Jauno matemātiķu konkurss 2006./07.m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Vispirms ievērosim, ka A>O, jo A reizinot ar skaitli ROMA, iegūst piecciparu skaitli, bet O reizinot ar ROMA – tikai četrciparu skaitli, pie tam O≠1, jo starpreizinājums TZOA nesakrīt ar reizinātāju ROMA. Tātad O≥2 un A>2. Reizinājums A·A beidzas ar to pašu ciparu A; tātad A varētu būt 1 (neder, jo A>2), 5 vai 6. Arī O·A beidzas ar ciparu A un 1<O<A, tāpēc neder A=6. Tātad **A=5** un **O=3**. Iegūstam sekojošu piemēru:

$$\begin{array}{r}
R\mathbf{3}M\mathbf{5}\\
\cdot \quad \mathbf{5}\,\mathbf{3}\,\mathbf{5}\\
\hline
GGTR\mathbf{5}\\
TZ\mathbf{3}\,\mathbf{5}\\
GGTR\mathbf{5}\\
\hline
GR\mathbf{5}M\mathbf{5}T\mathbf{5}
\end{array}$$

Tālāk noskaidrosim, kāds cipars atbilst burtam R. 5 reizinot ar četrciparu skaitli R3M5 jāiegūst 5-ciparu skaitlis, bet 5 reizinot ar skaitli, kas mazāks nekā 1999, iegūst četrciparu skaitli (jo pat 5·1999=9995 – četrciparu skaitlis), tad R≥2. Savukārt 3 reizinot ar skaitli R3M5 jāiegūst 4-ciparu skaitlis, bet 3 reizinot ar skaitli, kas lielāks nekā 4000, reizinājums būs 5-ciaparu skaitlis (jo jau 3·4000=12000 – piecciparu skaitlis), tātad R<4. Dotajā piemērā dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tātad R≠3 un R≠5. Atliek iespēja, ka **R=2**.

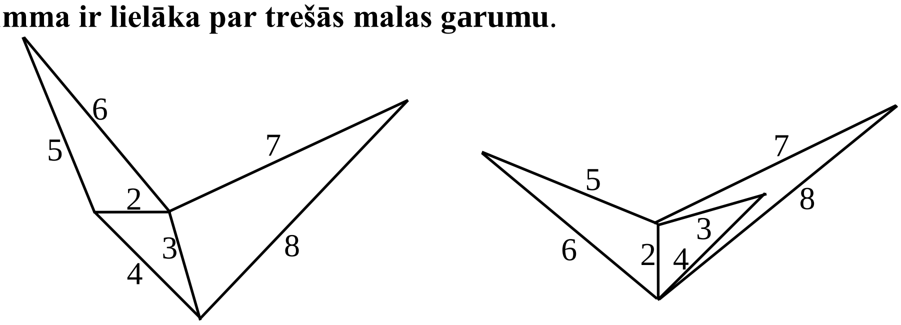
5 reizinot ar 4-ciapru skaitli, kura pirmais cipars ir 2, reizinājuma pirmais cipars būs 1 (jo apskatot mazākā un lielākā šāda skaitļa reizinājumu ar 5, redzam 2000·5=**1**0000 un 2999·5=**1**4995; pārējie šādi reizinājumi būs lielāki par 10000 un mazāki nekā 14995 – tātad pirmais cipars būs 1) jeb **G=1**.

Zinot, ka R=2, no starpreizinājumu summas iegūstam **T**=2+5=**7**.

Izdalot 11725 ar 5, iegūstam 11725:5=2345, no kurienes **M=4**. Tālāk izpildot reizināšanu, atrodam **Z=0** un šifrētais reizināšanas piemērs izskatās sekojoši:

$$\begin{array}{r}
2\,3\,4\,5\\
\cdot \quad 5\,3\,5\\
\hline
1\,1\,7\,2\,5\\
7\,0\,3\,5\\
1\,1\,7\,2\,5\\
\hline
1\,2\,5\,4\,5\,7\,5
\end{array}$$

2. Tā kā 3 trijstūriem kopā ir 9 malas, bet doti tikai 7 stienīši, tātad 2 stienīši būs kopīgas malas 2 trijstūriem vai 1 stienītis būs kopīga mala visiem 3 trijstūriem. No dotajiem stienīšiem 3 trijstūrus izveidot var daudz dažādos veidos, piem., skat. zīmējumus. Lai no trīs stienīšiem varētu izveidot trijstūri, stienīšu garumiem jāapmierina *trijstūra nevienādības*, t.i., **jebkuru divu trijstūra malu garumu summa ir lielāka par trešās malas garumu**.



3. Apzīmēsim katram dēlam pienākošos dukātu daudzumu šādā veidā: Jānim – j, Pēterim – p, Miķelim – m, Kārlim – k, Dāvim – d, Ansim – a. Tad no uzdevuma nosacījumiem iegūstam šādas vienādības:

$$j=6a=3k, \quad p=3d, \quad m=3a$$

Tātad $k=2a$, un visi brāļi kopā mantoja

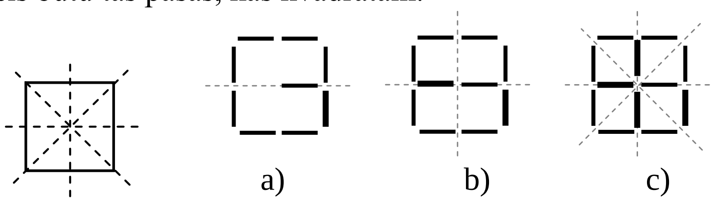
$$j+p+m+k+d+a=6a+3d+3a+2a+d+a=12a+4d \ (<50)$$

dukātus. Tā kā Jānis saņēma lielāko mantojumu, tad $p<j$ jeb $3d<6a$, tātad $d<2a$. Ņemot vērā nosacījumu, ka visi brāļi saņēma dažādu daudzumu dukātu, secinām, ka $a\neq 1$ (pretējā gadījumā jābūt $d<2\cdot 1=2$ un $d\neq 1$, bet tādu naturālu skaitļu nav). Tātad $a\geq 2$. Ja $a\geq 4$ (un $d\geq 1$), tad $12a+4d\geq 12\cdot 4+4\cdot 1=51>50$, tātad $a<4$. Atliek apskatīt gadījumus, kad $a=2$ vai $a=3$ un $d<2a$, $d\neq a$. Apkoposim tos tabulā.

a	d	$k=2a$	$m=3a$	$p=3d$	$j=6a$	kopā	
2	**1**	**4**	**6**	**3**	**12**	28	
2	**3**	**4**	**6**	**9**	**12**	36	
3	1	6	9	3	18		neder, jo $p=a$
3	2	6	9	6	18		neder, jo $k=p$
3	4	6	9	12	18	52>50	neder
3	5	6	9	15	18	56>50	neder

Tātad iespējami divi varianti: pavisam bija 28 zelta dukāti vai 36 zelta dukāti, kas tika sadalīti tā, kā redzams tabulā.

4. Figūras simetrijas ass ir taisne, kas sadala figūru divās daļās, kuras ir viena otras spoguļattēli attiecībā pret šo taisni. Kvadrātam ir 4 simetrijas asis (skat. zīm.). Tā kā dotajai figūrai jau ir kvadrāta forma (bez 1 sērkociņa uz kontūra), acīmredzot sērkociņi jāpievieno tā, lai iegūtajai figūrai simetrijas asis būtu tās pašas, kas kvadrātam.



a) b) c)

a) Dotajai figūrai nav nevienas simetrijas ass. Tātad, lai iegūtu figūru ar vienu simetrijas asi, jāpievieno vismaz 1 sērkociņš. Ar viena sērkociņa pievienošanu pietiek, skat. a) zīm.

b) Pievienojot tikai vienu sērkociņu, nevar iegūt figūru ar 2 simetrijas asīm (aplūkojiet visus gadījumus!); pievienojot 2 sērkociņus tā kā parādīts b) zīmējumā, iegūstam figūru ar 2 simetrijas asīm.

c) Lai iegūtu figūru, kurai ir 4 simetrijas asis (tādas kā kvadrātam), ir jāpievieno vismaz 4 sērkociņi (skat. c) zīm.).

5. Uzvarēs tā meitene, kas pēc sava gājiena iegūs 1. Skaitlim 1 ir tikai viens dalītājs 1, tātad nākamajai spēlētājai atliek viens vienīgs gājiens – „1-1=0”, tātad viņa zaudēs. Vēl ievērosim, ka nepāra skaitlim ir tikai nepāra dalītāji, tātad pēc nepāra skaitļa noteikti tiks iegūts pāra skaitlis (nepāra skaitlis – nepāra skaitlis = pāra skaitlis). savukārt pāra skaitlim ir gan pāra dalītāji, gan nepāra dalītāji (vismaz dalītājs 1), tātad pēc pāra skaitļa var iegūt gan pāra, gan nepāra skaitli. Tātad uzvarēt var tā meitene, **pirms** kuras gājiena uz tāfeles ir pāra skaitlis: atņemot no tā nepāra dalītāju, viņa iegūs nepāra skaitli, savukārt otra meitene pēc sava gājiena var iegūt tikai pāra skaitli. Tā kā uzrakstītie skaitļi ar katru gājienu samazinās, kādreiz noteikti tiks iegūta 0.

Ja sākumā ir uzrakstīts 105 – nepāra skaitlis, tad Anita pēc sava gājiena noteikti iegūst pāra skaitli, un **Laima uzvarēs**, ja pēc katra sava gājiena atstās nepāra skaitli.

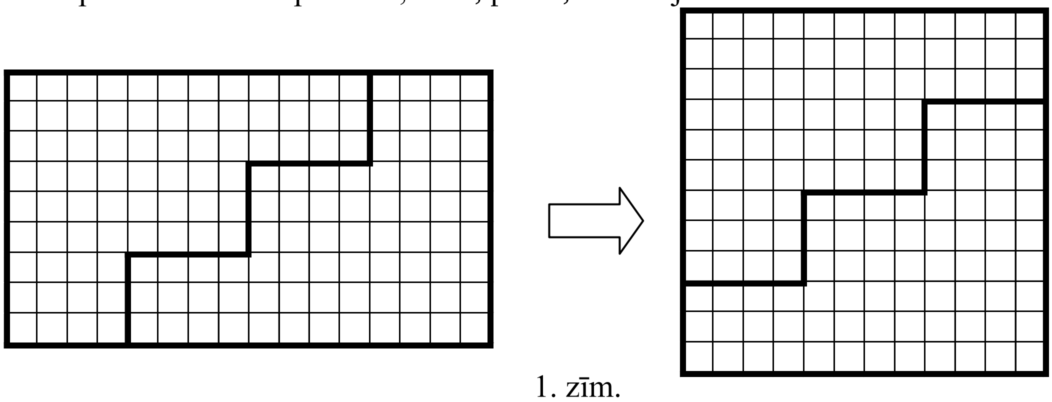
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Apskatām mazākos naturālos skaitļus, kuru decimālajā pierakstā ir tikai cipari „3”, un pārbaudām to dalāmību ar 7. Redzam, ka skaitļi 3, 33, 333, 3333, 33333, nedalās ar 7, bet skaitlis 333333 dalās ar 7. Tātad meklējamais skaitlis ir **333333**.

Pie tam ievērosim, ka $333333=3\cdot 111111$ un skaitļiem 3 un 7 nav kopīgu dalītāju, tātad 111111 dalās ar 7. Tātad ar 7 dalās visi sešciparu skaitļi, kuru decimālajā pierakstā visi cipari ir vienādi.

2. Sagriežot taisnstūri vairākās daļās un tās pārkārtojot savādāk bez pārklāšanās un tukšumiem, iegūtās figūras laukums būs vienāds ar taisnstūra laukumu. Tātad iegūstamā kvadrāta laukums ir $9\cdot16=144$ rūtiņas, un tā malas garums ir $\sqrt{144}=12$ rūtiņas.

Kā var izpildīt uzdevuma prasības, skat., piem., 1. zīmējumā.



1. zīm.

3. Atbilde: dotie skaitļi tabulā jāieraksta tā, kā parādīts 2. zīmējumā.

12 ↘	24 ↓		270 ↓
20 →	**1**	**4**	**5**
54 →	**3**	**2**	**9**
	8	**7**	**6**

2. zīm.

12 ↘	24 ↓		270 ↓
20 →	**A**	**B**	**C**
54 →	**D**	**E**	**F**
	G	**H**	**I**

3. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim rūtiņas ar burtiem kā parādīts 3. zīm.

Tā kā $270=2\cdot3^3\cdot5$ un $54=2\cdot3^3$, tad gan 3. kolonnā. gan 2.rindiņā jābūt ierakstītiem skaitļiem, starp kuru pirmreizinātājiem sastopami tieši trīs „3”. No dotajiem skaitļiem ar 3 dalās tikai $3=3^1$, $6=2\cdot3^1$ un $9=3^2$. Tātad vienīgā iespēja, kā iegūt tieši trīs pirmreizinātājus „3”, ir ņemt skaitli 9 un vienu no skaitļiem 3 vai 6. Tātad rūtiņā F jāraksta skaitlis 9.

$20=2^2\cdot5$ un $270=2\cdot3^3\cdot5$ dalās ar 5, bet starp skaitļiem no 1, 2, ..., 9 vienīgi skaitlis 5 satur pirmreizinātāju 5, tātad 5 jāraksta rūtiņā C.

Tālāk izrēķinām, ka rūtiņā I jāraksta $270:(5\cdot9)=6$. Ievērosim, ka $12=6\cdot2$ un $54=9\cdot6$, tāpēc rūtiņās A un E ierakstīto skaitļu reizinājumam jābūt 2 (tas ir iespējams vienīgi tad, ja viens no šiem skaitļiem ir 1 un otrs – 2), savukārt rūtiņās D un E ierakstīto skaitļu reizinājumam jābūt 6, pie tam neviens no šiem skaitļiem nav 6 (tas ir ierakstīt rūtiņā I). Tātad rūtiņās E un D jāieraksta skaitļi 2 un 3.

Tātad rūtiņā E jāraksta 2, rūtiņā A – 1 un rūtiņā D – 3. Tālāk iegūstam, ka rūtiņā B jāieraksta 4 (jo $20=1\cdot5\cdot4$) un rūtiņā G jāraksta 8 (jo $24=1\cdot3\cdot8$). Neierakstīts palicis skaitlis 7, ko tad ierakstām rūtiņā H.

4. Atbilde: vismaz 12 cimdi.

Neviens pāris neveidosies, ja būs paņemti:

1) **tikai** labās rokas cimdi (pavisam tādu ir 10)
2) **tikai** kreisās rokas cimdi (pavisam tādu ir 9)
3) labās rokas cimdi tikai zili un kreisās rokas cimdi tikai sarkani (kopā tādu ir 8)
4) labās rokas cimdi tikai sarkani un kreisās rokas cimdi tikai zili (kopā tādu ir 11).

Tātad, ja no kastes tiks izvilkti 11 vai mazāk cimdi, var būt kāds no „sliktajiem” gadījumiem un neviens pāris neveidosies. Taču paņemot vismaz **12** cimdus, noteikti varēs izveidot vismaz vienu pāri.

5. Atbilde: Kārlis vienmēr var panākt savu uzvaru.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, kāda var būt spēles beigu situācija (t.i., kādas kaudzītes paliks uz galda, lai nevienu vairs nevarētu sadalīt daļās atbilstoši uzdevuma nosacījumiem).

Vismazākajā kaudzītē var būt 1 vai 2 konfektes (ja mazākajā kaudzītē būtu 3 (vai n>3) konfektes, to varētu sadalīt kaudzītēs ar 1 un 2 (vai n-1) konfektēm). Ja vismazākajā kaudzītē ir 2 konfektes, tad katrā nākamajā (pēc konfekšu daudzuma) kaudzītē jābūt tieši par 1 konfekti vairāk nekā iepriekšējā. Tā kā 2+3+4+5=14<16, bet 2+3+4+5+6=20>16, tad 16 konfektes šādā sadalīt nevar, un beigās mazākajā kaudzītē būs 1 konfekte.

Apskatot visas iespējas, noskaidrojam, ka spēles beigās var tikt iegūtas šādas trīs situācijas: 16=1+2+3+4+6=1+3+5+7=1+2+5+8.

Tā kā katrā gājienā kaudzīšu skaits palielinās tieši par 1, un sākumā bija viena kaudzīte, tad pirmajā gadījumā uzvar Kārlis (jo tiek izdarīti 4 – pāra skaits- gājieni), otrajā un trešajā – Rūdis (tiek izdarīti 3 – nepāra skaits- gājieni).

Ievērosim, ka abās Rūda *uzvarošajās situācijās* ir kaudzīte ar 5 konfektēm, bet tāda kaudzīte nav Kārļa *uzvarošajā situācijā*. Savukārt Kārļa uzvarošajā situācijā ir kaudzītes ar 4 un 6 konfektēm, bet tādas kaudzītes nav Rūda uzvarošajās situācijās.

Tagad apskatīsim visus iespējamos Rūda pirmos gājienus un kā uz tiem var atbildēt Kārlis, lai panāktu savu uzvaru.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1. Rūdis	1+15	2+14	3+13	4+12	5+11	6+10	7+9
2. Kārlis	1+**4**+**11**	2+**3**+**11**	3+**4**+**9**	4+**1**+**11**	**2**+**3**+11	6+**1**+**9**	**3**+**4**+9

Ja Rūdis uzvarētu, tad nākamajā gājienā viņam jāiegūst kāda no savām *uzvarošajām situācijām*. To būtu iespējams izdarīt, ja pēc 2. gājiena uz galda **jau atrastos** 2 kaudzītes ar Rūdim *vajadzīgo* konfekšu skaitu tajās, tad sadalot trešo audzīti vajadzīgajās daļās, viņš uzvarētu. Taču Kārlis ir pacenties pēc sava gājiena atstāt tādas 3 kaudzītes, starp kurām nav divu tādu, kas ietilpst **vienā** Rūda *uzvarošajā situācijā*. Tāpēc ar vienu gājienu Rūdis savu uzvaru panākt nevarēs. Bet tas nozīmē, ka Kārlis vēl **varēs** izdarīt vienu gājienu. Tā kā beigās vispār var iegūt ne vairāk kā 5 kaudzītes (jo jau sešās mazākajās iespējamajās kaudzītēs kopā ir 1+2+3+4+5+6=21>16 konfekte), tad spēlē pavisam var tikt izdarīti ne vairāk kā 4 gājieni, tātad, izdarot 4.gājienu, Kārlis uzvarēs.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: piemēram, 15317, 30617, 61217, 107117, 15300000000000017 u.c..

Risinājums. Meklējamo skaitli x varam uzrakstīt kā $x=\overline{A17}=100\cdot A+17$, kur A – naturāls skaitlis.

Tā kā $x=100\cdot A+17$ dalās ar 17 un 17 dalās ar 17, tad arī $100\cdot A$ jādalās ar 17. Tā kā 17 ir pirmskaitlis un 100 nedalās ar 17, tad A jādalās ar 17.

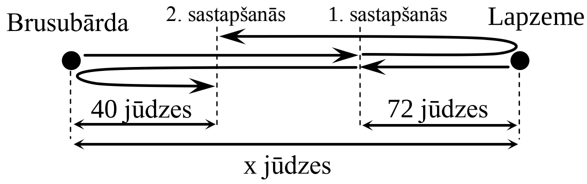
Skaitļa x ciparu summai jābūt 17, un pēdējie divi cipari 1 un 7 summā dod 8, tad skaitļa A ciparu summai jābūt 17-8=9.

Tātad jāmeklē tāds skaitlis A, kas dalās ar 17 un kura ciparu summa ir 9. Tādi skaitļi ir, piemēram, 153, 306, 612, 1071 u.c.

„Iespraužot" skaitlī $\overline{A17}$ starp A un 17 vairākas nulles (piem., $\overline{A00...017}$), joprojām iegūsim skaitli, kas dalās ar 17 ($\overline{A\underbrace{00...0}_{n\text{ nulles}}17}=A\cdot 1\underbrace{00...0}_{n+2\text{ nulles}}+17$, A dalās ar 17, 17 dalās ar 17, tātad arī $\overline{A00...017}$ dalās ar 17), kura pēdējie cipari ir 17, ciparu summa joprojām ir 17 (jo, pieskaitot nulles, summa nemainās) un kura decimālajā pierakstā ir vajadzīgais skaits ciparu. Meklējamais 17-ciparu skaitlis varētu būt, piemēram, 15300000000000017.

2. Atbilde: 176 jūdzes.

Risinājums. Līdz pirmajam sastapšanās brīdim abi ziņneši kopā veica visu attālumu starp abām pilīm (apzīmēsim to ar x), savukārt līdz otrajam sastapšanās brīdim šis attālums tikai veikts trīsreiz (skat. zīm.).



Tā kā abu ziņnešu ātrumi ir nemainīgi, tad līdz otrajam sastapšanās brīdim ziņneši ceļā pavadīja trīsreiz vairāk laika nekā līdz pirmajam sastapšanās brīdim (abi ziņneši - vienādu laiku). Tā ziņneša ātrums ir nemainīgs, tad trīsreiz ilgākā laika posmā viņš noiet trīsreiz garāku ceļa gabalu, tātad arī **katrs** ziņnesis atsevišķi līdz pirmajam sastapšanās brīdim nogāja trīsreiz mazāku attālumu nekā līdz otrajam sastapšanās brīdim.

Apskatot Lapzemes ziņneša noietos attālumus, iegūstam: $3 \cdot 72 = x + 40$ jeb $x = 176$ (jūdzes).

3. Atbilde: pa 2 uzvarām var izcīnīt ne vairāk kā 49 tenisisti.

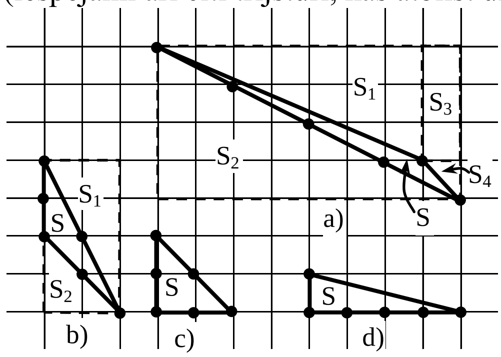
Risinājums. Tā kā tenisā nav neizšķirtu, tad katrā spēlē viens ir uzvarētājs un viens – zaudētājs, kurš no turnīra izstājas. Tātad pavisam var notikt ne vairāk kā 99 spēles, jo pēc pēdējās spēles paliek 1 neizstājies dalībnieks – šīs spēles uzvarētājs. Tātad visa turnīra laikā tiks izcīnītas ne vairāk kā 99 uzvaras, un pa divām uzvaram var izcīnīt ne vairāk kā 49 tenisisti (jo $50 \cdot 2 = 100 > 99$).

49 tenisisti pa 2 uzvarām izcīna, ja turnīrs ir noticis sekojoši: vispirms visi 100 tenisisti sadalās 50 pāros un katrā pārī noskaidro uzvarētāju. Pēc tam turnīrā ir palikuši 50 tenisisti, katram no kuriem ir tieši 1 uzvara (apzīmēsim tos ar $A_1, A_2, ..., A_{50}$). Pēc tam divi tenisisti A_1 un A_2 spēlē savā starpā; zaudētājs A_1 izstājas, bet uzvarētājs A_2 spēlē ar nākamo spēlētāju A_3 un šajā spēlē zaudē A_2. Tad A_3 spēlē ar nākamo tenisistu un zaudē utt. (Shematiski tas attēlots zīmējumā, kur $B \to A$ nozīmē, ka B ir uzvarējis A).

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow A_4 \leftarrow \dots \dots \leftarrow A_{49} \leftarrow A_{50}$$

Turnīra beigās 50 tenisisti nebūs izcīnījuši nevienu uzvaru, tenisists A_1 būs izcīnījis 1 uzvaru un 49 tenisisti $A_2, A_3, ..., A_{50}$ būs izcīnījuši pa 2 uzvarām.

4. Skat., piemēram, zīmējumu (iespējami arī citi trijstūri, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem).



Visiem šiem trijstūriem laukums ir 2 rūtiņas. To var aprēķināt, apvelkot trijstūriem taisnstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu malām, un atņemot „lieko" taisnleņķa trijstūru vai taisnstūru laukumus. Piemēram, a) piemērā $S + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 \cdot 8 = 32$, $S_1 = (3 \cdot 7) : 2 = 10{,}5$, $S_2 = (4 \cdot 8) : 2 = 16$, $S_3 = 1 \cdot 3 = 3$, $S_4 = (1 \cdot 1) : 2 = 0{,}5$ tātad $S = 32 - 10{,}5 - 16 - 3 - 0{,}5 = 2$ rūtiņas;

b) piemērā $S + S_1 + S_2 = 2 \cdot 4 = 8$, $S_1 = (2 \cdot 4) : 2 = 4$, $S_2 = (2 \cdot 2) : 2 = 2$, tātad $S = 8 - 4 - 2 = 2$ rūtiņas;

c) piemērā $S = (2 \cdot 2) : 2 = 2$ rūtiņas;

d) piemērā $S = (1 \cdot 4) : 2 = 2$ rūtiņas.

Piezīme. Rūtiņu režģī uzzīmētiem daudzstūriem, kuru virsotnes atrodas režģa punktos, laukumu S var aprēķināt arī pēc Pīka formulas: $S = \frac{r}{2} + i - 1$, kur r ir režģa punktu skaits uz daudzstūra kontūra (ieskaitot virsotnes), i – režģa punktu skaits daudzstūra iekšpusē. No šīs formulas redzam, ka visiem uzdevumā minētajiem trijstūriem laukumi ir vienādi, un tas ir $\frac{6}{2}+0-1=2$ laukuma vienības (1 laukuma vienība ir 1 rūtiņa).

5. a) Nē, nevar.

Pamatojumā izmatosim *pierādījumu no pretējā*. Pieņemsim, ka tā var gadīties. Tad abus uz vienas (katras) kartītes uzrakstīto skaitļu summa dalās ar 3. Tātad visu 10 šādu summu summa arī dalās ar 3. Bet tā ir vienāda ar visu 20 uzrakstīto skaitļu summu, t.i. (1+99)+(2+98)+(3+97)+(4+96)+(5+95)+(6+94)+(7+93)+(8+92)+(9+91)+(10+90)= =10·100=1000. Bet 1000 ar 3 nedalās, tātad mūsu pieņēmums ir aplams un nevar būt tā, ka katrai kartītei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summas dalās ar 3.

b) Jā, tā var gadīties. Zīmējumā parādīts viens gadījums, kad tas izpildās (uz katras kartītes uzrakstīto skaitļu summa ir 100 – dalās ar 5). Iespējami arī citi varianti.

dzeltenā puse →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zaļā puse →	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90

4. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. a) Apzīmēsim trīsciparu skaitli ar $\overline{abc}=100a+10b+c$ (a ir simtu cipars, b – desmitu cipars, c – vienu cipars). Tad ir jāmeklē tāds skaitlis, lai $\overline{abc}\cdot 8=\overline{bca}$. Lai trīsciparu skaitli reizinot ar 8, iegūtu trīsciparu skaitli, reizinātāja simtu ciparam jābūt 1 (pretējā gadījumā reizinājums būs vismaz 200·8=1600 – četrciparu skaitlis). No otras puses – reizinot ar 8 – pāra skaitli, reizinājumā tiek iegūts pāra skaitlis. Bet $\overline{bc1}$ ir nepāra skaitlis, tātad prasītais trīsciparu skaitlis neeksistē.

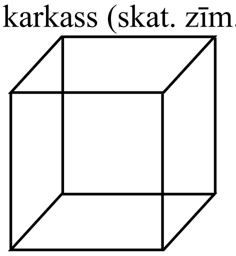
b) Šoreiz jāmeklē tāds trīsciparu skaitlis, lai izpildās vienādība $\overline{abc}=8\cdot\overline{bca}$ jeb

$$100a+10b+c=800b+80c+8a$$
$$92a=790b+79c$$
$$92a=79(10b+c)$$

Tātad izteiksmei 92·a jādalās ar 79. Tā kā 79 ir pirmskaitlis un 92 nedalās ar 79, tad a jādalās ar 79. Bet $a\le 9$ (cipars, atšķirīgs no 0, jo a ir trīsciparu skaitļa pirmais cipars), tātad a nedalās ar 79, un šāda vienādība cipariem *a, b, c* nevar pastāvēt. Tātad arī šādi trīsciparu skaitļi neeksistē.

2. Tā kā atšķirība starp Aivara pulksteņa un Kārļa pulksteņa rādījumiem ir 9 minūtes, bet neviena pulksteņa rādījums no pareizā laika neatšķiras vairāk nekā 5 minūtes, tad Aivara pulkstenis atpaliek, bet Kārļa pulkstenis steidzas. Pie tam 9=4+5, tātad pareizs laiks tobrīd bija vai nu 23:47 (Aivara pulkstenis atpaliek 4 min., Kārļa pulkstenis steidzas 5 min.), vai 23:48 (Aivara pulkstenis atpaliek 5 min., Kārļa pulkstenis steidzas 4 min.). Ja pareizs laiks būtu bijis 23:47, tad Pētera pulkstenis būtu steidzies 4 min., bet tā būt nevar, jo Aivara pulkstenis kļūdās 4 min. Tātad pareizs laiks tobrīd bija **23:48**, Edgara pulkstenis atpaliek 2 min. un Pētera pulkstenis steidzas 3 min.

3. No dotajiem stienīšiem jāizveido kuba karkass (skat. zīm.).



4. Apskatīsim, cik dažādos veidos skaitli 8 var izteikt kā saskaitāmo 1, 2 un 3 summu un cik veidos katru no šīm summām var uzrakstīt, ja svarīga saskaitāmo secība. Saskaitot šos veidus, noskaidrojam, ka Zigis pa kāpnēm var uzkāpt **81 veidā**.

8=	*Cik veidos*
1+1+1+1+1+1+1+1	1
1+1+1+1+1+1+2	7
1+1+1+1+2+2	15
1+1+2+2+2	10
2+2+2+2	1
1+1+1+1+1+3	6
1+1+3+3	6
1+1+1+2+3	20
1+2+2+3	12
2+3+3	3
veidi kopā	**81**

5. Apskatām pirmo vienādību: veicot kādu darbību (saskaitīšanu vai reizināšanu) ar vienu un to pašu skaitli, rezultātā šo pašu skaitli var iegūt tikai 0+0=0 vai 1·1=1. Tā kā $m \neq 0$, tad ***m*=1** un „$\lozenge$” apzīmē reizināšanu. Tātad $\otimes$ apzīmē saskaitīšanu. No otrās vienādības iegūstam $k = n+1$ un trešā vienādība izsaka $n \cdot (n+1) = p$. Tā kā *n* un *p* ir **cipari**, pie tam *n*>1, der tikai gadījums ***n*=2** un ***p*=6** (ja $n \geq 3$, tad $p \geq 3 \cdot (3+1) = 12$ - nav cipars. Tad ***k*=3** un meklējamās izteiksmes vērtība ir

$$(1+2)\cdot(3+6) = 27.$$

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. ***Atbilde***: 2.

Apzīmēsim $2005\frac{5}{11} = a$. Tad dotā skaitliskā izteiksme tiek aizstāta ar algebrisku izteiksmi $(a+1)(a+2) - a(a+3)$. Vienkāršojot šo izteiksmi, iegūstam

$(a+1)(a+2) - a(a+3) = a^2 + 2a + a + 2 - (a^2 + 3a) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a = 2$.

Iegūstam, ka pie visām *a* vērtībām (arī ja $a = 2005\frac{5}{11}$) šīs izteiksmes vērtība ir **2**, tātad

$2006\frac{5}{11} \cdot 2007\frac{5}{11} - 2005\frac{5}{11} \cdot 2008\frac{5}{11} = 2$**.**

2. Skat., piem. 1. zīm. Iespējami daudzi citi risinājumi.

X					X
	X			X	
X					X
	X			X	
		X	X		
		X	X		

1. zīm.

3. ***Atbilde:*** 11 cm.

Pieņemsim, ka trijstūra sānu malas garums ir *x* cm, bet pamata malas garums ir *y* cm (vienādsānu trijstūrī abas vienādās malas sauc par sānu malām, bet trešo malu sauc par pamata malu). Tātad trijstūra perimetrs $P_\Delta=2x+y$.

Paralelograma perimetru veido 2 trijstūra sānu malas un 2 trijstūra pamati, tātad $P_p=2x+2y$.

$P_p-P_\Delta=(2x+2y)-(2x+y)=y=3$ cm (trijstūra pamats ir 3 cm).

Romba perimetru veido 4 trijstūra sānu malas, tātad $P_r=4x$.

P_r-P_Δ=4x-(2x+y)=2x-y=5 cm. Tā kā y=3 cm, iegūstam

2x-3=5

2x=5+3=8

x=4 cm (trijstūra sānu malas garums ir 4 cm) un trijstūra perimetrs ir

P_Δ=2·4+3=11 cm.

4. Pavisam ir 11 tādi skaitļi: 81, 135, 189, 225, 297, 315, 351, 375, 441, 459, 495.

Meklējamo skaitļu pirmreizinātājiem jābūt četriem nepāra pirmskaitļiem (jo jāmeklē nepāra skaitļi ar *„garumu”* 4). Ievērosim, ka 5·5·5·5=625>500, tātad vismaz vienam pirmreizinātājam jābūt mazākam nekā 5, t.i., 3. Apskatot visus iespējamos četru nepāra pirmskaitļu reizinājumus, atrodam visus meklējamos skaitļus, kas mazāki nekā 500.

Vispirms atradīsim tos skaitļus, starp kuru pirmreizinātājiem ir vismaz trīs „3”:

3·3·3·3=81 3·3·3·5=135 3·3·3·7=189 3·3·3·11=297

3·3·3·13=351 3·3·3·17=459

3·3·3·19=513>500, tātad tādu skaitļu nav. Tagad meklēsim skaitļus, kuri saturs divus pirmreizinātājus „3”:

3·3·5·5=225 3·3·5·7=315 3·3·5·11=495 3·3·7·7=441

Vēl derīgs ir skaitlis 3·5·5·5=375. Visi citi skaitļi, kurus veido četri nepāra pirmreizinātāji, ir lielāki nekā 500, tātad atrastie 11 skaitļi ir vienīgie, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

5. ***Atbilde:*** Nē, tā nevar būt.

Mašīnas uz ceļa var izkārtoties 6 dažādos veidos:

ABC **ACB** **BAC** **BCA** **CAB** **CBA**

Sadalīsim šos veidus divās grupās:

I	ABC	BCA	CAB
II	ACB	BAC	CBA

Ievērosim, ka vienas apdzīšanas rezultātā mašīnu izkārtojums mainās no vienas grupas uz otru (piem., ja mašīnas brauca secībā ABC (I grupa), un A apdzina B, tad pēc apdzīšanas tās izkārtojās secībā BAC (II grupa); līdzīgi var izsekot visām pārējām apdzīšanām).

Uzdevumā ir dots, ka sākumā mašīnas bija izkārtojušās secībā $\xrightarrow{\textbf{C B A}}$ (II grupa), bet galamērķi sasniedza secībā $\xrightarrow{\textbf{A C B}}$ (II grupa). Taču izdarot 1, 3, ..., 13 apdzīšanas, mašīnu izkārtojums mainās no vienas grupas uz otru, šajā gadījumā beigās jābūt I grupas izkārtojumam. Tātad nevar būt, ka Liepājā vispirms iebrauca B, pēc tam C un pēc tam A.