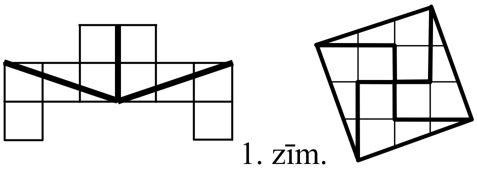
Jauno matemātiķu konkurss 2004./05.m.g.

1. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Nākamais rādījums, kad visi cipari būs dažādi ir 067891. Tas parādīsies pēc tam, kad būs notērētas 32 kWh elektrības, tātad pēc 32:2=**16 dienām**.

2. Dotā figūra satur 10 rūtiņas, tātad no tās nevar izveidot kvadrātu, kura malas iet pa rūtiņu malām. Taču uzdevuma nosacījumos nav šādas prasības. Kā iespējams sagriezt doto figūru 4 daļās un no tām izveidot kvadrātu, parādīts 1. zīm.



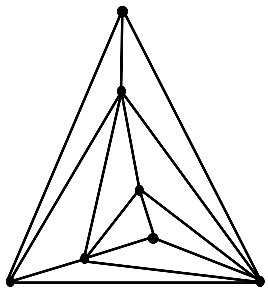
1. zīm.

3. Balta kafija ir melnas kafijas un piena maisījums; jānoskaidro, cik visā izdzertajā dzērienā bija kafijas un cik – piena. Pavisam Anna izdzēra 1 tasīti (sākumā doto) melnas kafijas un $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ tasītes piena. Tātad tīru pienu viņa ir izdzērusi par $\frac{1}{12}$ tasītes vairāk nekā tīru kafiju.

4. Ievērojam, ka skaitlis $A = 222\underbrace{77...77}_{\text{2001septitniek}}555$, tātad tā ciparu summa ir

$$2\cdot 3+7\cdot 2001+5\cdot 3=7\cdot 2004=14028.$$

5. Atbilde: 15 taciņas, piem., skat. 2.zīm.



2. zīm.

Dotās mājas varam attēlot kā punktus, bet atbilstošās taciņas – kā līnijas. Tādējādi iegūstam grafu. Tā kā nekādas divas taciņas (resp. grafa šķautnes) savā starpā nekrustojas, tad šis grafs ir planārs grafs un tam ir spēkā Eilera formula:

$$v + sk - šķ = 2.$$

kur v – virsotņu skaits grafā (šoreiz – māju skaits), sk – skaldņu skaits (cik daļās grafa līnijas sadala plakni), šķ – šķautņu skaits (šoreiz taciņu skaits).

No šīs formulas un no fakta, ka katrai skaldnei ir vismaz 3 malas, seko, ka $šķ \le 15$, tātad vairāk taciņas Mēness ciemā nevar būt.

2. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Lai skaitlis dalītos ar 99, tam jādalās ar 9 un ar 11. *Dalīšanās pazīme ar 9*: skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9. *Dalīšanās pazīme ar 11*: skaitlis dalās ar 11, ja tā pāra pozīcijās esošo ciparu summas un nepāra pozīcijās esošo ciparu summas starpība dalās ar 11 (piem., skaitlim 7845631 šī starpība ir (7+4+6+1)-(8+5+3)=18-16=2, tātad skaitlis 7845632 nedalās ar 11.)

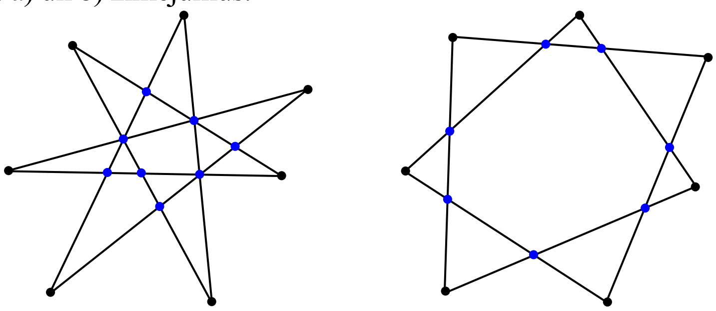
Apzīmēsim ar zvaigznītēm aizstātos ciparus ar *a* un *b*: $2004a2005b$. Lai šis skaitlis dalītos ar 99, summai 2+0+0+4+*a*+2+0+0+5+*b*=13+*a*+*b* jādalās ar 9 un starpībai (2+0+*a*+0+5)-(0+4+2+0+*b*)=1+*a*-*b* jādalās ar 11. Tā kā *a* un *b* ir cipari, tad 0≤*a*+*b*≤18 un -9≤*a*-*b*≤9. Tātad 11+*a*+*b*=18 vai 11+*a*+*b*=27 un 1+*a*-*b*=0. Iegūstam, ka *b*=*a*+1 ⇒ 1) 14+2*a*=18 vai 2) 14+2*a*=27

⇒ 1) a=2, bet 2) vienādojumu neapmierina neviena pieļaujamā a vērtība. ⇒ b=3 un vienīgais skaitlis, kas apmierina uzdevuma prasības ir **2004220053**.

2. Tā kā visu maršrutu ar velosipēdu var nobraukt 7 stundās, tad 3 stundās skolēni nobrauca $\frac{3}{7}$ visa maršruta; līdzīgi izspriež, ka ar autobusu viņi nobrauca $\frac{1}{2}$ visa ceļa. Tātad kājām skolēni veica $1-\frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$ daļu no visa ceļa jeb 10 km. Tātad viss ekskursijas maršruts bija 10 km·14=**140 km** garš.

3. Ar katru „skaldīšanas" reizi akmeņu skaits palielinās par 5-1=4. Tā kā sākumā bija 1 akmens, un skaldīšanas rezultātā klāt nāk ik pa 4 akmeņiem, tad arī galarezultātā iegūstamo akmeņu skaits, dalot ar 4, dos atlikumu 1. Taču 22 dod atlikumu 2 (2≠1), dalot ar 4, tātad tieši 22 akmeņus iegūt nevarēs.

4. Jā, var; skat., piem. 1. a) un b) zīmējumus.



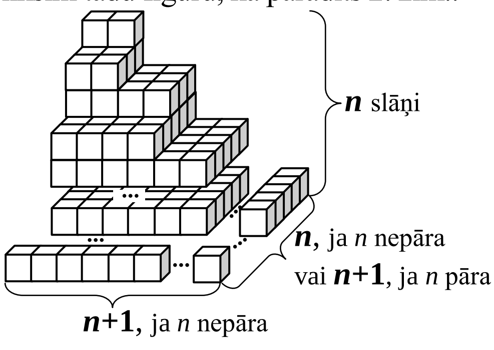
a) b)

1. zīm.

5. Vienādību

$$2\cdot 1\cdot n+2\cdot 2\cdot (n-1)+2\cdot 3\cdot (n-2)+\ldots+2\cdot (n-1)\cdot 2+2\cdot n\cdot 1=$$
$$=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-2)(n-1)+(n-1)\cdot n+n\cdot (n+1)$$

varam ilustrēt, piemēram, sekojoši:
no vienādiem klucīšiem saliksim tādu figūru, kā parādīts 2. zīm..



2. zīm.

Saskaitīsim visus klucīšus divējādi. Skaitot „pa stabiņiem", iegūstam dotās vienādības kreiso pusi (garākā „stabiņa" augstums ir n klucīši, bet vienā slānīti ir 1·2 klucīši, stabiņā ar augstumu n-1 katrā slānītī ir 2·2 klucīši utt.). Skaitot šos pašus klucīšus pa slāņiem, iegūstam dotās vienādības labo pusi. Tā kā klucīšu kopējais skaits nav atkarīgs no skaitīšanas secības, dotā vienādība ir pareiza visām n vērtībām.

3. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Skat., piem., 1.zīm.

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

1.zīm.

2. ***Atbilde:*** der jebkura īsta daļa (gan pozitīva, gan negatīva), t.i., jebkurš skaitlis, kas lielāks par -1 un mazāks par 1, izņemot skaitli 0.

Skaitli 2 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var izteikt tikai divos veidos (ar precizitāti līdz reizinātāju secībai): 1·2 vai (-1)·(-2). Tātad iegūstam četras sistēmas:

$$\begin{cases}[2-x]=2\\ [2+x]=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\le 2-x<3\\ 1\le 2+x<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le -x<1\\ -1\le x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1<x\le 0\\ -1\le x<0\end{cases} \Rightarrow -1<x<0$$

$$\begin{cases}[2-x]=1\\ [2+x]=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\le 2-x<2\\ 2\le 2+x<3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le -x<0\\ 0\le x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x\le 1\\ 0\le x<1\end{cases} \Rightarrow 0<x<1$$

$$\begin{cases}[2-x]=-2\\ [2+x]=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\le 2-x<-1\\ -1\le 2+x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4\le -x<-3\\ -3\le x<-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3<x\le 4\\ -3\le x<-2\end{cases} \Rightarrow \text{nav atris.}$$

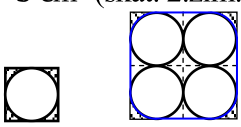
$$\begin{cases}[2-x]=-1\\ [2+x]=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le 2-x<0\\ -2\le 2+x<-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3\le -x<-2\\ -4\le x<-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2<x\le 3\\ -4\le x<-3\end{cases} \Rightarrow \text{nav atris.}$$

Kā redzam, citu pieļaujamo *x* vērtību bez jau pieminētajām nav.

3. Ja tiek novilkta tikai viena taisne, tad plakne ir sadalīta divās pusplaknēs. Nokrāsojot vienu no tām baltu, bet otru – melnu, iegūstam prasīto krāsojumu.

Pieņemsim, ka plaknē ir novilktas vairākas taisnes un visa plakne ir nokrāsota atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Novilksim vēl vienu taisni, un apgabaliem vienā pusē no tās krāsojumu neaiztiksim, bet otrā pusē mainīsim krāsas uz pretējo. Ja divu apgabalu kopējā mala atrodas uz šīs taisnes, tad apgabaliem ir dažādas krāsas saskaņā ar veikto pārkrāsošanu; ja apgabalu kopējā mala atrodas uz kādas no pārējām taisnēm, tad apgabali ir dažādās krāsās saskaņā ar pieņēmumu.

4. Meklētās figūras laukums ir 4*a*-(*a*-*b*)=***3a+b*** cm^2 (skat. 2.zīm.)



2. zīm.

5. ***Atbilde:*** piem., skaitlis 5555555555555=53·104821802935

Vispārīgais pierādījums. Apskatām skaitļus

5
55
555
5555
55555
...
$\underbrace{5555555...5}_{54\,\text{piecinieki}}$

Dalām katru no šiem skaitļiem ar 53 ar atlikumu. Tā kā, dalot ar 53, iegūtajam atlikumam iespējamas tikai 53 dažādas vērtības (tās ir 0; 1; 2; ...; 52), bet apskatāmo skaitļu ir 54 un 54>53, tad kaut kādi divi apskatāmie skaitļi noteikti dos vienādus atlikumus, dalot ar 53. Tātad šo skaitļu starpība dalās ar 53. (*Ja divi skaitļi a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar skaitli c, tad šo skaitļu starpība a-b dalās ar c.*)

Ievērojam: ja abi minētie skaitļi ir $\underbrace{555...5}_{i\ \text{piecinieki}}$ un $\underbrace{555...5}_{j\ \text{piecinieki}}$, kur i>j, tad starpība (kas dalās ar 53) ir

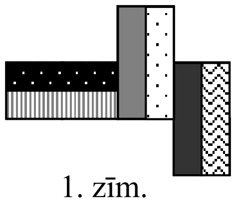
$$S = \underbrace{555...5}_{i-j\ \text{piecinieki}}\underbrace{00...0}_{j\ \text{nulles}}$$

Ievērojam, ka $S = \underbrace{555...5}_{i-j\ \text{piecinieki}} \cdot 10^j$. Tā kā 53 nedalās ne ar 2, ne ar 5, tad 10^j nav nekādas nozīmes tai apstāklī, ka S dalās ar 53; ar 53 dalās reizinātājs $\underbrace{555...5}_{i-j\ \text{piecinieki}}$. Bet šis reizinātājs sastāv tikai no cipariem 5.

4. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Piemēram, $1\cdot 2+3-4+56-7\cdot 8+9=10$. Iespējami daudzi atrisinājumi.

2. Jā, kuba virsmu var aplīmēt pat ar 6 vienādiem taisnstūriem, kas nav kvadrāti, piem., kā parādīts kuba izklājumā 1. zīm.



1. zīm.

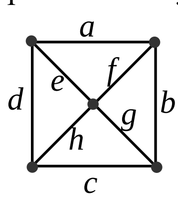
3. Atbilde: 121 minūti.

Tas ir brīžos, kad pulkstenis rāda

00:00; 00:01; 00:05; 00:10; 00:11; 00:15; 00:20; 00:21; 00:50; 00:51; 00:55; 01:00; 01:01; 01:05; 01:10; 01:11; 01:15; 01:20; 01:21; 01:50; 01:51; 01:55; 02:00; 02:01; 02:05; 02:10; 02:11; 02:15; 02:20; 02:21; 02:50; 02:51; 02:55; 05:00; 05:01; 05:05; 05:10; 05:11; 05:15; 05:20; 05:21; 05:50; 05:51; 05:55; 10:00; 10:01; 10:05; 10:10; 10:11; 10:15; 10:20; 10:21; 10:50; 10:51; 10:55; 11:00; 11:01; 11:05; 11:10; 11:11; 11:15; 11:20; 11:21; 11:50; 11:51; 11:55; 12:00; 12:01; 12:05; 12:10; 12:11; 12:15; 12:20; 12:21; 12:50; 12:51; 12:55; 15:00; 15:01; 15:05; 15:10; 15:11; 15:15; 15:20; 15:21; 15:50; 15:51; 15:55; 20:00; 20:01; 20:05; 20:10; 20:11; 20:15; 20:20; 20:21; 20:50; 20:51; 20:55; 21:00; 21:01; 21:05; 21:10; 21:11; 21:15; 21:20; 21:21; 21:50; 21:51; 21:55; 22:00; 22:01; 22:05; 22:10; 22:11; 22:15; 22:20; 22:21; 22:50; 22:51; 22:55.

4. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka uzdevuma prasības izpildīt ir iespējams, t.i., katram minētajam nogrieznim var pierakstīt vienu skaitli atbilstoši uzdevuma prasībām. Apzīmēsim katram nogrieznim pierakstīto skaitli ar burtiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* tā kā parādīts zīmējumā.



Tad ir spēkā sekojošas vienādības:

$$\begin{cases} a+e+f=a+e+g+b \\ f+g+b=f+h+b+c \\ h+g+c=g+e+c+d \\ e+h+d=h+f+d+a \end{cases}$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$a+b+c+d+2e+2f+2g+2h=2a+2b+2c+2d+2e+2f+2g+2h \text{ jeb}$$
$$a+b+c+d=0,$$

bet tā būt nevar, jo *a, b, c* un *d* ir naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs un uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

5. Atbilde: 13 km.

Līdz pirmajam satikšanās punktam abi velosipēdisti kopā ir veikuši visu attālumu no A līdz B. Līdz otrajam satikšanās brīdim abi velosipēdisti kopā kustības sākuma kopā ir veikuši 3 attālumus no A līdz B, tātad līdz otrajam tikšanās brīdim ir pagājis 3 reizes ilgāks laiks nekā līdz pirmajai tikšanās reizei. Tātad velosipēdists, kas izbrauca no punkta A, līdz otrajam tikšanās punktam pavisam bija nobraucis $3 \cdot 6=18$ km, t.i., visu attālumu no A līdz B un vēl 5 km atpakaļ. Tātad attālums starp ciemiem ir 18 km-5 km=13 km.

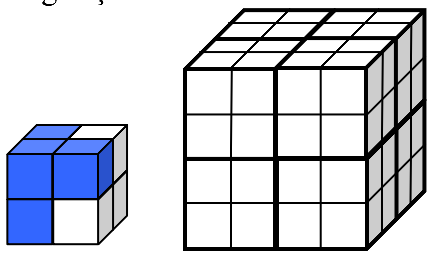
5. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Apzīmēsim skaitli 19992004 ar *a*. Tad 19992005=a+1; 19992003=a-1; 19992006=a+2; 19992002=a-2. Ievietojot šos apzīmējumus dotajā izteiksmē, iegūstam

$$(a+1)(a-1)-(a+2)(a-2)=(a^2-1)-(a^2-4)=3, \text{ tātad}$$
$$19992005 \cdot 19992003 - 19992006 \cdot 19992002 = 3$$

2. a) Kubs sastāv 3x3x3 sastāv no 27 kubiņiem 1x1x1, bet dotā figūriņa – no 4 tādiem kubiņiem. Tā kā 27 nedalās ar 4, tad kubu 3x3x3 no šādām figūriņām salikt nevar.

b) No divām šādām figūriņām var salikt kubu 2x2x2, savukārt no 8 kubiņiem 2x2x2 var salikt kubu 4x4x4, tātad no 16 dotajām figūriņām var salikt kubu 4x4x4.



3. Nē, tā gadīties nevar. Tā kā pirmajā kastītē ir ieliktas 4 pogas, pie tam tajā ir tieši 3 dažādu krāsu pogas. Tātad šajā kastītē ir tieši 2 vienas krāsas pogas (mēs nezinām – kuras) un pa vienai pārējo krāsu pogai. Sākumā katrā krāsā bija pāra skaits pogu, tāpēc tagad ir atlikušas pāra skaits pogu vienā krāsā un nepāra skaits pogu divās citās krāsās. Bet nepāra skaitu nevar vienādi sadalīt pa divām kastītēm, tādēļ nevar gadīties tā, ka otrajā un trešajā kastītē ir vienādi pogu komplekti.

4. Pieņemsim, ka tādus skaitļus var atrast. Apzīmēsim zvaigznīšu vietā ierakstītos skaitļu ar burtiem sekojošā veidā:

$$2\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ 5$$

Pirmo četru skaitļu summa ir 2+a+b+c. Tāda pati ir arī nākamo četru skaitļu summa, t.i., a+b+c+d=2+a+b+c, tātad d=2. Arī summa b+c+2+e=2+a+b+c, tātad e=a. Līdzīgā veidā turpinot iegūstam, ka f=b, g=c un skaitļu virkne ir 2 *a b c* 2 *a b c* 5. Taču pēdējo četru skaitļu summa ir $a+b+c+5 \neq a+b+c+2$.

Tātad nav tādu skaitļu, ko varētu ierakstīt zvaigznīšu vietā, lai izpildītos uzdevuma prasības.

5. Pierakstīsim katram sarkanajam punktam -1, bet katram zaļajam punktam +1. Tādā gadījumā meklējamā summa ir vienāda ar visu punktiem pierakstīto skaitļu summu; tā ir
$999 \cdot (-1) + 1006 \cdot 1 =$ **7**.

Pamatosim, ka tas tā tiešām ir. Katram lokam pierakstītais skaitlis ir vienāds ar abu tā galapunktiem pierakstīto skaitļu pussummu (tik tiešām, ja loka abi galapunkti ir sarkani, tad tam jāpieraksta $((-1)+(-1)):2=-1$; ja abi galapunkti zaļi, tad lokam jāpieraksta $(1+1):2=1$; ja galapunkti ir dažādās krāsās, tad lokam jāpieraksta $(-1+1):2=0$).

Katrs punkts ir galapunkts tieši diviem lokiem, katrā no šiem lokiem pierakstītajiem skaitļiem „ietilpst" puse no apskatāmajam punktam pierakstītā skaitļa. Tātad abiem lokiem pierakstīto skaitļu summā „ietilpst" viss punktam pierakstītais skaitlis. Tātad **visu lokiem pierakstīto skaitļu summā** ietilpst tieši divas reizes visu punktiem pierakstīto skaitļu puses jeb **tieši vienu reizi visi punktiem pierakstītie skaitļi**.