Jauno matemātiķu konkurss 2003./04.m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim nezināmos ciparus ar burtiem tā kā parādīts 1.zīm.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & A & B & C \\
 & \cdot & & & D & E \\
\cline{3-6}
 & & & 4 & F & G \\
 & & H & I & 8 & \\
\cline{2-6}
 & K & 0 & L & 7 & 4
\end{array}$$

1.zīm.

Skaidrs, ka G=4, F=9 (17-8), K=1. Acīmredzami, veicot saskaitīšanu tūkstošu šķirā, rodas pārnesums, kas nav lielāks par 1, tātad tieši 1; no tā seko, ka H=9. Tā kā abi starpreizinātāji ir trīsciparu skaitļi un pirmajam reizinājumam pēdējais cipars ir 2 reizes mazāks nekā otram, tad arī ciparam E jābūt 2 reizes mazākam nekā ciparam D.

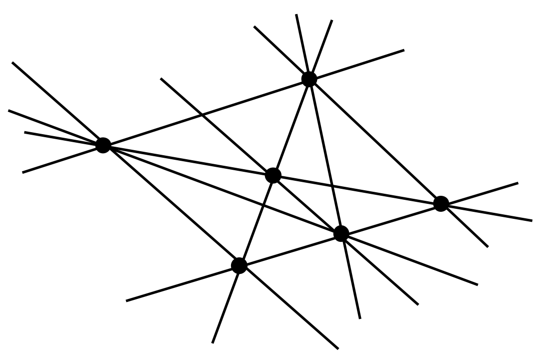
Ņemot vērā minētos secinājumus, redzam, ka ABC·E=494. Tātad gan cipars A, gan cipars E nevar būt lielāki par 4, t.i. var būt 1, 2, 3 vai 4 (pretējā gadījumā reizinājums būs lielāks par 494). Tā kā 494 no minētajiem skaitļiem dalās tikai ar 1 un 2, tātad E=1 vai E=2. Katrā no šiem gadījumiem iegūstam vienu atrisinājumu (skat. 2.zīm. a) un b)).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 4 & 9 & 4 \\
 & \cdot & & 2 & 1 \\
\hline
 & & 4 & 9 & 4 \\
 & 9 & 8 & 8 & \\
\hline
1 & 0 & 3 & 7 & 4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 4 & 7 \\
 & \cdot & & 4 & 2 \\
\hline
 & & 4 & 9 & 4 \\
 & 9 & 8 & 8 & \\
\hline
1 & 0 & 3 & 7 & 4
\end{array}$$

a) b)

2.zīm.

2. Skat., piem., 3.zīm..



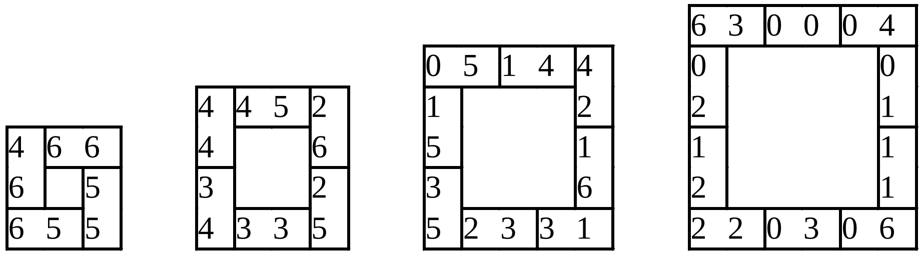
3.zīm.

3. Zināms, ka violeto ziedu ir vismazāk. Pieņemsim, ka to ir 1. Tad sarkano ziedu ir 5-1=4, dzelteno ziedu ir 8-1=7 un balto ziedu ir 19-1-4-7=7, tikpat cik dzelteno ziedu. Taču uzdevumā ir teikts, ka balto ziedu ir **visvairāk**, tātad šis gadījums neder.

Pieņemsim, ka ir 2 violeto ziedi. Tad sarkani ir 5-2=3, dzelteni – 8-2=6 un balti – 19-2-3-6=8 ziedi. Šajā gadījumā tiešām violeto ziedu ir vismazāk un balto ir visvairāk, tātad šis gadījums der.

Apskatīsim gadījumus, kad violeto ziedu ir 3 vai vairāk. Tad sarkano ziedu ir ne vairāk kā 5-3=2, tātad mazāk nekā violeto. Bet tā ir pretruna uzdevuma nosacījumiem. Tātad ir **8** baltie ziedi.

4. 4.zīmējumā parādīts kā var izveidot četrus kvadrātveida rāmjus ar malu garumiem 3, 4, 5 un 6 rūtiņas un punktu summa uz katras malas tiem ir attiecīgi 16, 15, 14 un 13. Paši varat pārliecināties, ka ir izmantoti visi domino kauliņi – katrs vienu reizi.



4. zīm.

5. Pavisam turnīrā tika izspēlētas (5·4):2=10 spēles. Katrā spēlē, kas nebeidzās neizšķirti, tika izcīnīta uzvara, tātad puse spēļu (5 spēles) beidzās neizšķirti. Katrā spēlē tiek sadalīti 2 punkti (vai nu tos iegūst uzvarētājs, vai arī tie tiek sadalīti pa 1 katram spēlētājam neizšķirta gadījumā), tātad kopā turnīrā sadalīti 20 punkti. Tā kā visi dalībnieki izcīnīja vienādu punktu skaitu, tad katrs šahists ieguva 4 punktus. Piemērs, kad izpildās visi uzdevuma nosacījumi, parādīts 5. zīm. - katrs dalībnieks ir izcīnījis 1 uzvaru, vienu spēli zaudējis un 2 spēles beidzis neizšķirti.

	A	B	C	D	E	Kopā
A		1	2	0	1	4
B	1		1	2	0	4
C	0	1		1	2	4
D	2	0	1		1	4
E	1	2	0	1		4

5. zīm.

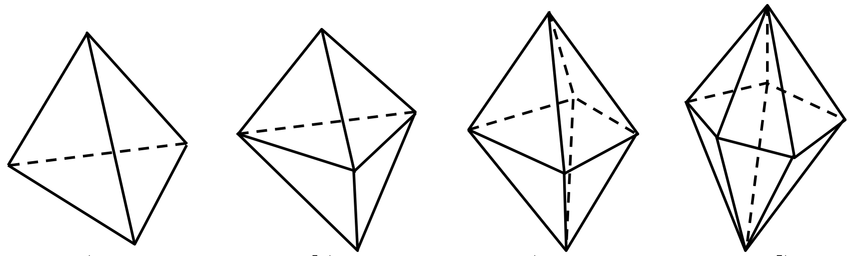
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Skat., piem., 1. zīmējumu. Slīpiem cipariem norādītas skaitļu summas pa rindiņām (aiz katras rindiņas), summas pa kolonnām (zem katras kolonnas) un summas pa abām diagonālēm (augšējos stūros).

36				*28*
3	2	7	4	*16*
5	6	1	8	*20*
9	10	11	12	*42*
13	14	15	16	*58*
30	*32*	*34*	*40*	

1. zīm.

2. Telpiskais ķermenis - daudzskaldnis, kuram ir vismazāk skaldņu, ir trijstūra piramīda – tai ir 4 skaldnes (skat. 2.a) zīm.). Saliekot divas šādas piramīdas kopā, iegūsim 2.b) zīm. redzamo ķermeni, kuram ir 6 skaldnes – vienādmalu trijstūri. Tātad no dotajiem 10 trijstūrīšiem Jānītis var izgatavot augstākais 2 lukturīšus (piem., 2.a) un 2.b) zīmējumā parādītos), jo trīs lukturīšiem būs nepieciešami vismaz 3·4=12 trijstūrīši. Vēl no pieejamajiem 10 vienādmalu trijstūrīšiem var izveidot 2.c) vai 2.d) zīmējumā attēlotos ķermeņus; tie iegūti divas četrstūra resp. piecstūra piramīdas saliekot ar pamatiem kopā. 2.c) zīmējumā attēlotajam ķermenim ir 8 skaldnes, tātad tiks izmantoti tikai 8 trijstūri un 2 trijstūri paliks pāri, jo no tiem citu ķermeni izveidot nevar. 2.d) zīmējumā attēlotajam ķermenim ir 10 skaldnes, tātad tiks izmantoti visi trijstūri.



a) b) c) d)

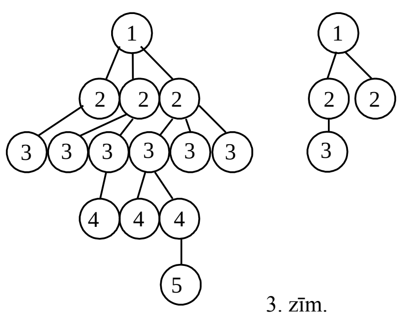
2.zīm.

3. Atbilde: nē. Uzdevuma prasības var apmierināt tikai skaitļa 2004 dalītāji. Skaitlim 2004 ir 12 sekojoši dalītāji: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002 un 2004. Pārbaudot katru no šiem skaitļiem – pareizinot to ar tā ciparu summu, redzam, ka nevienā gadījumā reizinājums nav vienāds ar 2004.

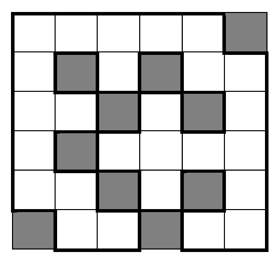
4. Izvēlēsimies vienu skolēniem un piešķirsim viņam numuru „1”. Visiem viņa draugiem piešķirsim katram numuru „2”. Visiem bērniem, kas draudzējas ar kādu, kuram ir numurs „2” un kuram vēl nav sava numura, piešķirsim numuru „3”, utt. Ja šim procesam beidzoties, paliek daži bērni, kuriem vēl nav numuru, izvēlamies vienu no tiem, piešķiram tam numuru 1, utt. (Piemēram, skat 3.zīm)

Pēc tam uz Cirku nosūtām bērnus ar nepāra numuriem, uz Leļļu teātri – ar pāra numuriem.

Šādā veidā nosūtot bērnus uz izklaides pasākumiem, katrs bērns varēs uzzināt informāciju par pasākumu, kurā nav piedalījies.



3. zīm.



4. zīm.

5. Jā, skat., piem. 4. zīm, kur 1 rūtiņas malas garums ir 1km; iekrāsotie kvadrātiņi ir izraktie dīķi un līči. Atlikusī sauszeme tik tiešām ir „viengabalaina” – to visu var izstaigāt, nepārlecot nevienam dīķim vai dīķu „savienojumam”, un kopējās krasta līnijas garums ir 54 km.

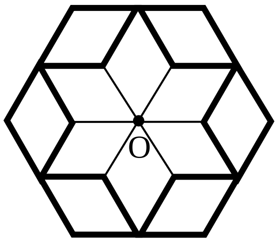
3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Piemēram, $(12\cdot 3:4-5+6-7+8)\cdot 9=99$ vai $(1-2+3)\cdot 4\cdot 5+6\cdot 7+8+9=99$. Iespējami daudzi citi atrisinājumi.

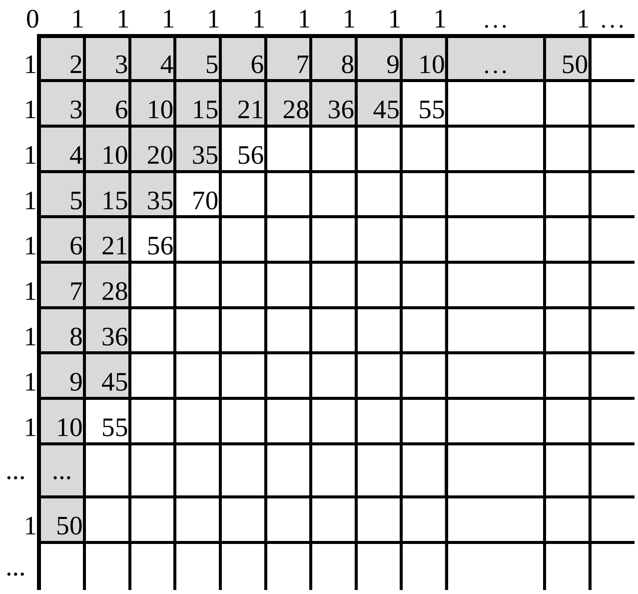
2. Doto vienādojumu pārveidojam par 2y=30-5x jeb 2y=5(6-x). Tā kā skaitļi x un y ir naturāli skaitļi, tad reizinājumam 2y jādalās ar 5. 2 ar 5 nedalās, tātad y jādalās ar 5, t.i., y vērtības var būt 5, 10, 15, 20 utt. Ja y=5, tad x=(30-2y):5=4; ja y=10, tad x=2, ja y≥15, tad x≤0 un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Tātad par dotā vienādojuma atrisinājumu der vienīgi skaitļu pāri x=4, y=5 un x=2, y=10.

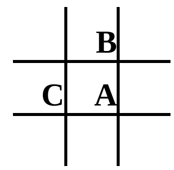
3. Sadalām zvaigznīti tā kā parādīts 1.zīmējumā (O ir dotā sešstūra centrs). Iegūtie 6 rombi ir vienādi savā starpā un vienādi arī ar tiem rombiem, kas izgriezti no sešstūra stūriem (pilnā risinājumā tas ir jāpierāda!). Tā kā gan zvaigznīte sastāv no 6 rombiem, gan sešstūra pārējā daļa ārpus zvaigznītes sastāv no 6 tādiem pašiem rombiem, tad šo daļu laukumi ir vienādi, bet tas nozīmē, ka zvaigznīte aizņem pusi no visa sešstūra laukuma.



1. zīm.



2.zīm.



3. zīm.

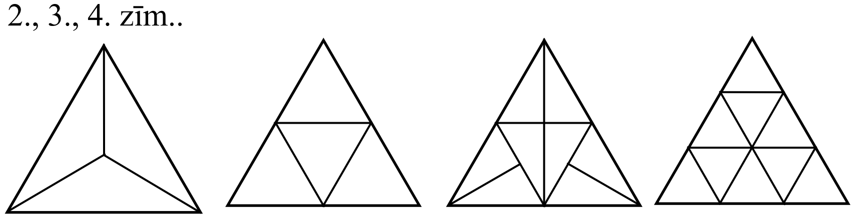
4. 2.zīmējumā katrai virsotnei pierakstīts skaitlis, cik veidos skudriņa Tipa var nokļūt līdz šai virsotnei, kā arī attēlotas gandrīz visas virsotnes, līdz kurām var nokļūt ne vairāk kā 50 veidos. Ievērosim, ka līdz visām virsotnēm, kas atrodas uz pašas augšējās resp. uz pašas kreisās malas, skudriņa var nokļūt tikai vienā viedā – ejot tikai taisni pa labi resp. taisni uz leju. Lai aprēķinātu, cik veidos Tipa var nokļūt līdz kādai citai virsotnei A (skat. 3.zīm.), jāsaskaita, cik veidos viņa var nokļūt „iepriekšējās" virsotnēs B un C kopā (virsotnē A skudriņa var nonākt tikai ejot uz leju no virsotnes B vai ejot pa labi no virsotnes C).

5. Putniņš lidoja tikpat ilgi, cik brauca velosipēdisti. Tā kā putna ātrums ir 2 reizes lielāks nekā velosipēdistiem, tad putniņš šajā laikā nolidos 2 reizes garāku ceļa gabalu nekā nobrauks velosipēdisti. Velosipēdisti nobrauca pusi no 100 km, t.i., 50 km, tad putniņš nolidoja 50·2=**100 km**.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. No uzdevuma nosacījumiem seko, ja N ir meklējamais skaitlis, tad N+1 dalās ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 10. Mazākā iespējamā N+1 vērtība ir MKD(2,3,4,5,6,7,8,9,10)=8·9·5·7=2520. Atliek pārbaudīt, vai N=2520-1=2519 dalās ar 11 (pārbaudi var veikt izmantojot skaitļu dalāmības pazīmi: saskaita ciparus, kas dotajā skaitlī atrodas nepāra pozīcijās un atsevišķi ciparus, kas atrodas pāra pozīcijās, un nosaka šo summu starpību: ja tā dalās ar 11, tad arī dotais skaitlis dalās ar 11). Tiešām, (9+5)-(1+2)=11, tātad skaitlis 2519 dalās ar 11, pie tam tas ir mazākais skaitlis, kas apmierina visas uzdevuma prasības.

2. Jā, var. Skat. 1., 2., 3., 4. zīm..



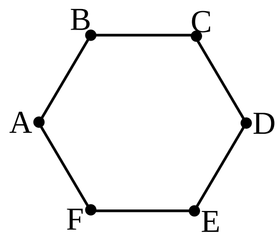
1. zīm. 2. zīm. 3. zīm. 4. zīm.

3. Apzīmēsim skaitli 20032004 ar *n*. Tad 20032002=*n*-2, 20032003=*n*-1, 20032005=*n*+1, 20032006=*n*+2 un dotā izteiksme pārveidojas par $\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n}{(n-2)(n+2)+4}$. To vienkāršojot, iegūstam

$$\frac{n(n^2-1)+n}{(n^2-4)+4}=\frac{n(n^2-1+1)}{n^2}=n,$$

$$\text{tātad } \frac{20032003\cdot 20032004\cdot 20032005+20032004}{20032002\cdot 20032006+4}=20032004$$

4. Jā var. Apzīmēsim zinātniekus ar punktiem A,B, C, D, E, F, un draudzību starp diviem zinātniekiem – ar nogriezni starp atbilstošajiem punktiem. Piemēru, kad izpildās uzdevuma prasība, skat. 5. zīm.



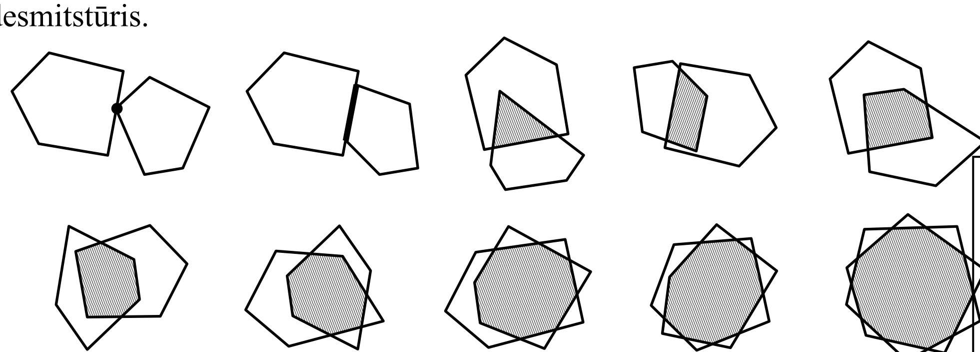
5. zīm.

5. Pavisam iespējamas 4^2=16 dažādas virknītes, kas varētu derēt par kodu. Tātad nospiestu pogu virknītē ir jāparādās šīm visām 16 virknītēm. Tātad vismaz 4+15=19 reizes pogas ir jāspiež (pirmais „kods" un vēl vismaz 15 pogas, jo katras divas virknītes atšķiras vismaz vienā pozīcijā). Piemērs **ssssZZZZSZSSZSZZSSS** parāda, ka ar 19 pogu nospiešanām pietiek.

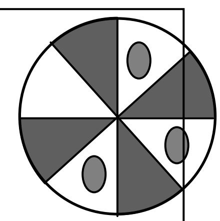
5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Ir 5 viencipara nepāra skaitļi, 45 divciparu nepāra skaitļi, kopā tajos ir 90 cipari, 450 nepāra trīsciparu skaitļi, kuros kopā ir 1350 cipari, kopā jau ir uzrakstīti 5+90+1350=1445 cipari. No 1001 līdz 1279 (ieskaitot) ir 140 nepāra skaitļi, kopā 560 cipari. Tātad no 1 līdz 1279 ir uzrakstīti 1445+560=2005 cipari. 2005.vietā atrodas cipars 9, bet 2004. vietā – cipars **7**.

2. Tā kā abi piecstūri ir izliekti, viena piecstūra katra mala var krustot augstākais divas otra piecstūra malas, tātad uz vienas šī piecstūra malas var atrasties ne vairāk kā 2 kopīga daudzstūra virsotnes. Tas nozīmē, ka kopīgajai daļai nevar būt vairāk kā 2·5=10 virsotnes. 1. zīmējumā parādīts, ka kopīgā daļa var būt punkts, nogrieznis, trijstūris, četrstūris, piecstūris, sešstūris, septiņstūris, astoņstūris, deviņstūris un desmitstūris.



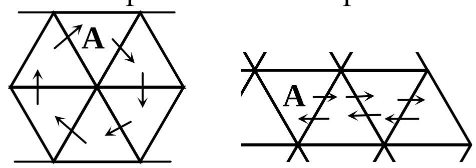
1. zīm.



2. zīm.

3. Izkrāsosim riņķa sektorus pamīšus balts, melns..., kā parādīts 2.zīm.. Katra gājiena rezultātā starpība starp podu skaitu, kas atrodas baltos sektoros, un podu skaitu, kas atrodas melnos sektoros, nemainās (jo vienā gājienā medus podu skaits baltos sektoros tāpat kā melnos sektoros palielinās tieši par 1). Tā kā sākumā šī starpība ir 3, bet gadījumā, ja visos sektoros ir vienāds podus skaits, šī starpība ir 0, tad to panākt nav iespējams.

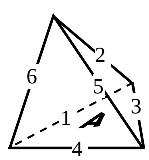
4. Vispirms ievērosim, ka lai atgrieztos sākotnējā lauciņā, piramīda ir jāpārveļ pāra skaita reižu (pamatojiet to patstāvīgi!). Skaidrs, ka jāizdara vismaz 6 gājieni, jo piramīdai ir 6 šķautnes. Taču pēc 6 gājienu izdarīšanas piramīda var atgriezties sākotnējā lauciņā, ja tā vēlusies ap vienu savu virsotni (skat. 3.zīm. a)) vai arī vēlusies uz priekšu un atpakaļ pār vienām un tām pašām skaldnēm (skat., piem., 3.zīm. b)). Jebkurā gadījumā piramīda būs pārvēlusies tikai pār 3 dažādām šķautnēm.



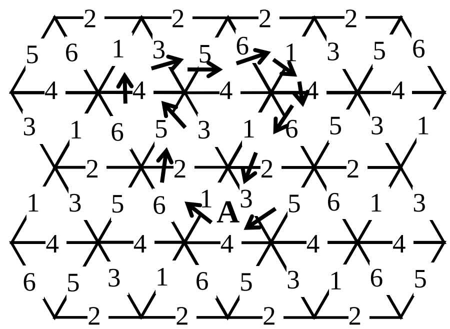
a) b)

3.zīm.

Ievērosim, ka lai kā arī piramīdu „ripinātu”, katra tās skaldne var nonākt tikai noteiktos lauciņos, atkarībā no tā, kā piramīda bijusi novietota sākumā. Tātad arī katra šķautne var nonākt tikai uz noteiktiem nogriežņiem. Piemēram, ja piramīdas šķautnes sanumurējam kā parādīts 4. zīm., tad cipari 5. zīm. norāda, kura šķautne var nonākt šajā nogrieznī.



4. zīm.



5. zīm.

Varam pārliecināties, ka ar mazāk nekā 12 gājieniem uzdevuma prasības izpildīt nevar. Kā to izdarīt ar 12 gājieniem, skat., piem., 5.zīm..

5. Jā, noteikti. Līzītei jārīkojas sekojoši.
Līzīte norāda uz 5 kārbām un jautā, vai lelle ir tur.

A Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tad tālāk jautā par 2 no šīm kārbām.

- **A1** Ja atbilde atkal ir „jā” (2 konf.), tad jautā, vai lelle ir vienā no šīm kārbām. Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tad Līzīte iegūst lelli, samaksājot 6 konfektes; ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad lelle ir otrā kārbā un Līzīte to iegūst samaksājot 5 konfektes.
- **A2** Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tātad lelle ir pārējās 3 kastēs no 5 apskatītajām. Līzīte jautā, vai lelle ir vienā no šīm 3 kastēm. Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), Līzīte lelli iegūst, atdodot 5 konfektes; ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad jautā, vai lelle ir vienā no atlikušajām divām. Ja atbilde ir „jā”, iegūst lelli samaksājot kopā 6 konfektes, ja atbilde ir „nē”, tad pietiek ar 5 konfektēm.

B Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad jautā par 3 no atlikušajām 8 kastēm.

- **B1** Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), tālāk rīkojas līdzīgi kā A2 gadījumā. Starp 3 kastēm īsto var atrast samaksājot ne vairāk kā 3 konfektes, tātad kopā ar 6 konfektēm pietiks.
- **B2** Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tātad lelle ir 5 atlikušajās kastēs. Jautājam par 2 no tām.
  - **B2a** Ja atbilde ir „jā” (2 konf.), jautājot par vienu no tām, noskaidrojam, kurā kastē ir lelle, samaksājot kopā ne vairāk kā 6 konfektes.
  - **B2b** Ja atbilde ir „nē” (1 konf.), tad paliek 3 konfektes un zināms, ka lelle ir vienā no 3 kastēm. Rīkojas līdzīgi kā A2 gadījumā un iegūst lelli.