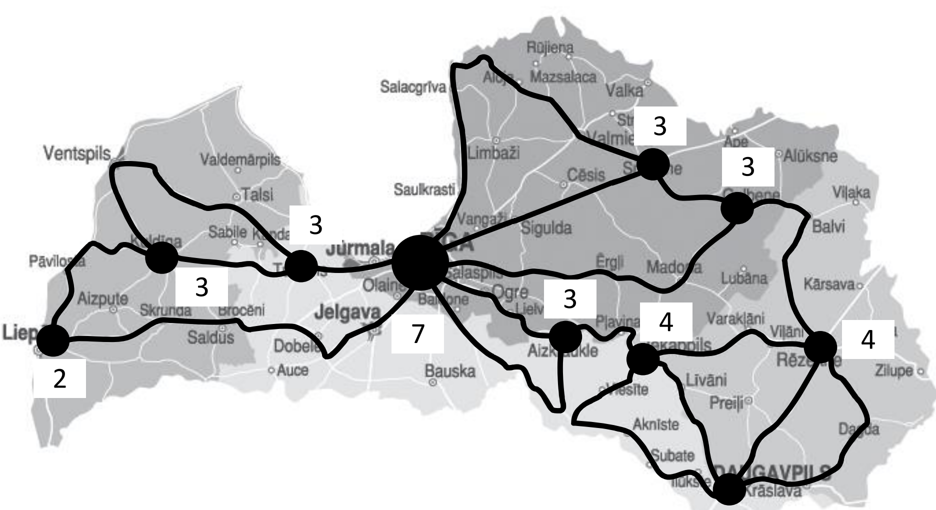
Atrisinājums

a) Jā, skat., piemēram, A2. att., kurā maršruts sākts Kuldīgā, bet beigts – Tukumā.



A2. att.

b) Nē, nevar. Lai to varētu panākt, pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, nedrīkst būt vairāk kā divas. Ja ir tieši divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, tad vienā no tām mēs varētu maršrutu sākt, bet otrā – beigt, no pārējām pilsētām jāiziet pāra skaitam ceļu, jo, iebraucot pilsētā, mums no tās ir arī jāizbrauc. Dotajā kartē ir vairāk nekā divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu (skat. A3. att.), tātad prasītais nav iespējams.



A3. att.

4. Ķīviņš, kurā iesaistītas ozolzīles

Skolotāja lūdza katram skolēnam atnest ozolzīles klases dekorēšanai. Visi skolēni savāca vienādu skaitu zīles, turklāt katrs ne vairāk kā 20. Pa ceļam uz klasi katrs skolēns katram citam meta ar vienu ozolzīli, un visas mestās ozolzīles pazuda. Rezultātā skolēni uz klasi aiznesa 81 ozolzīli. Cik ozolzīļu savāca katrs skolēns pirms ķīviņa?

1. atrisinājums. Tā kā katrs skolēns atnesa vienādu skaitu zīles, tad zīļu skaitam jādalās ar skolēnu skaitu. Tātad skolēnu skaits varētu būt 3, 9, 27 vai 81 (nevar būt tikai viens skolēns, jo tad nevarētu notikt ķīviņš). Ar x apzīmējam zīļu skaitu, ko savāca katrs skolēns pirms ķīviņa, un aplūkojam visas iespējas.

- Ja skolotājai zīles atnesa trīs skolēni, tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ zīles. Tātad $3(x-2)=81$ jeb $x-2=27$. No kā iegūstam, ka $x=29$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
- Līdzīgi deviņu skolēnu gadījumā iegūstam vienādojumu $9(x-8)=81$, no kā izriet, ka $x=17$.
- Ja skolēnu skaits ir 27, tad attiecīgais vienādojums ir $27(x-26)=81$ un $x=29$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
- Ja skolēnu skaits ir 81, tad attiecīgais vienādojums ir $81(x-80)=81$ un $x=81$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.

Tātad katrs no deviņiem skolēniem salasīja 17 zīles.

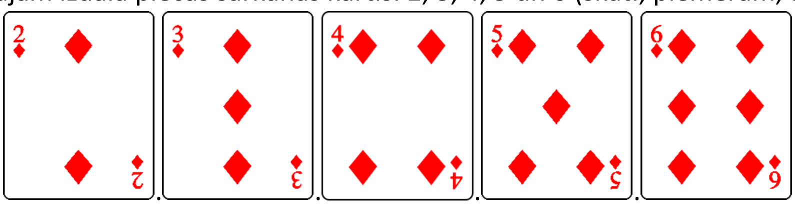
2. atrisinājums. Tā kā katrs skolēns atnesa vienādu skaitu zīles, tad zīļu skaitam jādalās ar skolēnu skaitu. Tātad skolēnu skaits varētu būt 3, 9, 27 vai 81 (nevar būt tikai viens skolēns, jo tad nevarētu notikt ķīviņš).

Skolēnu skaits	Zīļu, ko atnesa katrs skolēns, skaits	Zīļu skaits, ko katrs skolēns aizmetas	Zīļu skaits, ko katrs skolēns salasīja	Secinājums
3	$81:3=27$	2	$27+2=29$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
9	$81:9=9$	8	$9+8=17$	Der.
27	$81:27=3$	26	$3+26=29$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
81	$81:81=1$	80	$1+80=81$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.

Tātad katrs no deviņiem skolēniem salasīja 17 zīles.

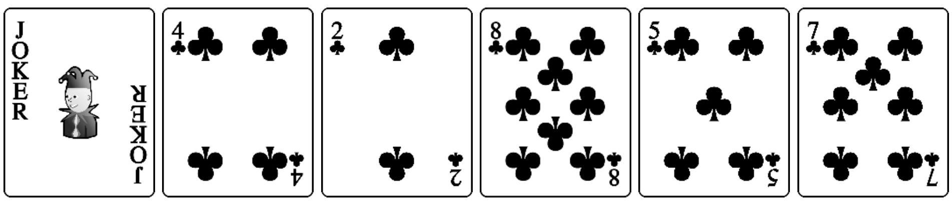
5. Kāršu triks

Trika meistars skatītājam izdala piecas sarkanas kārtis: 2, 3, 4, 5 un 6 (skat., piemēram, 3. att.).



3. att.

Trika meistaram rokās ir sešas melnas kārtis, turklāt tādā secībā, lai to vērtības veidotu skaitli 142857 (pieņemam, ka *JOKER* vērtība ir 1, skat., piemēram, 4. att.).



4. att.

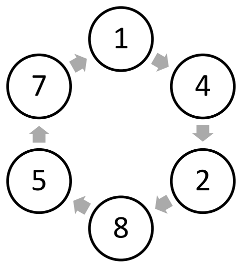
Pēc tam gan skatītājs, gan trika meistars sajauc savu kāršu kaudzīti. (Patiesībā trika meistars tikai liek domāt, ka tas sajauc savu kāršu kaudzīti – viņš izdara tā, lai kārtis paliktu sākotnējā secībā: 1, 4, 2, 8, 5, 7. To var izdarīt, kaudzīti divreiz pārkārtojot: ar kreiso īkšķi kārtis ņemot pa vienai, pirmajā reizē kārtīm būs pretēja secība, otrajā reizē – sākotnējā. Šādā veidā, ātri jaucot kārtis, skatītājam radīsies iespaids, ka kārtis tik tiešām tiek sajauktas.)
Kad tas izdarīts, trika meistars uz galda rindā izliek savas kārtis, veidojot skaitli 142857. Skatītājs izvēlas vienu no savām kārtīm un arī noliek uz galda. Skatītājam viņa izvēlētās sarkanās kārts skaitlis jāsareizina ar triku meistara izveidoto skaitli. Kamēr skatītājs reizina, triku meistars, nesajaucot sešu melno kāršu secību, savāc tās vienā kaudzītē, noteiktā vietā kaudzīti pārdala divās daļās, saliek atpakaļ vienā kaudzītē un noliek uz galda ar skatu uz leju. Kad skatītājs ir ieguvis reizinājumu, trika meistars pēc kārtas no kaudzītes izliek kārtis – tās veido skaitli, kas sakrīt ar skatītāja iegūto reizinājumu. (Piemēram, skatītājs izvēlas skaitli 6, tad viņam tas jāreizina ar triku meistara izlikto skaitli 142857. Reizinājumā iegūst 857142.)
Izskaidro kā un kāpēc šis triks darbojas!

Atrisinājums

Apskatām kādi reizinājumi var rasties, ja 142857 reizina ar kādu no skaitļiem, kas ir skatītāja rokās:

- $142857 \cdot 2 = 285714$;
- $142857 \cdot 3 = 428571$;
- $142857 \cdot 4 = 571428$;
- $142857 \cdot 5 = 714285$;
- $142857 \cdot 6 = 857142$.

Ievērojam, ka visos reizinājumos ir izmantoti tikai tie cipari, kuri ir uz triku meistara kārtīm: 1, 4, 2, 8, 5, 7. Pie tam, ja izvietojam visus ciparus pa apli, nemainot sākotnējo secību (skat. A4. att.), visos reizinājumos ciparu secība nemainās, ņemot par pirmo attiecīgi ciparu 2, 4, 5, 7 vai 8.



A4. att.

Tātad triku meistara galvenais uzdevums ir nesajaukt kāršu secību un pārdalīt kaudzīti divās daļās, atkarībā no cipara, kas ir uz sarkanās kārts:

- ja uz sarkanās kārts ir 2, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 4 un triku meistaram pirmās divas kārtis (cipars 1 un 4) jānovieto kaudzītes apakšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 3, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 1 un triku meistaram pirmā kārts (cipars 1) jānovieto kaudzītes apakšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 4, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 8 un triku meistaram pirmās četras kārtis jānovieto kaudzītes apakšā jeb pēdējās divas kārtis jānovieto kaudzītes augšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 5, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 5 un triku meistaram pirmās piecas kārtis jānovieto kaudzītes apakšā jeb pēdējo kārti jānovieto kaudzītes augšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 6, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 2 un triku meistaram pirmās trīs kārtis jānovieto kaudzītes apakšā.

Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

3. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Iegūsti skaitļus!

Izmantojot daļas $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$ (katru ne vairāk kā vienu reizi), aritmētisko darbību zīmes un iekavas, izsaki katru veselo skaitli no 0 līdz 10.

Atrisinājums

Der, piemēram, šādas izteiksmes:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=0$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{3}=1$$

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2$$

$$\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{1}{2}-=3$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=4$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right):\frac{1}{5}=5$$

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=6$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=7$$

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}=8$$

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=9$$

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}=10$$

2. Kāds var būt d?

Skaitli 2016 dalot ar naturālu skaitli d, atlikumā ieguva 3. Kāds var būt d?

Atrisinājums

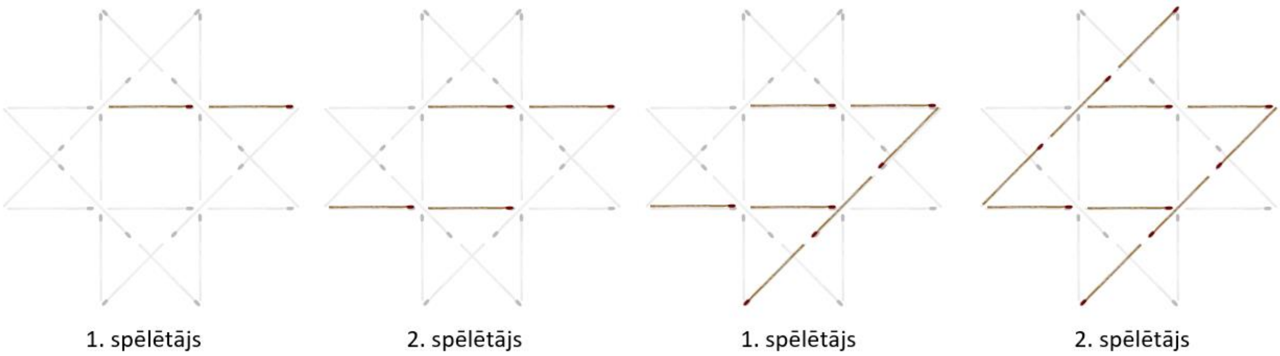
Tā kā, dalot skaitli 2016 ar d, atlikumā ieguva 3, tad skaitlis 2013 dalās ar d. Sadalām skaitli 2013 pirmreizinātājos: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Iegūstam, ka skaitlis 2013 dalās ar skaitļiem 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 un 2013. Tā kā atlikums vienmēr ir mazāks nekā dalītājs, tas ir, $d > 3$, tad d nevar būt ne 1, ne 3. Līdz ar to esam ieguvuši, ka d var būt 11, 33, 61, 183, 671 un 2013.

3. Auseklis

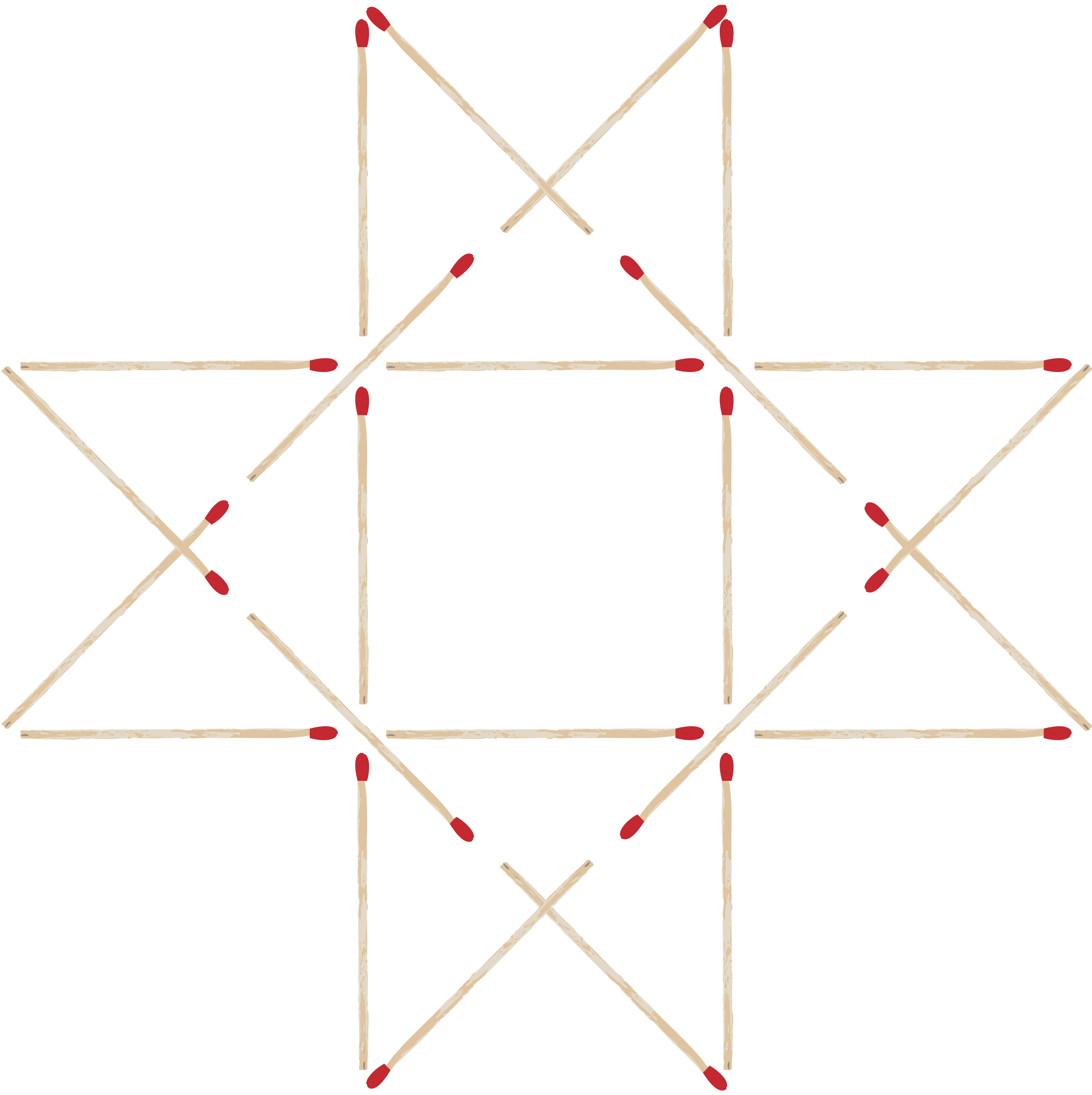
Divi spēlētāji, gājienus izdarot pēc kārtas, novieto sērkociņus uz 1. att., tiem paredzētajās vietās. Vienā gājienā var novietot jebkura skaita sērkociņus, ja tie atrodas uz vienas taisnes. Tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru – pirmais vai otrais?

Atrisinājums

Uzvarēt vienmēr var otrais spēlētājs, ja viņš izdara simetrisku gājienu pirmā spēlētāja gājienam attiecībā pret auseklа centru, tas ir, lai kur arī pirmais spēlētājs savā gājienā novietotu sērkociņus, otrajam spēlētājam jānovieto tieši tikpat sērkociņi simetriski pret auseklа centru (skat., piemēram, A1. att.). Ja pirmajam spēlētājam ir iespējams izdarīt gājienu, tad ir iespējams arī simetriskais gājiens, ko veic otrais spēlētājs. Tātad kādā brīdī gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un uzvarējis būs otrais spēlētājs.



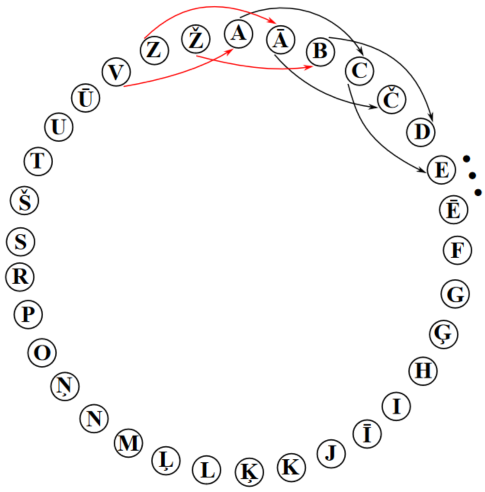
A1. att.



1. att.

4. Uzlauz kodu!

Līdzās rakstībai radās arī vajadzība uzrakstīto tekstu šifrēt. Viens no vienkāršākajiem šifrēšanas paņēmieniem ir romiešu karavadoņa Jūlija Cēzara šifrs, kas tika radīts pirms vairāk nekā 2000 gadu, lai šifrētu Cēzara sūtītas ziņas saviem karavadoņiem. Cēzara šifrā katrs burts tiek aizstāts ar burtu, kas alfabētā atrodas noteikta skaita vietu tālāk pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Piemēram, katru burtu aizstājot ar burtu, kas atrodas 3 vietas tālāk pulksteņa rādītāju kustības virzienā (skat. 2.att.), no vārda *ZIEMA* iegūsim vārdu *ĀKGOC*, bet no vārda *MATEMĀTIKA* iegūsim vārdu *OCVGOČVKĻC*.



2. att.

Tālāk dotais teksts ir aizšifrēts, izmantojot Cēzara šifru, katru burtu aizstājot ar burtu, kas atrodas x vietas tālāk pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Atrodi x un atšifrē tekstu!

ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
JLŪ HI ĒLHPŪŽH JLFŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
CLKL, CLKL PŠĀVHP,
LGLG LGLG LOLHLG!

ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
JLŪ HI ĒLHPŪŽH JLFŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
GĒEĶL, GĒEĶL GJPNVHP,
ŽLFGHL, ŽLFGHL ĀŪPGCŪDL.

ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
JLŪ HI ĒLHPŪŽH JLFŪ, ŽLG ŪF KŪPCLGGJRHŽŪ?
CLKL, CLKL OKŪPGCŪDL,
ĀŪPĀL, ĀŪPĀL OĻJLČL!

JĻFOI LIHEFG: LČHFL ĀPŪČP

Atrisinājums
Pārbaudot variantus, iegūstam, ka nobīde $x = 17$. Tālāk dots atšifrētais teksts.

KAS IR ZIEMASSVĒTKI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
VAI TU PATEIKT VARI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
MAZA, MAZA EGLĪTE,
ASAS, ASAS ADATAS!

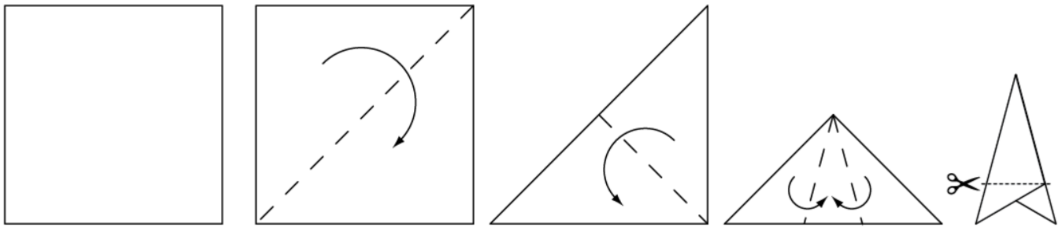
KAS IR ZIEMASSVĒTKI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
VAI TU PATEIKT VARI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
SPOŽA, SPOŽA SVECĪTE,
KARSTA, KARSTA LIESMIŅA.

KAS IR ZIEMASSVĒTKI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
VAI TU PATEIKT VARI, KAS IR ZIEMASSVĒTKI?
MAZA, MAZA DZIESMIŅA,
LIELA, LIELA DĀVANA!

VĀRDU AUTORS: ANTRA LEINE

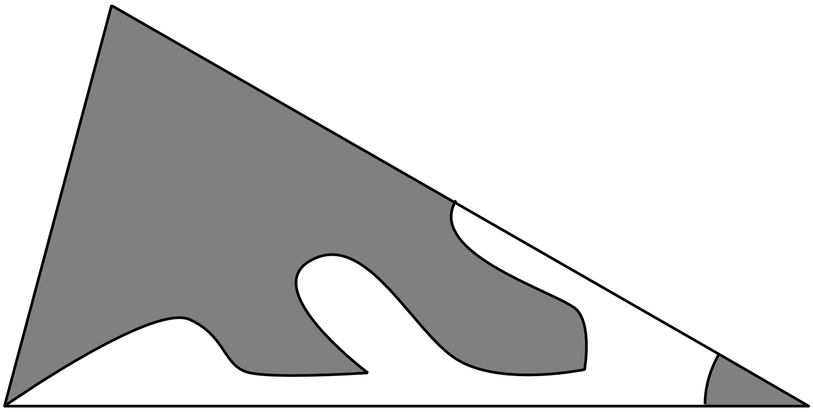
5. Izveido sniegpārsliņu!

a) Izloki papīra lapu tā, kā parādīts 3. att.!



3. att.

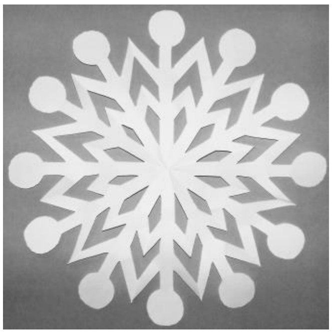
Izmantojot 4. att. doto šablonu, izveido sniegpārsliņu! Atsūti izveidotās sniegpārsliņas bildi vai pašu sniegpārsliņu!



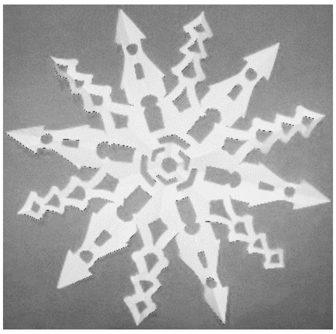
4. att.

b) Izveido 5. att. redzamās sniegpārsliņas šablonu – uzzīmē to 7. att.!

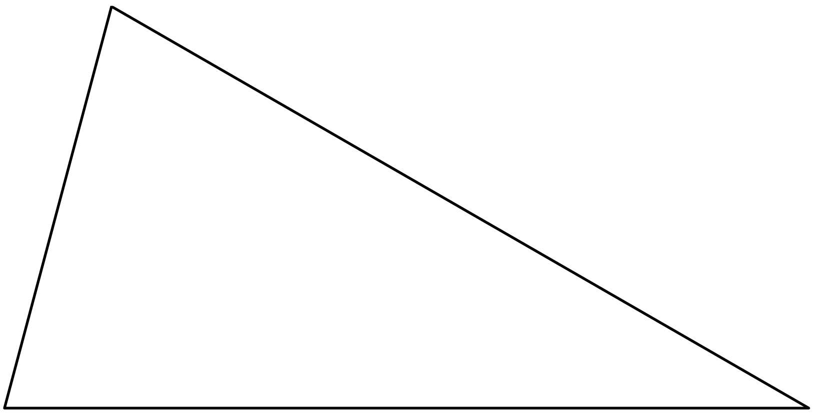
c) Izdomā pats savu sniegpārsliņas dizainu (skat., piemēram, 6. att.)! Atsūti gan tās šablonu, gan bildi vai pašu sniegpārsliņu!



5. att.



6. att.



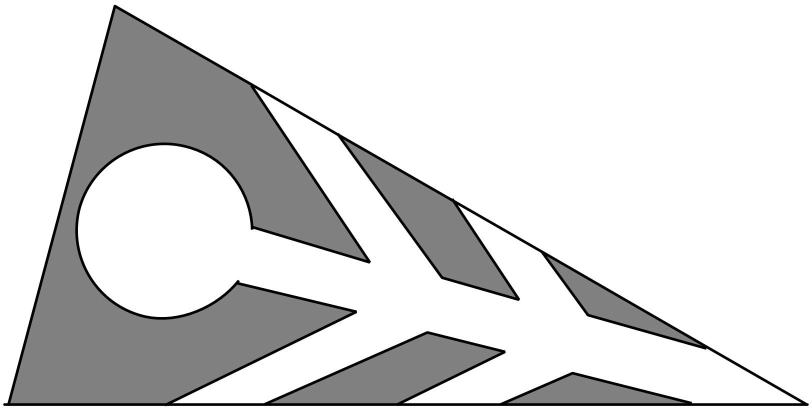
7. att.

Atrisinājums

a) Izveidoto sniegpārsliņu skat. A2. att.

A2. att.

b) Sniegpārsliņas šablons dots A3. att.



A3. att.

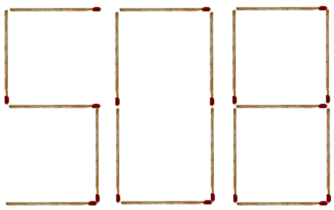
Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

4. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Iegūsti lielāko!

Pārvietojot divus sērkociņus no 1.att. redzamā skaitļa, izveido pēc iespējas lielāku skaitli!

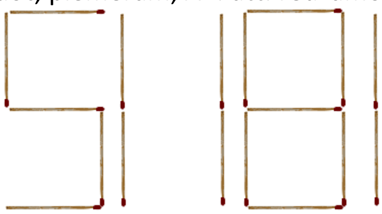
Piezīme. No sērkociņiem var izveidot šādus ciparus: .



1. att.

Atrisinājums

Pārvietojot divus sērkociņus, var izveidot, piemēram, A1. att. redzamo skaitli.



A1. att.

2. Pāra cipari

Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 9, un kuram visi cipari ir pāra?

Atrisinājums

Mazākais naturālais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 288.

Pamatosim, ka mazāku skaitli nav iespējams atrast. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Tā kā jāmeklē skaitlis, kam visi cipari ir pāra, tad arī šī skaitļa ciparu summa ir pāra skaitlis.

Nav tāda viencipara skaitļa, kam ciparu summa būtu pāra skaitlis, kas dalās ar 9.

Pamatosim, ka nav arī tāda divciparu skaitļa, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tā kā meklētajā skaitlī visiem cipariem ir jābūt pāra, tad katrs no skaitļa cipariem nevar būt lielāks kā 8, un skaitļa ciparu summa nevar būt lielāka kā 16. Tātad nav tāda divciparu skaitļa, kam ciparu summa ir pāra skaitlis, kas dalās ar 9.

Apskatīsim trīsciparu skaitli $\overline{abc}$. Tā kā neviens no cipariem nav lielāks kā 8, tad lielākā ciparu summa, ko varam iegūt, ir 24. Vienīgais pāra skaitlis, kas nepārsniedz 24 un dalās ar 9, ir 18. Tātad $a+b+c=18$. Tā kā jāmeklē mazākais skaitlis, tad skaitļa pirmajam ciparam jābūt pēc iespējas mazākam, tas ir, $a=2$. Līdz ar to iegūstam $2+b+c=18$ jeb $b+c=16$ un vienīgā iespēja, ka $b=8$ un $c=8$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka mazākais naturālais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 288.

3. Mušas ceļš

Divi soļotāji – Kārlis un Aivars – vienlaicīgi sāka soļot viens otram pretim. Brīdī, kad attālums starp viņiem bija 60 km, muša, kas sēdēja uz Kārļa pleca, sāka lidot pretī Aivaram. To satikusi, muša nekavējoties griezās atpakaļ. Aizlidojusi līdz Kārlim, muša atkal atgriezās pie Aivara. Tā viņa lidoja starp abiem soļotājiem, līdz tie satikās. Muša lidoja starp soļotājiem ar ātrumu 20 km stundā, bet soļotāji visu laiku pārvietojās ar ātrumu 10 km stundā. Cik kilometrus nolidoja muša?

Atrisinājums

Muša nepārtraukti lidoja līdz abi soļotāji satikās. Vienā stundā abi soļotāji kopā nogāja 20 km, tātad tie satikās pēc $60:20=3$ stundām. Līdz ar to muša kopā nolidoja $3\cdot 20=60$ km.

4. Madagaskara

Četri Centrālparka zoodārza iemītnieki ir izbēguši, taču tie negaidīti ar kuģi tiek nosūtīti uz Āfriku. Uz kuģa tie kapteinim teica:

Lauva Alekss: "Es izdomāju bēgšanas plānu."
Zebra Mārtijs: "Alekss melo."
Žirafe Melmans: "Mārtijs melo."
Nīlzirgs Glorija: "Melmans melo."

Cik no četriem zvēriem teica patiesību?

Atrisinājums

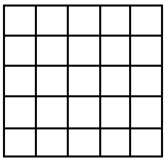
Iespējami divi gadījumi.

1. Ja Alekss teica patiesību, tad meloja Mārtijs, tāpēc patiesību teica Melmans un meloja Glorija.
2. Ja Alekss meloja, tad patiesību teica Mārtijs, tāpēc meloja Melmans un patiesību teica Glorija.

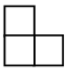
Abos gadījumos patiesību teica divi zvēri.

5. Ledus pils

Ledus Karalienes pils svinību zāles grīda sadalīta 5×5 vienādās kvadrātiskās rūtiņās (skat. 2. att.). Vienā no šīm rūtiņām atrodas kolonna. Visa pārējā grīda ir noklāta ar astoņām 3. att. parādītajām flīzēm tā, ka katra flīzes rūtiņa noklāj tieši vienu grīdas rūtiņu (flīzes nav sagrieztas mazākos gabalos). Kurā rūtiņā var atrasties kolonna?



2. att.



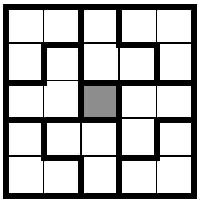
3. att.

Atrisinājums

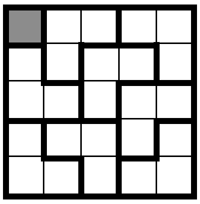
Kolonna var atrasties kādā no A2. att. ar "x" atzīmētajām rūtiņām. Tad, atkarībā no tā, kur atrodas kolonna, pārējā grīda ar flīzēm var būt noklāta tā, kā parādīts A3. att., A4. att. un A5. att. (pagriežot A4. att. un A5. att., iegūst arī pārējos iespējamos flīžu izvietojumus).

x		x		x
x		x		x
x		x		x

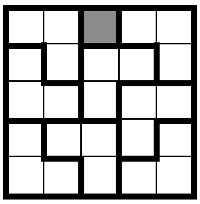
A2. att.



A3. att.



A4. att.



A5. att.

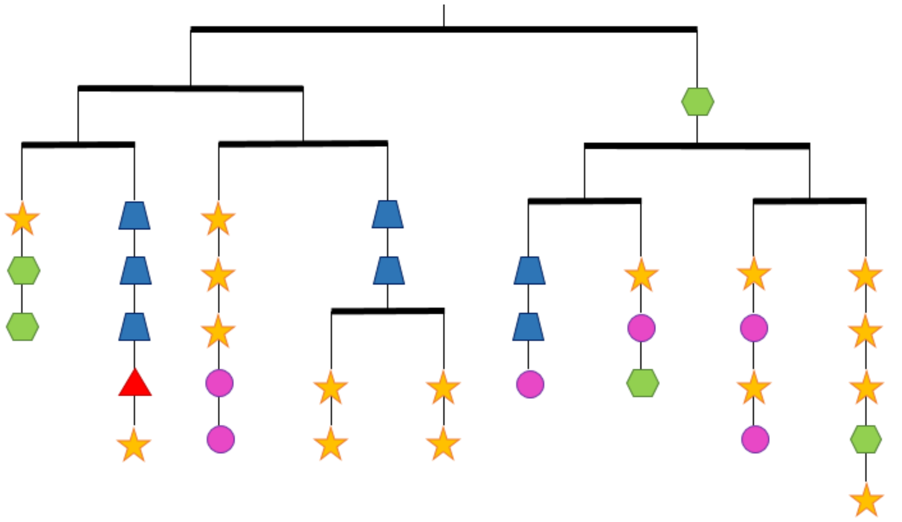
Pamatosim, ka kolonna nevar atrasties nevienā no A2. att. neatzīmētajām rūtiņām. Ja kolonna atrastos kādā no neatzīmētajām rūtiņām, tad visām ar “x” atzīmētajām rūtiņām būtu jābūt noklātām ar flīzēm. Ievērojam, ka viena flīze noklāj ne vairāk kā vienu atzīmēto rūtiņu. Tātad kopā būtu nepieciešamas 9 flīzes, bet uzdevumā dotas tikai 8 flīzes. Līdz ar to kolonna nevar atrasties rūtiņā, kas nav atzīmēta ar “x”.

Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

5. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Kareklis

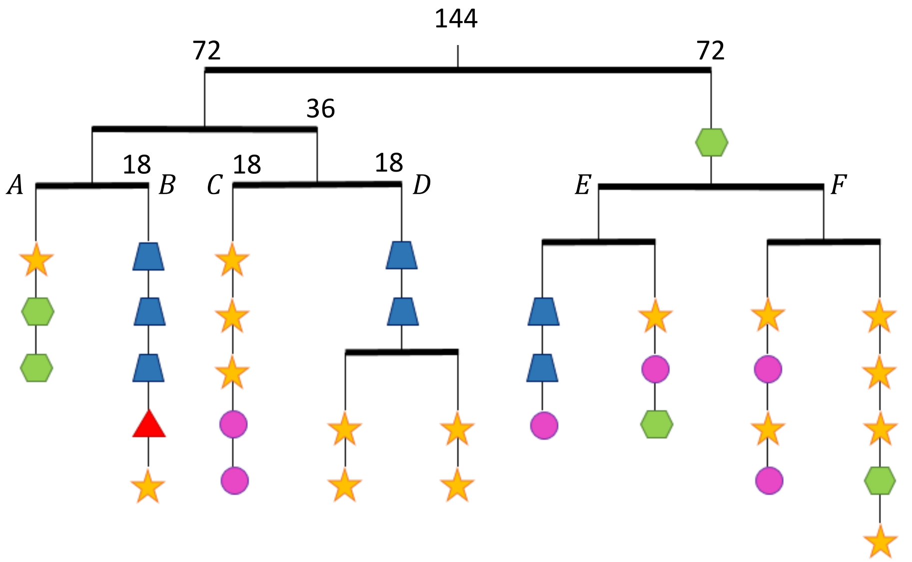
Nellijai uzdāvināja tādu karekli, kā redzams 1. att. Zināms, ka visas vienādās figūriņas sver vienādi un visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā. Cik sver katra figūriņa, ja visas figūriņas kopā sver 144 gramus?



1. att.

Atrisinājums

Tā kā visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā, tad varam noteikt, kāda ir kopējā masa figūriņām, kas iekarinātas to galos (skat. A1. att.).



A1. att.

Apzīmējam zvaigznītes masu gramos ar z, sešstūra – ar s, četrstūra – ar c, riņķa – ar r un trijstūra – ar t. Tā kā stieņa gali E un F ir līdzsvarā, tad

$$2c + 2r + z + s = 2r + s + 6z;$$
$$2c = 5z. \qquad (1)$$

Tad stieņa galā D iekarināto figūriņu kopējā masa ir $2c + 4z = 18$ jeb $5z + 4z = 18$, no kā iegūstam, ka $z = 2$. Tad no (1) iegūstam, ka $c = 5$. Stieņa galā C iekarināto figūriņu kopējā masa ir $3z + 2r = 18$ jeb $6 + 2r = 18$, no kā iegūstam $r = 6$. Stieņa galā A iekarināto figūriņu kopējā masa ir $z + 2s = 18$ jeb $2 + 2s = 18$, no kā izriet $s = 8$. Stieņa galā B iekarināto figūriņu kopējā masa ir $3c + t + z = 18$ jeb $15 + t + 2 = 18$, tātad $t = 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka katras figūriņas masa gramos ir tāda, kā dots tabulā.

Figūriņa					
Masa gramos	2	8	5	6	1

2. Izdomā likumu!

Dota skaitļu virkne $89, 98, 106, 112, 114, \ldots$. Izdomā vienotu likumu, pēc kura iegūst katru nākamo skaitli virknē! Vai šajā virknē var parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir nulle?

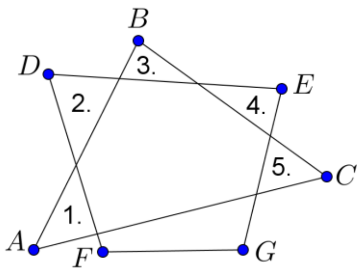
Atrisinājums

Dotajā virknē katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējam virknes loceklim pieskaitot tā pēdējo ciparu.

Pamatosim, ka šajā virknē nevar parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir 0. Tā kā katra nākamā virknes locekļa pēdējo ciparu ietekmē tikai iepriekšējā virknes locekļa pēdējais cipars, tad apskatām virkni, ko veido dotās virknes locekļu pēdējie cipari: $9, \mathbf{8}, 6, 2, 4, \mathbf{8}, 6, 2, 4, \ldots$ Šajā virknē katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tas nozīmē, ka, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties. Tas nozīmē, ka dotajā virknē nevar parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir 0.

3. Skaitām trijstūrus!

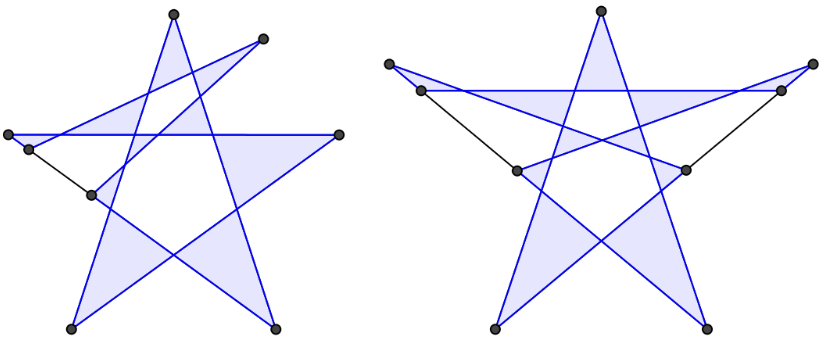
Vai var uzzīmēt 7 nogriežņus tā, lai izveidotos **a)** 10 trijstūri; **b)** 11 trijstūri? Aplūkojam tikai tādus trijstūrus, kurus uzzīmētie nogriežņi nesadala, skat., piemēram, 2. att., kurā izveidojušies 5 trijstūri.



2. att.

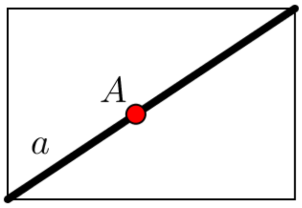
Atrisinājums

Gan a), gan b) gadījumā prasītais ir iespējams, skat. A2. att.



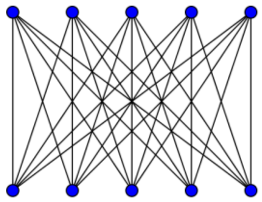
A2. att.

4. Izkrāso lapu!
Izkrāso lapu tieši trīs krāsās tā, lai uz katras taisnes, ko šajā lapā var novilkt, būtu ne vairāk kā divas krāsas!
Atrisinājums
Piemēram, lapā vienu taisni a nokrāsojam melnu, vienu punktu A uz tās nokrāsojam sarkanu, bet pārējo lapu atstājam baltu (skat. A3. att.).

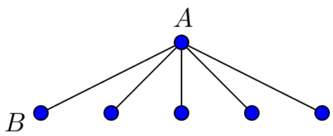


A3. att.

Lai kāda taisne šajā plaknē būtu nokrāsota vairāk nekā divās krāsās, tai būtu jākrusto taisne a gan punktā A, gan vēl kādā citā punktā. Taču, ja divas taisnes krustojas, tās var krustoties tikai vienā punktā; ja divām taisnēm ir vismaz divi kopīgi punkti, tad tās sakrīt, tas ir, ir viena un tā pati taisne. Tātad tāds gadījums, ka kāda taisne šajā lapā būtu nokrāsota trīs dažādās krāsās, nav iespējams.
5. Vecmāmiņas tirgū
Tirgū satikās dažas vecmāmiņas. Zināms, ka katra no vecmāmiņām pazīst tieši piecas citas no šīm vecmāmiņām (visas pazīšanās ir abpusējas). Starp jebkurām trīs no šīm vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas. Kāds ir mazākais skaits vecmāmiņu, kas varēja satikties tirgū?
Atrisinājums
Mazākais iespējamais vecmāmiņu skaits ir desmit, skat. A4. att., kurā ar punktiem apzīmētas vecmāmiņas, un divi punkti ir savienoti ar nogriezni tad un tikai tad, ja tiem atbilstošās vecmāmiņas viena otru pazīst. Dotajā piemērā vecmāmiņas sadalītas divās grupās pa piecām vecmāmiņām tā, ka katra pirmās grupas vecmāmiņa pazīst visas otrās grupas vecmāmiņas, bet nepazīst nevienu savas grupas vecmāmiņu. Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām vismaz divas atrodas vienā grupā, tad tās savā starpā nav pazīstamas un uzdevuma nosacījumi izpildās.


A4. att.

Pierādīsim, ka mazāks skaits vecmāmiņu tirgū satikties nevarēja. Apskatām vecmāmiņu A (skat. A5. att.). Uzdevumā dots, ka šī vecmāmiņa pazīst tieši 5 citas vecmāmiņas. Apskatām vecmāmiņu B (skat. A5. att.). Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas, tad vecmāmiņa B nevar būt pazīstama ne ar vienu citu vecmāmiņu, ko pazīst A, bet tādā gadījumā nepieciešanas vēl vismaz 4 citas vecmāmiņas, tas ir, kopā ir vismaz 10 vecmāmiņas.



A5. att.