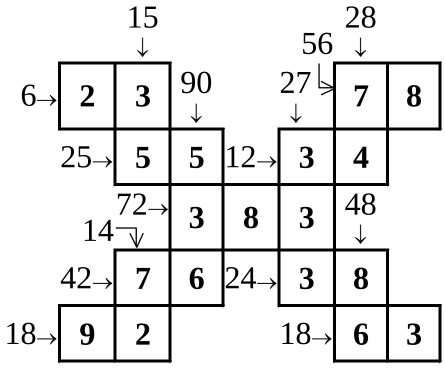
Jauno matemātiķu konkurss 2002./03. m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: skat. 1. zīm.



1. zīm.

2. Atbilde: Brencis pazīst 15 skaitļus, kuru summa ir 1470.

Risinājums. Tā kā Brencis pazīst tikai 3 dažādus ciparus, tad viņš pazīst tikai 3 viencipara skaitļus 1; 2; 3. Brenča zināmajiem divciparu skaitļiem pirmais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2 vai 3 – tātad 3 iespējas, bet otrais cipars – jebkurš no atlikušajiem diviem cipariem. Tātad Brencis pavisam pazīst $2 \cdot 3 = 6$ divciparu skaitļus. (Tie ir 12; 13; 21; 23; 31; 32.) Līdzīgi noskaidrojam, ka Brencis pazīst $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ trīsciparu skaitļus. (Tie ir 123; 132; 213; 231; 312; 321.) Skaidrs, ka Brencis nepazīst nevienu skaitli, kura pierakstā ir četri vai vairāk cipari, jo skaitlī visiem cipariem jābūt dažādiem un Brencis zina tikai trīs ciparus. Tātad pavisam Brencis pazīst 3+6+6=**15** dažādus skaitļus.

Vispirms noskaidrosim visu Brenča zināmo viencipara skaitļu summu: 1+2+3=6. Visos sešos zināmajos divciparu skaitļos katrs no dotajiem cipariem tieši divas reizes ir kā vienu cipars un tieši divas reizes ir desmitu cipars. Tāpēc visu Brenča divciparu skaitļu summu var aprēķināt sekojoši: $2 \cdot (1+2+3) \cdot 10 + 2 \cdot (1+2+3) = 120 + 12 = 132$. Līdzīgi aprēķināsim Brencim zināmo trīsciparu skaitļu summu (visos šajos skaitļos katrs cipars tieši divas reizes ir kā vienu cipars, divas reizes kā desmitu cipars un divas reizes kā simtu cipars):

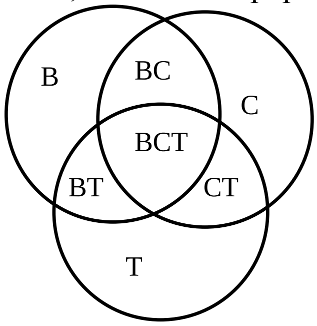
$2 \cdot (1+2+3) \cdot 100 + 2 \cdot (1+2+3) \cdot 10 + 2 \cdot (1+2+3) = 1200 + 120 + 12 = 1332$.

Tātad visu Brencim zināmo skaitļu summa ir 6+132+1332=**1470**.

Piezīme: protams, konkrētajā uzdevumā viegli varēja aprēķināt summu, vienkārši saskaitot visus 15 skaitļus. Taču ir vērts iepazīties ar doto risinājumu, jo tajā parādīts vispārīgs paņēmiens līdzīgu uzdevumu risināšanai.

3. Atbilde: Limpopo dzīvo 490 iedzīvotāji.

Risinājums. Attēlosim visus salas iedzīvotājus ar Eilera riņķiem – viena riņķa iekšpusē atrodas visi cilvēki, kas runā, burbur valodā, otra riņķa iekšpusē – tie, kas runā cipcip valodā, trešajā riņķī – tie, kas runā tamtam valodā. Apgabalā, kas kopīgs diviem riņķiem, atrodas tie, kas prot abas divas valodas utt. (skat. 2. zīm.). Ieviesīsim iedzīvotāju skaita apzīmējumus: B – tikai burbur; C – tikai cipcip; T – tikai tamtam; BC – tikai burbur un cipcip; BT – tikai burbur un tamtam; CT – tikai cipcip un tamtam; BCT – visas trīs valodas; S – visu Limpopo iedzīvotāju skaits.



2. zīm.

Cilvēki, kas nerunā kādā valodā, atrodas apgabalos ārpus konkrētā riņķa. (Piemēram, tie kas nerunā burbur valodā, izvietojušies pa apgabaliem C, CT un T.) Tad saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem iegūstam sekojošus vienādojumus:

$B+C+BC=200$ **(1)**

$C+T+CT=210$ **(2)**

$B+T+BT=220$ **(3)**

Saskaitot (1), (2) un (3) vienādojumus, iegūstam

$2\cdot(B+C+T)+BC+BT+CT=630$ jeb $BC+BT+CT=630-2\cdot(B+C+T)$

Ņemot vērā to, ka tikai vienu valodu prot 180 cilvēki jeb $B+C+T=180$, iegūstam, ka **tieši divas** valodas zina

$BC+BT+CT=630-2\cdot 180=270$ iedzīvotāji.

Tā kā Limpopo dzīvo cilvēki, kas zina tikai vienu valodu, vai tādi, kas zina tieši divas valodas, vai cilvēki, kas zina tieši trīs minētās valodas, un nekādi citi, tad kopējais iedzīvotāju skaits

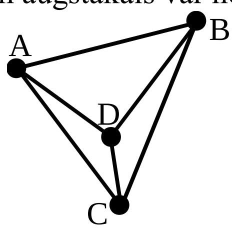
$S=(B+C+T)+(BC+BT+CT)+BCT=180+270+40=$**490**.

4. Atbilde: 9 nogriežņus.

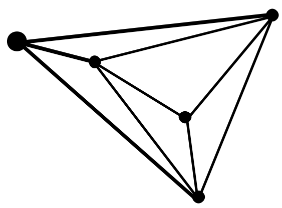
Risinājums. Vispirms apskatīsim, cik, visaugstākais, nogriežņus, lai tie nekrustotos, plaknē var novilkt starp 4 punktiem. Pavisam starp 4 punktiem var novilkt 6 nogriežņus. 3. zīmējumā parādīts piemērs, kad starp 4 punktiem novilkti 6 nogriežņi un nekādi divi no tiem nekrustojas. Pie tam ievērosim, ka šie četri punkti noteikti veido ieliektu četrstūri. Izliekta četrstūra gadījumā abas diagonāles atrodas četrstūra iekšpusē, tāpēc nevar novilkt abas diagonāles tā, lai tās nekrustotos. Tātad apskatāmajā četru punktu sistēmā novelkot visus iespējamos nogriežņus, iegūstam trijstūri, kuram iekšpusē atzīmēts viens punkts.

Tagad 4 punktu sistēmai pievienosim piekto punktu. To var ielikt vai nu vienā no mazajiem trijstūriem ABD, ACD vai BCD (skat. 3. zīm.) vai arī ārpus lielā trijstūra. Pirmajā gadījumā vēl var novilkt 3 jaunus nogriežņus, kas nekrusto nevienu no jau novilktajiem nogriežņiem. Otrajā gadījumā, atkarībā no punkta izvēles, var novilkt vai nu 2, vai 3 jaunus nogriežņus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

Tātad plaknē starp 5 punktiem augstākais var novilkt 6+3=9 nogriežņus. Piemēru skat. 4. zīm..



3. zīm.


4. zīm.

5. Atbilde: 1) vismaz 10 šokolādītes; 2) vismaz 16 šokolādītes.

Risinājums. Uzdevumā prasīts noskaidrot mazāko iespējamo summu, tātad jāizvēlas vismazākie uzdevumam atbilstošie saskaitāmie un jāatrod to summa. Pēc tam noteikti ir jāuzrāda piemērs, kas apstiprina tāda gadījuma iespējamību.

1) Ja kāds bērns neēda šokolādes (tātad "apēda" 0 šokolādes) un visi pārējie apēda dažādu skaitu šokolādīšu, tad mazākā iespējamā summa ir 0+1+2+3+4=10 šokolādītes. Tā kā katrā pauzē tika apēstas tieši 2 šokolādītes, tad pavisam bija 5 reklāmas pauzes. 5. zīmējuma piemērs parāda, ka šāds gadījums iespējams. (Zīmējumā ar burtiem apzīmēti bērni, ar cipariem reklāmas pauzes, bet zvaigznīte norāda kurā pauzē kurš bērns apēda vienu šokolādīti.)

pauzes	1.	2.	3.	4.	5.	kopā
A						0
B	*					1
D	*	*				2
E		*	*	*	*	4
G			*	*	*	3
kopā						**10**

5. zīm.

2) Tā kā katrs bērns apēdis vismaz vienu šokolādīti, tad tagad mazākā iespējamā summa ir 1+2+3+4+5=15. Taču katrā pauzē tika apēstas tieši 2 šokolādes, tātad kopējam apēsto šokolādīšu skaitam jādalās ar 2 jeb jābūt pāra skaitlim. Mazākais pāra skaitlis, kas nav mazāks par 15, ir 16. Tātad šajā gadījumā tika apēstas vismaz 16 šokolādītes un bērni redzēja 16:2=8 reklāmas pauzes. Šī gadījuma piemēru skat. 6.zīm..

pauzes	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	kopā
A	*								1
B	*	*							2
D		*	*		*	*	*	*	6
E			*	*		*		*	4
G				*	*		*		3
kopā									**16**

6. zīm.

2. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Atbilde: viens dārgumu meklētājs ieguva 990 dālderus, otrs – 770 dālderus.

Risinājums. Tā kā ir tikai divi dārgumu meklētāji, tad, ja viens dārgumu meklētājs ieguva par 30 dālderiem vairāk nekā bija plānots sākumā, tad otrs – par 30 dālderiem mazāk nekā plānots sākumā. Vispirms noskaidrosim kura daļa no visiem dālderiem ir šie 30 dālderi. Sākumā bija plānots, ka pirmais dārgumu meklētājs saņems $\frac{6}{5+6}=\frac{6}{11}$ no visiem dālderiem, bet faktiski viņš dabūja $\frac{9}{9+7}=\frac{9}{16}$ no visiem dālderiem. Aprēķinām starpību $\frac{9}{16}-\frac{6}{11}=\frac{3}{176}$, tātad $\frac{3}{176}$ no visiem dālderiem ir 30 dālderi un $\frac{1}{176}$ no visiem dālderiem ir 10 dālderi. Tātad pavisam bija 176 reizes vairāk jeb $10\cdot176=1760$ dālderi.

Tagad varam aprēķināt, ka pirmais dārgumu meklētājs saņēma $\frac{9}{16}\cdot1760=990$ dālderus, bet otrs $\frac{7}{16}\cdot1760=770$ (jeb 1760-990=770) dālderus.

2. a) Uzdevumā bija prasīts tikai noskaidrot, vai **eksistē** šādi divi skaitļi, tāpēc atrisinājumā pietiek uzrādīt vienu skaitļu pāri, kur izpildās dotais nosacījums, piemēram 89+34=123.

Atrisināsim uzdevumu, ja būtu prasīts atrast **visus** īpašo divciparu skaitļu pārus, kuru summa arī ir īpašais skaitlis. Pavisam ir 8 īpašie divciparu skaitļi – to pirmais cipars var būt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (0 nevar būt, jo tad nebūs divciparu skaitlis; 9 nevar būt, jo nākamajam ciparam jābūt 9+1=10, bet tāda **cipara** nav), pie tam jebkuru īpašu divciparu skaitli varam uzrakstīt kā $10\cdot n+(n+1)=11n+1$, kur n ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 vai 8. Tātad divu īpašu skaitļu $11a+1$ un $11b+1$ (a un b – cipari, izņemot 0 un 9) summa ir $(11a+1)+(11b+1)=11(a+b)+2$. Tagad šķirosim sekojošus gadījumus:

I ja $a+b<9$ (tātad ir skaitlis no 1 līdz 8), tad $11(a+b)+2$ ir divciparu skaitlis, bet nav īpašs skaitlis, jo īpaši skaitļi uzrakstāmi formā $11n+1$;

II ja $a+b\geq9$, tad $11(a+b)+2$ ir trīsciparu skaitlis, pie tam $11(a+b)+2\leq11(8+8)+2=178$. Vienīgais trīsciparu īpašais skaitlis, kas mazāks par 178, ir 123.

Tātad $11(a+b)+2=123 \Rightarrow 11(a+b)=121 \Rightarrow a+b=11$.

Pārbaudot, redzam, ka tiešām der skaitļu pāri 89+34=123; 78+45=123; 67+56=123. Tie arī ir vienīgie divciparu īpašo skaitļu pāri, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

b) Nē, tādus divus trīsciparu īpašos skaitļus atrast nevar. Īpašo trīsciparu skaitli var uzrakstīt formā $100n+10(n+1)+n+2=111n+12$, kur n ir cipars 1, 2, 3, 4, 5, 6 vai 7 (0, 8, 9 neder līdzīgi kā a) gadījumā). Divu trīsciparu īpašu skaitļu summu var uzrakstīt $(111a+12)+(111b+12)=111(a+b)+24$ (a un b ir 1, 2, ..., 7). Atkal šķirosim divus gadījumus:

I ja $a+b<9$, tad $111(a+b)+24$ ir trīsciparu skaitlis, bet nav īpašs skaitlis;

II ja $a+b\geq 9$, tad $111(a+b)+24$ ir četrciparu skaitlis, pie tam $111(a+b)+24\leq 111(7+7)+24=1578$. Mums varētu derēt vienīgi īpašais četrciparu skaitlis 1234. Tad $111(a+b)+24=1234 \Rightarrow 111(a+b)=1210$; tā kā $a+b$ ir naturāls skaitlis, tad 1210 ir jādalās gan ar 111, ga ar $a+b$, bet 1210 nedalās ar 111. Tātad prasītā veida trīsciparu skaitļi neeksistē.

Piezīme. Tā kā pavisam ir tikai 7 īpašie trīsciparu skaitļi, tad šo uzdevumu varēja arī atrisināt, tieši pārbaudot visu šo skaitļu summas pa divi; pavisam jāveic $(6\cdot 7):2=21$ pārbaude.

3. Atbilde: bulciņa maksā 13 sant., saldējums 27 sant. un limonāde 53 sant.

Risinājums. Pieņemsim, ka bulciņa maksā b sant., limonāde – l sant. un saldējums - s santīmus. Pēc uzdevuma nosacījumiem varam uzrakstīt sekojošas sakarības:

$b+s+l=93$ **(1)**; $s<30$ **(2)**; $l=2b+s$ **(3)**; $4b<l<2s$ **(4)**.

No (3) vienādības izteiksim $s=l-2b$ un ievietosim (1) vienādībā:

$b+l-2b+l=93 \Rightarrow 2l-b=93$ **(5)**

Tā kā limonāde maksā vairāk nekā 4 bulciņas ($l>4b$), limonādes vietā ņemot 4 bulciņas, kopējā summa būs mazāka; vienādībā (5) aizstājot l ar $4b$, sākotnējā izteiksmes vērtība samazinās, tātad iegūstam $2\cdot 4b-b<93$. Tātad $7b<93$ un $b<\frac{93}{7}=13\frac{2}{7}$. Tā kā b ir bulciņas cena santīmos – vesels skaitlis, tad varam rakstīt, ka $b\leq 13$.

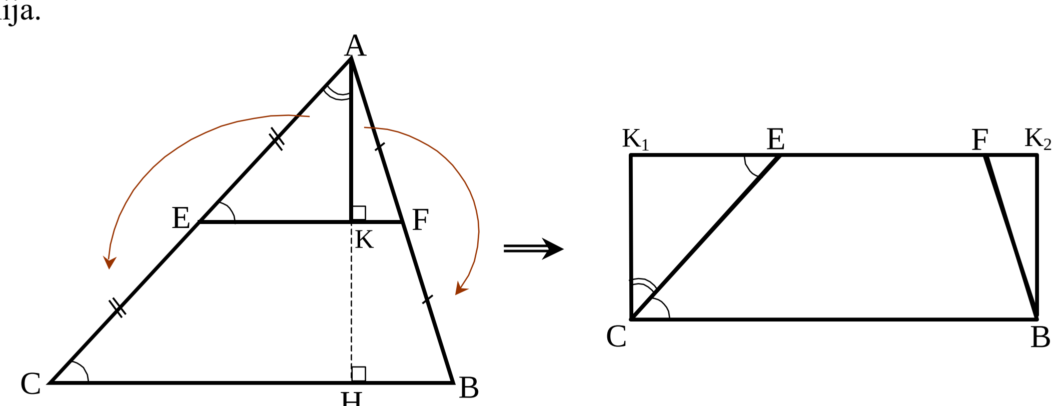
Aprēķināsim $l=(93+b):2$ un $s=93-l-b$, izmantojot visas iespējamās b vērtības. Skaidrs, ka b jābūt nepāra skaitlim, citādi l nesanāk naturāls skaitlis.

Ja $b=13$, tad $l=53$ un $s=27$ (apmierina visus uzdevuma nosacījumus).

Ja $b\leq 11$, tad $l\leq 52$ un $s\geq 30$ – neapmierina nosacījumu (2).

Tātad uzdevumam ir viena atbilde: bulciņa maksā 13 sant., saldējums 27 sant. un limonāde 53 sant.

4. Atbilde: Skat. 1. zīm., kur griezuma līnijas ir AK – daļa no ΔABC augstuma un EF – ΔABC viduslīnija.



1. zīm.

Pamatojums. Jāpamato, ka CK_1K_2B ir taisnstūris, t.i., visi tā leņķi ir taisni.

Griežot iegūtas daļas EKA, AKF un CEFB savietojam tā, ka nogrieznis EA sakrīt ar nogriezni EC un nogrieznis AF sakrīt ar nogriezni FB (šie nogriežņi tiešām sakrīt, jo E un F ir atbilstoši malu AC un AB viduspunkti, tātad sadala šos nogriežņus divās vienādās daļās), pie tam virsotne A sakrīt atbilstoši ar virsotnēm C un B.

EF ir ΔABC viduslīnija, tātad EF||CB. Tā kā AH ir augstums, tad $AH\perp CB$ un $AH\perp EF$ (*ja taisne ir perpendikulāra vienai no paralēlajām taisnēm, tad tā ir perpendikulāra arī otrai taisnei*). Tātad $\angle EKA=\angle FKA=90°$ un arī $\boldsymbol{\angle EK_1C=\angle FK_2B=90°}$.

$\angle ECB=\angle AEF$ (*kā kāpšleņķi pie paralēlām taisnēm CB un EF, kuras krusto taisne AC*). Savukārt $\angle KEA+\angle EAK=90°$ (*kā taisnleņķa trijstūra EAK šaurie leņķi*), Tātad arī $\angle ECB+\angle EAK=\angle ECB+\angle ECK_1=\boldsymbol{\angle BCK_1=90°}$.

Tā kā četrstūrī CK_1K_2B trīs leņķi ($\angle K_2K_1C$, $\angle K_1K_2B$, $\angle K_1CB$) ir taisni, tad arī ceturtais leņķis $\angle K_2BC=360°\text{-}3\ 90°=90°$, tātad četrstūris CK_1K_2B ir taisnstūris.

5. Ne noteikti. Iespējams, ka uz sarkanajām kartītēm ir uzrakstīti tikai pāra skaitļi, uz zilajām – tikai nepāra skaitļi (no 1 līdz 100 ir tieši 50 pāra un 50 nepāra skaitļi). Bet trīs pāra skaitļu reizinājums (dalās ar 2) nevar būt vienāds ar trīs nepāra skaitļu reizinājumu (ar 2 nedalās). Iespējami arī citi “nelabvēlīgi” sadalījumi, taču šī uzdevuma atrisinājumā pietiek uzrādīt tikai vienu gadījumu, kad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbildi skat. 1. zīm.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\
 & \cdot & & \mathbf{2} & \mathbf{9} \\
\cline{2-5}
 & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\
 & \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4}
\end{array}$$

1. zīm.

Risinājums. Ievērosim, ka K ir summas A+E vai A+E+1 (ja saskaitot iepriekšējā šķirā rodas pārnesums), desmitu cipars, pie tam A un E cipari (ne lielāki kā 9), tātad **K=1**.
Tā kā V+D=D (iepriekšējā šķirā pārnesums noteikti nerodas), tad **V=0**.
Saskaitot V+D pārnesums nerodas, tāpēc no vienādības K+K=D iegūstam **D=**1+1=**2**.
Reizinājuma D(=2)·C pēdējais cipars ir D(2), tātad C varētu būt 1 vai 6. Tā kā K=1, tad **C=6.**
D·C=12, tātad uz nākamo šķiru rodas pārnesums 1. Tad 2·B+1 pēdējais cipars ir 1 jeb reizinājuma 2·B pēdējais cipars ir 0. Tas iz iespējams, ja B ir 0 vai 5. Tā kā V=0, tad **B=5**.
2 reizinot ar skaitli ABC, reizinājumā iegūst trīsciparu skaitli, tātad A<5 (pretējā gadījumā 2·ABC>2·500=1000 – vismaz četrciparu skaitlis). Tā kā cipari 0, 1, 2 jau izmantoti, tad A var būt 3 vai 4. Vēl ievērosim, ka A ir arī reizinājuma 6·E pēdējais cipars, tātad pāra skaitlis. Tātad **A=4**.
ABC·D=EKD jeb 456·2=912, tātad **E=9**.
Tagad varam viennozīmīgi atjaunot reizināšanas piemēru un redzam, ka **O=3**.

2. Atbilde: 45 skaitļi.
Risinājums. Skaitli 36 reizinājumā dod cipari **1)** 4·9; **2)** 6·6; **3)** 2·2·9; **4)** 3·3·4; **5)** 2·3·6; **6)** 2·2·3·3, kā arī katram no šiem reizinājumiem var piereizināt vienu vai vairākus ciparus 1 (jo reizinot ar kādu skaitli, reizinājumā iegūst to pašu skaitli). Tā kā mūs interesējošie skaitļi ir mazāki nekā 2003, tad tie var būt divciparu vai trīsciparu skaitļi, vai arī četrciparu skaitļi, kuru tūkstošu cipars ir 1. Tagad apskatīsim atsevišķi visus minētos gadījumus.
1) No cipariem 4 un 9 var izveidot divus divciparu skaitļus 49 un 94. No cipariem 1, 4, 9 var izveidot 6 trīsciparu skaitļus (trīs dažādus ciparus var sakārtot 3·2·1=6 dažādos veidos). Paņemot vēl vienu ciparu 1, tas meklējamajos četrciparu skaitļos būs kā pirmais cipars, tātad vēl varam izveidot 6 četrciparu skaitļus – katram trīsciparu skaitlim pierakstot priekšā “1”. Tātad pavisam ir 2+6+6=14 derīgie skaitļi.
2) No cipariem 6, 6 var izveidot vienu divciparu skaitli 66. No cipariem 1, 6, 6 var izveidot 3 trīsciparu skaitļus (ciparu “1” var novietot vai nu pirms “66”, vai nu starp cipariem “66”, vai nu beigās). Paņemot vēl vienu ciparu 1 (tas būs četrciparu skaitļu pirmais cipars), iegūstam vēl trīs četrciparu skaitļus. Tātad pavisam ir 1+3+3=7 skaitļi.
3) No cipariem 2, 2, 9 varam izveidot 3 trīsciparu skaitļus (spriežam līdzīgi kā 2)gadījumā par trīsciparu skaitļiem). No cipariem 1, 2, 2, 9 vēl varam izveidot 3 atbilstošus četrciparu skaitļus. Tātad pavisam ir 3+3=6 derīgie skaitļi.
4) Spriežot līdzīgi kā 3) gadījumā, iegūstam, ka arī šajā gadījumā ir 6 derīgie skaitļi.
5) Ciparus 2, 3, 6 var sakārtot 6 dažādos veidos, tātad ir 6 meklējamie trīsciparu skaitļi. Savukārt no cipariem 1, 2, 3, 6 varam izveidot vēl 6 derīgos četrciparu skaitļus. Tātad ir 6+6=12 derīgie skaitļi.
6) Mazākais skaitlis, ko var izveidot no cipariem 2, 2, 3, 3, ir 2233>2003, tātad šajā gadījumā nav skaitļu, kas apmierinātu visus uzdevuma nosacījumus.
Tātad pavisam uzdevuma nosacījumus apmierina 14+7+6+6+12=45 skaitļi.

3. Atbilde: a) nevar; **b)** var.

Risinājums. Kubu 3×3×3 cm sadalot kubiņos 1×1×1 cm, iegūstam 27 mazos kubiņus, no kuriem 8 kubiņiem zaļā krāsā ir nokrāsotas 3 skaldnes, 12 kubiņiem ir nokrāsotas 2 skaldnes, 6 kubiņiem ir nokrāsota 1 skaldne un 1 kubiņam visas skaldnes ir nenokrāsotas; pavisam ir nokrāsoti $9 \cdot 6=54$ cm^2.

a) Ja saliktu trīs kubus 2×2×2 cm tā, lai vienam kubam būtu nokrāsotas visas skaldnes (tātad pavisam nokrāsoti ir $4 \cdot 6=24$ cm^2), otram kubam katrā skaldnē būtu nokrāsoti 3 cm^2 (kopā - $3 \cdot 6=18$ cm^2), trešajam kubam katrā skaldnē būtu nokrāsoti 2 cm^2 (kopā - $2 \cdot 6=12$ cm^2), tad būtu izmantoti $8 \cdot 3=24$ mazie kubiņiem, kuriem kopā ir nokrāsoti $24+18+12=54$ cm^2 – tikpat, cik pavisam ir nokrāsots. Tātad neizmantoti paliks 3 mazie kubiņi, taču jāizmanto visi kubiņi, kuriem ir vismaz viena skaldne nokrāsota. To izdarīt nav iespējams, jo tikai viens kubiņš ir pilnībā nenokrāsots.

b) Tā kā visiem mazajiem kubiņiem ir vismaz 3 nenokrāsotas skaldnes un tos var salikt kopā tā, ka neiekrāsotās skaldnes paliek iekšpusē, tad varam izvēlēties jebkurus 24 mazos kubiņus un no tiem salikt trīs kubus 2×2×2 cm, kuriem visa virsma ir nenokrāsota.

4. Atbilde: 10 rūķi.

Risinājums. Ievērosim, ka uzdevumā **nav teikts**, ka visiem rūķiem ir tikai zaļa, dzeltena vai sarkana cepure, **var būt**, ka kādam rūķim ir citas krāsas cepure, tāpēc risinājumā tas jāņem vērā. Apzīmēsim rūķu skaitu, kam ir zaļa cepure - ar z; kam ir dzeltena cepure - ar *dz;* kam ir sarkana cepure - ar *s*; kam ir citas krāsas cepure - ar *c*; visu rūķu skaitu – ar *k*.

Tad no uzdevuma nosacījumiem seko:

1) $z=2$

2) a) $k=7+dz$; **b)** $z+s+c=7$ jeb $2+s+c=7$ jeb $s+c=5$

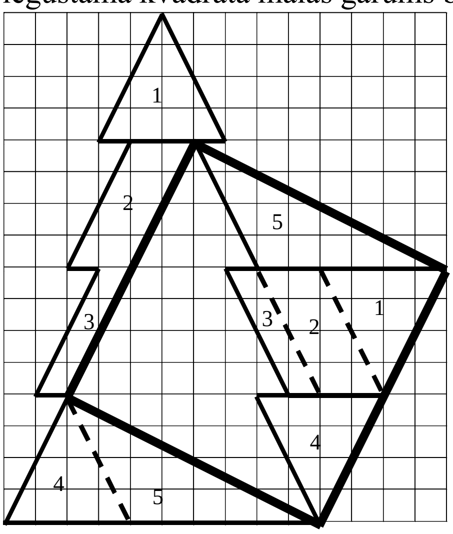
3) $dz=s-2$

4) a) $s=z+dz+c$ jeb $s=2+(s-2)+c=s+c$, no kurienes seko, ka $c=0$ (tātad tomēr nav rūķu ar citas krāsas cepurēm). **b)** $k=2 \cdot s$ (jo rūķu ar sarkanām cepurēm ir tik pat cik rūķu ar citas krāsas cepurēm, tātad puse no visiem rūķiem).

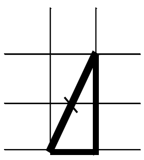
Tad no 2b) nosacījuma seko, ka $s=5$ un pavisam Ziemassvētku vecītim palīdz $2 \cdot 5=10$ rūķi.

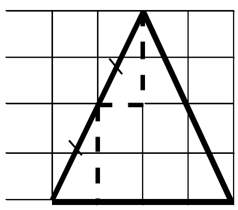
5. Atbilde: vienu piemēru skat. 2. zīm.. Iespējami daudzi citi sadalījumi. Iegūstam kvadrātu ar malas garumu $4\sqrt{5}$ rūtiņas.

Risinājums. Eglīte satur 80 rūtiņas, tātad iegūstamā kvadrāta malas garums ir $\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ rūtiņas (tas nav vesels skaitlis!). Nogrieznis, kura garums ir $\sqrt{5}$, ir tāda taisnleņķa trijstūra, kura katetes ir 1 un 2, hipotenūzas garums (skat. 3. zīm.). Jo $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ (tā aprēķina taisnleņķa trijstūra hipotenūzas garumu). Redzam, ka dotās eglītes "slīpā" posma garums ir $2\sqrt{5}$ (skat. 4. zīm.), tātad iegūstamā kvadrāta malas garums būs vēl divreiz lielāks.



196. zīm.


3. zīm.


4. zīm.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: visu uzdevumā minēto skaitļu summa ir 6198.

Risinājums. Mūs interesē:

* trīs viencipara skaitļi 1, 2, 3; to summa ir 6;

* deviņi divciparu skaitļi (pirmais cipars var būt jebkurš no cipariem 1, 2, 3, tāpat arī otrais cipars, kopā 3×3=9 dažādas iespējas); to summu var aprēķināt sekojoši 3×6 (vienu summa) + 3×10×6 (desmitu summa) = 198;

* 27 (katram divciparu skaitlim priekšā varam uzrakstīt ciparu 1, 2 vai 3, tātad pavisam iegūstam 3×9=27 jaunus skaitļus) trīsciparu skaitļi; to summu aprēķinām 3×198 (vienu un desmitu kopējā summa) + 9×100×6 (simtu summa) = 5994.

Tātad visu apskatāmo skaitļu summa ir 6+198+5994=6198.

a	***b***	***c***	***a+b***	***a+c***	***b+c***	***a·b***	***a·c***	***b·c***	pāra skaitļu skaits
p	p	p	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**p**	**6**
p	p	n	**p**	n	n	**p**	**p**	**p**	**4**
p	n	n	n	n	**p**	**p**	**p**	n	**3**
n	n	n	**p**	**p**	**p**	n	n	n	**3**

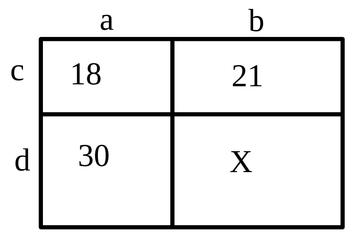
199. zīm.

2. Risinājums. 199. zīm. tabulā apskatītas visas iespējas, kad starp skaitļiem a, b, c: 1) visi ir pāra skaitļi, 2) ir viens nepāra skaitlis, 3) ir 2 nepāra skaitļi, 4) visi ir nepāra skaitļi. Kā redzam no tabulas, tad starp skaitļiem a+b, a+c, b+c, a·b, a·c, b·c vienlaicīgi var būt 6, 4 vai 3 pāra skaitļi.

3. Atbilde: nevar.

Risinājums. Tā kā 4·4=16<17, tad vismaz vienā kravas mašīnā būs jāiekrauj vismaz 5 skulptūras. Bet pat piecu vieglāko skulptūru kopējā masa ir 600+610+620+630+640=3100kg, kas ir vairāk nekā 3 tonnas. Tātad vienā reizē visas skulptūras aizvest nevarēs.

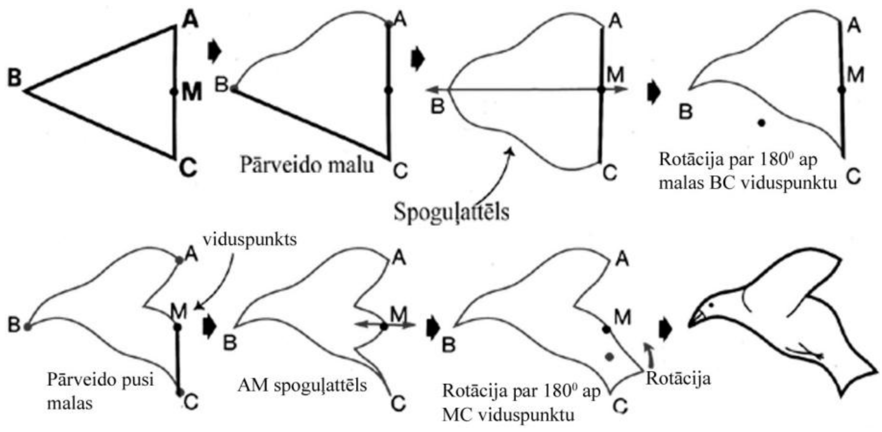
4. Atbilde: x=35.



200. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim doto nogriežņu garumus kā parādīts 200. zīmējumā. Tad no taisnstūra laukuma aprēķināšanas formulas seko, ka a·c=18, b·c=21, a·d=30 un b·d=x. Tagad izdalīsim pirmo vienādību ar otro un trešo ar ceturto, iegūstam $\frac{a}{b}=\frac{18}{21}$ un $\frac{a}{b}=\frac{30}{x}$. Tātad $\frac{18}{21}=\frac{30}{x}$, no kurienes $x=\frac{21\cdot 30}{18}=35$.

5. Šāda veida zīmējumus sauc par *Ešera tipa zīmējumiem*. To veidošanas tehnika balstās uz figūru transformācijām (paralēlo pārnesi, rotāciju, u.c.). Vispirms izvēlas kādu daudzstūri, ar kuru var noklāt plakni, piem., trijstūri, četrstūri, regulāru sešstūri, tad šī daudzstūra malas pārveido. A88. zīmējumā parādīts, kā no regulā trijstūra iegūstam putniņa figūru, ar kuru var noklāt plakni kā parādīts A89. zīmējumā (autors M. K. Ešers).



A88. zīm.

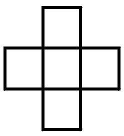
A89. zīm.

Sīkāk ar šādu mozaīku veidošanas tehniku varat iepazīties grāmatā E.R.Ranucci, J.L.Teeters. **Creating Escher – Type Drawings**. Creative Pubns, 1977, no kuras arī ņemts šis piemērs.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim dalītāja nezināmos ciparus ar AB, bet dalījuma ciparus ar CD (skat.1a) zīm.). Tad viegli ievērot, ka C=1; gadījumā, ja C>1, tad 6AB·C būtu lielāks nekā 600·2=1200 – četrciparu skaitlis. Vēl ievērosim, ka 6AB·D=3210. Tā kā 6AB·4<699·4=2796<3210 un 6AB·6>600·6=3600>3210, tad vienīgā iespējamā D vērtība ir 5. Izdalot 3210:5=642, iegūstam dalītāju (A=4 un B=2) un varam atjaunot doto piemēru (skat. 1b) zīm.).

1a). zīm.	1b). zīm.
*** * * * : 6 A B = C D**	**9 7 5 3 : 6 4 2 = 1 5**
*** * ***	**6 4 2**
3 3 3 3	**3 3 3 3**
*** * * ***	**3 2 1 0**
1 2 3	**1 2 3**



3. zīm.

2. Tā kā Pūks pie Trusīša ciemojās 30 minūtes, bet pavisam prom bija 55 minūtes, tad ceļā viņš pavadīja 25 minūtes.

Tā ar tukšu vēderu Pūks iet 1,5 reizes ātrāk nekā paēdis, tad atpakaļceļa viņš pavadīs 1,5 reizes vairāk laika nekā ejot pie Trusīša. Pieņemsim, ka līdz Trusīša mājai (ar tukšu vēderu) Pūks gāja x minūtes, tad uz mājupceļā viņš pavadīja 1,5x minūtes. Iegūstam šādu vienādojumu:

$x+1,5x=25$

$2,5x=25$

$x=10$ (minūtes turpceļā) un $1,5x=15$ (minūtes atpakaļceļā).

Tātad brīdī, kad Pūks pārradās mājās, pareizs laiks bija **12:45** (12:30+0:15).

3. ***Atbilde:*** ar 5 svēršanām pietiek.

1.svēršana. Sadala visas 243 monētas 3 kaudzītēs, katrā pa 81 monētai. Uz svaru kausiem uzliek pa vienai kaudzītei, viena kaudzīte paliek malā. Ja svari ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir trešajā kaudzītē; ja kāds no svaru kausiem ir vieglāks, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas ir uz šī svaru kausa.

2.svēršana. Tagad ņem to kaudzīti (81 monētu), kurā ir viltotā monēta. Sadala šīs 81 monētu atkal 3 kaudzītēs, katrā pa 27 monētām, un rīkojas līdzīgi kā iepriekš. Tagad noskaidro, starp kurām 27 monētām ir viltotā.

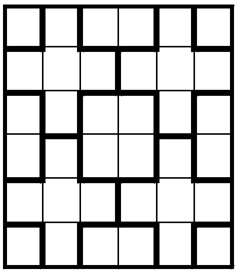
3.svēršana. Tagad trīs kaudzītēs dala tās 27 monētas, starp kurām ir viltotā monēta, katrā kaudzītē būs 9 monētas. Svēršanas rezultātā noskaidro, starp kurām 9 monētām ir viltotā.

4.svēršana. Rīkojoties līdzīgi kā iepriekš, atrod 3 monētas, starp kurām ir viltotā monēta.

5.svēršana. Uz svaru kausiem uzliek pa vienai monētai no tām trim monētām, starp kurām ir viltotā. Ja svari ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir trešā malā palikusī; ja kāds svaru kauss ir vieglāks, tad viltotā monēta ir uz tā.

Šādi rīkojoties noteikti varēs atrast viltoto monētu.

4. Ja griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, tad nevar izgriezt vairāk par 4 figūrām, skat., piemēram, 2.zīm..



2.zīm.

Vairāk figūriņas tādā gadījumā izgriezt nevar, pierādīsim to. Skaidrs, ka kvadrāta stūra rūtiņas paliks brīvas – tajās nevar ievietoties nekāda daļa no dotās figūriņas. Kvadrāta 6×6 vienai malai var pieskarties ne vairāk kā 2 figūriņas, katra ar vienu rūtiņu. Tātad pie katras malas paliek neizmantotas vēl vismaz 6-2(figūru aizņemtās rūtiņas)-2(stūru rūtiņas)=2 rūtiņas. Kvadrātam ir četras malas, tātad kopā neizmantojamas ir vismaz $4+4\cdot2=12$ rūtiņas. Kvadrātā 6×6 pavisam ir 36 rūtiņas, tad dotās figūriņas kopā var ievietoties $36-12=24$ rūtiņās. Bet tā kā $5\cdot5=25>24$, tad no kvadrāta 6×6 var izgriezt ne vairāk kā 4 dotās figūriņas tā lai griezuma līnijas ietu pa rūtiņu malām.

5. Apzīmēsim bērnu gadus ar a, b, c, d, pie tam pieņemsim, ka $a\le b\le c\le d$. Izveidosim tabulu, kurā uzrakstīsim visas iespējamās a, b, c, d vērtības, lai to reizinājums būtu 40, un aprēķināsim summu a+b+c+d.

a	b	c	d	summa
1	1	1	40	43
1	1	2	20	24
1	1	4	10	16
1	1	5	8	15
1	2	2	10	15
1	2	4	5	12
2	2	2	5	11

Gadījumā, ja minētā ģimene dzīvotu dzīvoklī ar numuru 43, 24, 16, 12, vai 11, kaimiņš uzreiz varētu pateikt cik gadu ir katram bērnam (jo kaimiņš zina dzīvokļa numuru un katram no šiem numuriem atbilst tikai viena iespēja). Taču, tā kā kaimiņam ar šo informāciju nepietika, tad skaidrs, ka minētā ģimene dzīvo 15.dzīvoklī – šim gadījumam mūsu tabulā atbilst divas rindiņas, t.i., 1g.,1g., 5g., 8g. vai 1g., 2g., 2g., 10g.. Pēc papildus informācijas, ka jaunākie bērni ir dvīņi, tapa skaidrs, ka diviem mazākajiem skaitļiem jābūt vienādiem, tātad bērnu vecumi ir **1g.,1g., 5g., 8g.**.