Atlases sacensības uz IMO 2022, 1.diena

1.uzdevums Taisnleņķa trijstūrī $\triangle ABC$, kurā $\angle C = 90°$, augstums CH krusto tā bisektrises AM un BN punktos P un Q. Pierādīt, ka taisne, kas iet caur nogriežņu QN un PM viduspunktiem, ir paralēla taisnei AB.

Atrisinājums Pieņemsim, ka $\angle CAB = 2\alpha$ un $\angle CBA = 2\beta$. Tādā gadījumā $90° = \angle CAB + \angle CBA = 2\alpha + 2\beta \implies \alpha + \beta = 45°$.

Tālākais risinājums balstās uz šādu novērojumu - $\triangle CNQ$ un $\triangle CMP$ ir vienādsānu trijstūri. Patiešām, ievērosim, ka $\angle CAB = \angle NCQ = 90° - 2\alpha$. Apskatoties uz trijstūra $\angle NCB$ iekšējo leņķu summu, iegūsim, ka:

$$\angle CNQ = 180° - \angle ACB - \angle CBN = 90° - \beta = 45° + \alpha$$

Tas nozīmē, ka $\angle CQN = \angle CNQ = 45° + \alpha$, līdz ar to $\triangle CNQ$ ir vienādsānu. Analoģiski pierāda, ka trijstūris $\triangle CMP$ ir vienādsānu.

Ar X un Y apzīmēsim attiecīgi nogriežņu QN un PM viduspunktus, bet ar I taišņu AM un BN krustpunktu. Tā kā trijstūri $\triangle CNQ$ un $\triangle CMP$ ir vienādsānu, tad $\angle CXI = \angle CYI = 90°$, kas nozīmē, ka punkti C, X, I, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas ar diametru CI.

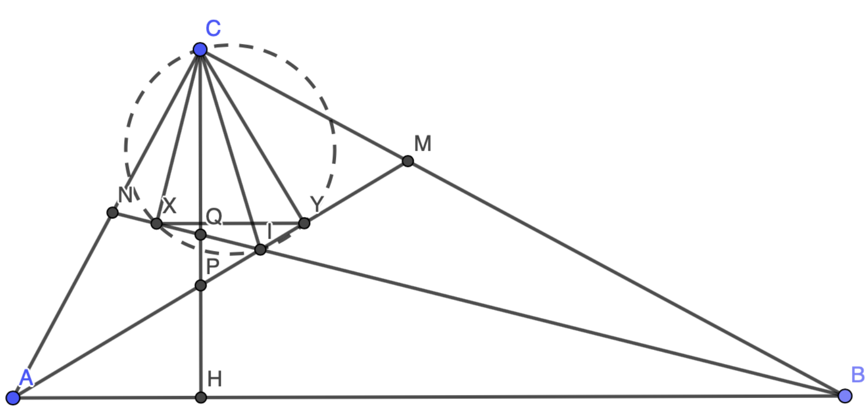
Ievērosim, ka $\angle NCQ = 90° - 2\alpha$, tāpēc $\angle NCX = 0.5(\angle NCQ) = 45° - \alpha$. No otras puses, tā kā punkts ir I ir bisektrišu krustpunkts, tad CI arī ir leņķa $\angle ACB$ bisektrise, tāpēc $\angle BCI = 45°$. Līdz ar to:

$$\angle XCI = \angle BCI - \angle NCX = 45° - (45° - \alpha) = \alpha$$

Ņemot vērā to, ka punkti C, X, I, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas:

$$\angle XYI = \angle XCI = \alpha = \angle YAB$$

Tas nozīmē, ka taisnes AB un XY ir paralēlas. Prasītais ir pierādīts.



1.att.

2.uzdevums Zaļajā jūrā ir 20 ostas, "Zaļās jūras līniju" 18 kuģi veic regulārus maršrutus starp šīm ostām. Katra kuģa maršruts ir noslēgts (apļveida) un savā maršrutā tas pietur tieši 5 ostās. Katrā ostā pietur vismaz 3 kuģi, starp katrām divām ostām tiešā satiksmē (bez apstāšanās citās ostās) kursē ne vairāk par vienu kuģi (abos virzienos kopā).

Pierādīt, ka ar "Zaļās jūras līniju" kuģiem var aizbraukt no jebkuras zaļās ostas uz jebkuru citu.

Atrisinājums (Milana Komisarova, Ilmārs Štolcers) Ieviesīsim uzdevumā grafu, apzīmējot ostas ar grafa virsotnēm un kuģu maršrutus (ceļus) starp pilsētām ar grafa šķautnēm. Acīmredzami, ka prasītais nav iespējams tikai tādā gadījumā, ja grafā eksistē divas vai vairāk nesaistītas komponentes.
Pieņemsim, ka prasītais nav iespējams un grafā eksistē divas nesaistītas komponentes. Vispirms veiksim dažus vienkāršus novērojumus. Pirmkārt, ir skaidrs, ka ikvienā noslēgtā komponentē ir jābūt vismaz 5 ostām, lai varētu tikt izpildīti kuģu maršruti. Otrkārt, var ievērot, ka ikviena kuģa maršruts ir cikls un katru maršruta posmu brauc tikai šis viens kuģis, tādēļ katras virsotnes pakāpe (ar šo virsotni saistīto šķautņu skaits) ir pāra skaitlis (katram kuģim viens iebraukšanas un viens izbraukšanas ceļš). Tālāk veiksim katra gadījuma analīzi atkarībā no nesaistīto komponenšu virsotņu skaita:

- **5-15.** Komponentē ar izmēru 5 ir maksimāli iespējami $\frac{5\cdot4}{2} = 10$ dažādi ceļi, taču tajā būtu jābūt vismaz 3 kuģiem ar katram 5 ceļiem, kas kopā ir vismaz 15 - pretruna.
- **6-14.** Komponentē ar izmēru 6 ir maksimāli iespējami $\frac{6\cdot4}{2} = 12$ dažādi ceļi (virsotnes pakāpe pāra skaitlis), taču tur būtu jābūt vismaz 3 kuģiem ar vismaz 15 dažādiem ceļiem - pretruna.
- **7-13.** Komponentē ar izmēru 7 ir maksimāli iespējams $\frac{7\cdot6}{2} = 21$ ceļš. Tātad šajā komponentē var būt maksimāli 4 kuģi. 4 kuģu gadījumā tie izmantotu tieši 20 ceļus, līdz ar to vienam ceļam būtu jāpaliek neizmantotam (šķautne neeksistētu). Bet tādā gadījumā būtu divas virsotnes, kurām būtu nepāra pakāpe 5, kas nevar būt. Tātad 4 kuģi nav iespējami; maksimālais kuģu skaits būtu 3. Bet 3 kuģi (vai mazāk) acīmredzami nevar piestāt 7 ostās tā, lai katrā ostā būtu piestājuši vismaz 3 kuģi - pretruna.
- **8-12.** Komponentē ar izmēru 8 ir maksimāli iespējami $\frac{8\cdot6}{2} = 24$ ceļi, bet komponentē ar izmēru 12 attiecīgi $\frac{12\cdot10}{2} = 60$ ceļi. Kopskaitā tie ir 84 ceļi, bet visiem 18 kuģiem ir nepieciešami 90 ceļi - pretruna.
- **9-11.** Komponentē ar izmēru 9 ir maksimāli iespējami $\frac{9\cdot8}{2} = 36$ ceļi, kas atbilst maksimāli 7 kuģiem. Taču 7 kuģu gadījumā būtu tieši 35 ceļi un attiecīgi divām virsotnēm būtu nepāra pakāpe 7, kas nevar būt. Tātad maksimāli šajā komponentē var būt 6 kuģi. Tad otrā komponentē ir jābūt vismaz 12 kuģiem. Tajā maksimālais ceļu daudzums ir $\frac{11\cdot10}{2} = 55$, bet 12 kuģiem būtu nepieciešami 60 ceļi - pretruna.
- **10-10.** Vienā komponentē maksimālais ceļu daudzums ir $\frac{10\cdot8}{2} = 40$, tātad kopā abās komponentēs ir ne vairāk kā 80 ceļu. Bet 18 kuģiem nepieciešami 90 ceļi - pretruna.

Tā kā aplūkoti visi iespējamie gadījumi, kad grafā ir divas nesaistītas komponentes, un gadījumi, kad ir vairāk kā divas nesaistītas komponentes, viegli ir vispārināmi uz kādu no iepriekš aplūkotajiem gadījumiem, tad no iegūtajām pretrunām var secināt, ka pieņēmums ir nepareizs un uzdevumā pierādāmais izpildās.

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs) Ar $P(x; y)$ apzīmēsim dotā funkcionālvienādojuma sakarību. Ievērosim, ka $P(0; 0)$ mums dod:

$$0 \cdot f(0 + 0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) + f(0)f(0) \implies f(0)^2 = 0 \implies f(0) = 0$$

No otras puses, $P(1; -1)$ sniedz mums šādu informāciju:

$$1 \cdot f(1 - 1) = f(1) + f(1)f(-1) \implies f(-1)f(1) = -f(1) \implies f(1) = 0 \quad \text{vai} \quad f(-1) = -1$$

Apskatīsim gadījumu, kad $f(1) = 0$. Tādā gadījumā $P(1; y)$ pasaka mums, ka:

$$f(y + 1) = f(1) + f(1)f(y) \implies f(y + 1) = 0$$

Tas nozīmē, ka $f(x) = 0$ katram reālam skaitlim x.

Tagad pievēršamies gadījumam, kad $f(-1) = -1$. No $P(x; -1)$ izriet, ka:

$$xf(x - x) = xf(x) - f(x^2) \implies f(x^2) = xf(x) \qquad (*)$$

Pēdējā sakarībā x aizvietošana ar $-x$ ļauj mums pateikt, ka:

$$-xf(-x) = f(x^2) = xf(x) \implies -f(x) = f(-x), \quad \text{ja} \quad x \neq 0$$

Šī iemesla dēļ $-f(1) = f(-1) \implies f(1) = 1$. Apskatot $P(1; y)$, mēs iegūstam, ka:

$$f(y + 1) = f(y) + 1 \implies f(y - 1) = f(y) - 1$$

Grūtākā uzdevuma daļa ir iedomāties aplūkot $P(x; x - 1)$ un izmantot (*):

$$\begin{aligned} xf(x + x(x - 1)) &= xf(x) + f(x^2)f(x - 1) \\ xf(x^2) &= xf(x) + f(x^2) \cdot (f(x) - 1) \\ x^2 f(x) &= xf(x) + xf(x)^2 - xf(x) \\ xf(x) \cdot (f(x) - x) &= 0 \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka ikkatram reālam skaitlim $x \neq 0$ izpildās sakarība $f(x) = x$ vai $f(x) = 0$. Pieņemsim, ka eksistē 2 tādi skaitļi $a, b \neq 0$, ka $f(a) = a$ un $f(b) = 0$. Apskatot $P(a; b)$, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} af(a + ab) &= af(a) + f(a^2)f(b) \\ af(a + ab) &= a^2 \\ f(a + ab) &= a \end{aligned}$$

No iepriekš iegūtiem rezultātiem izriet, ka $f(a + ab) = 0$ vai $f(a + ab) = a + ab$. Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $f(a + ab) = 0$, tad $a = 0$, kas ir acīmredzama pretruna.

- Ja $f(a + ab) = a + ab$, tad $a = a + ab$, no kurienes seko, ka $ab = 0$. Tā ir pretruna, jo $a, b \neq 0$.

Visi iespējamie gadījumi ir apskatīti. Tas nozīmē, ka vienīgās iespējamās funkcijas ir $f(x) = x$ katram reālam skaitlim x un $f(x) = 0$ katram reālam skaitlim x. Viegli pārliecināties, ka abas šīs funkcijas patiešām apmierina doto sakarību.

4.uzdevums Dots naturāls skaitlis k. Divi spēlētāji spēlē sekojušu spēli. Vispirms otrais spēlētājs uz tāfeles uzraksta kādu naturālu skaitli. Pēc tam katrā gājienā pirmais spēlētājs nosauc kādu veselu skaitli x, bet otrais spēlētājs nodzēš tajā brīdī uz tāfeles uzrakstīto skaitli, apzīmēsim to ar a, un tā vietā uzraksta vai nu $a-x$ vai $a+x$ (pēc savas izvēles). Pirmais spēlētājs uzvar, ja kādā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīta kāda skaitļa k pakāpe (der arī $k^0=1$). Kurām k vērtībām pirmais spēlētājs var vienmēr uzvarēt neatkarīgi no tā, kā spēlē otrais spēlētājs?

Atrisinājums (Ilmārs Štolcers) Pirmais spēlētājs var uzvarēt visiem $k=2^n+1$, kur n ir naturāls vai $n=0$.

Sākotnēji pierādīsim, ka visām pārējām k vērtībām pirmais spēlētājs nevar uzvarēt. Ja $k=1$, tad otrais spēlētājs var acīmredzami uzvarēt, līdz ar to aplūkojam gadījumus $k>1$. Tā kā ikviena skaitļa k pakāpe (ieskaitot k^0) dod atlikumu 1, dalot ar $k-1$, tad pietiek pierādīt, ka otrais vienmēr var panākt $a \not\equiv 1 \pmod{k-1}$. Tā kā $k \neq 2^n+1$, tad $k-1$ eksistē nepāra pirmreizinātājs q. Augstāk minētajai kongruencei būtu jāizpildās arī katram $k-1$ dalītājam, tātad atliek atrast veidu, lai $a \not\equiv 1 \pmod{q}$.
Kā sākotnējo skaitli otrais spēlētājs var izvēlēties 2, kas acīmredzami apmierina vajadzīgo. Pierādīsim, ka ikvienā nākamajā gājienā viena no izteiksmēm $a-x$ un $a+x$ nebūs $1 \pmod{q}$. Ja tas neizpildītos, tādā gadījumā būtu $(a-x)+(a+x) \equiv 2 \pmod{q} \implies a \equiv 1 \pmod{q}$. Taču tā ir pretruna, jo, sākot ar pirmo gājienu, $a \not\equiv 1 \pmod{q}$. Vajadzīgais pierādīts.

Tālāk parādīsim veidu, kā pirmais spēlētājs var uzvarēt gadījumā $k=2^n+1$, kur n - naturāls vai $n=0$. Uzrakstīsim skaitli a bāzē k, t.i., formā

$$a = c_t \cdot k^t + c_{t-1} \cdot k^{t-1} + \cdots + c_1 \cdot k + c_0,$$

kur $0 \leq c_i \leq k-1$ visiem $0 \leq i \leq t$.
Sākotnējais pirmā spēlētāja mērķis ir panākt, lai pēc kāda laika skaitļa a pierakstā bāzē k būtu tikai viens cipars, t.i., tikai viens koeficients c_j, kurš nav nulle. To var sasniegt ar šādu algoritmu: ja a ir uzrakstīts augstāk minētajā formā (kur c_t ir koeficients pie lielākās skaitlī a ietilpstošās k pakāpes), tad pirmais spēlētājs var nosaukt skaitli

$$x = (k-1-c_{t-1}) \cdot k^{t-1} + (k-1-c_{t-2}) \cdot k^{t-2} + \cdots + (k-1-c_1) \cdot k + (k-c_0).$$

- Ja otrais spēlētājs izvēlēsies skaitli $a+x$, tad tādā gadījumā šo skaitļu summa būs $a+x=(c_t+1)\cdot k^t$, kas garantēti ir skaitlis ar vienu nenulles koeficientu. Šāda summa veidosies, jo 0-tajā pozīcijā skaitļu summa ir k, kas veidos pārnesi uz nākamo pozīciju, tā veidojot pārnesi līdz pat k-tajai pozīcijai.
- Ja otrais spēlētājs izvēlēsies skaitli $a-x$, tad viegli redzēt, ka $a>x$ un $a>a-x$, līdz ar to tiks iegūts jauns a, kurš ir pozitīvs un mazāks par iepriekšējo (papildus tam $x \geq k-c_0 \geq 1$). Tādēļ, ja netiek veikta pirmā izvēle, kādā brīdī a kļūs mazāks par k un atkal tiks sasniegts vēlamais.

Līdz ar to pirmais spēlētājs var sasniegt gadījumu, kad tikai viens koeficients c_j skaitļa a pierakstā bāzē k nav nulle. Ja $k=2^0+1=2$, tad vienīgais nenulles koeficients var būt tikai 1, kas dod vēlamo, tādēļ tālāk aplūkosim $k>2$. Parādīsim, ka tādā gadījumā, ja $c_j \neq 1$, pirmais spēlētājs var panākt, lai $c_j=1$ vai $c_{j+1}=1$ un attiecīgi pārējie koeficienti ir nulle, kas būtu k pakāpe. Lai to pierādītu, izmantosim matemātisko indukciju, ar ko pierādīsim, ka ar atļautajām operācijām no jebkura naturāla skaitļa intervālā $[1; 2^n+1]$ ir iespējams nonākt intervāla galapunktā.

Indukcijas bāze: Ja $n=1$, tad tas acīmredzami ir sasniedzams, jo skaitlim $a=2$ var izvēlēties $x=1$.

Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka vēlamo varam sasniegt pie kāda naturāla n.

Induktīvā pāreja: Pierādīsim, ka tādā gadījumā prasīto var sasniegt arī pie $n+1$. Aplūkosim divus gadījumus atkarībā no intervālā esošā skaitļa a vērtības:

- Ja $a \leq 2^n+1$, tad pielietojam induktīvo pieņēmumu skaitļu intervālam $[1; 2^n+1]$. Tā rezultātā skaitlis a kļūs par 1 vai 2^n+1.

- Ja $a > 2^n+1$, tad pielietojam induktīvo pieņēmumu skaitļu intervālam $[2^n+1; 2^{n+1}+1]$, no katra skaitļa sākotnēji atņemot 2^n, veicot nepieciešamās darbības un tad beigās katram skaitlim pieskaitot 2^n. Šo darbību rezultātā a kļūs par 2^n+1 vai $2^{n+1}+1$.

Ja $a = 1$ vai $a = 2^{n+1}+1$, tad induktīvā pāreja ir veikta. Ja $a = 2^n+1$, tad pirmais spēlētājs var izvēlēties $x = 2^n$, kas acīmredzami sasniegs vēlamo.

Tā kā analoģiskus pārveidojumus mēs varam veikt priekš aktuālā skaitļa $a = c_j \cdot k^j$, piereizinot katrā gājienā veicamajās darbībās skaitļus ar k^j, lai panāktu, ka

$$c_j = 1 \quad \text{vai} \quad c_j = 2^n+1 = k \implies c_{j+1} = 1 \quad \text{un} \quad c_j = 0,$$

tad secinām, ka pirmais spēlētājs pēc induktīvi izveidotā algoritma var panākt, lai a kādā brīdī būtu skaitļa k pakāpe, ja $k = 2^n+1$.

Atlases sacensības uz IMO 2022, 2.diena

5.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu pārus $(x; y)$, kuriem $2xy$ dalās ar $x + y + 1$ un $x^2 + y^2 - 1$ dalās ar $x + y - 1$.

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs) Ievērosim, ka:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv 1 \pmod{(x + y - 1)} \\ (x + y)^2 &\equiv 1 \pmod{(x + y - 1)} \\ x^2 + y^2 + 2xy &\equiv 1 \pmod{(x + y - 1)} \\ x^2 + y^2 - 1 + 2xy &\equiv 0 \pmod{(x + y - 1)} \end{aligned}$$

Citiem vārdiem sakot, $x^2 + y^2 - 1 + 2xy$ dalās ar $x + y - 1$. Tā kā $x^2 + y^2 - 1$ dalās ar $x + y - 1$, tad $2xy$ dalās ar $x + y - 1$.

Varam spriest, ka $2xy$ dalās gan ar $x+y-1$, gan ar $x+y+1$. Tā kā $\gcd(x+y+1; x+y-1) = \gcd(x + y - 1; 2)$, apskatīsim 2 gadījumus:

- Ja $\gcd(x+y+1; x+y-1) = 1$, tad $2xy$ dalās ar $(x+y+1)(x+y-1)$. Tādā gadījumā:

  $$\begin{aligned} 2xy &\geq (x + y - 1)(x + y + 1) \\ 2xy &\geq (x + y)^2 - 1 \\ 1 &\geq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

  Pēdējā nevienādība ir acīmredzami nepatiesa, tā kā skaitļi x, y ir naturāli.

- Ja $\gcd(x+y-1; x+y+1) = 2$, tad $4xy$ dalās ar $(x+y+1)(x+y-1)$. Tādā gadījumā:

  $$\begin{aligned} 4xy &\geq (x + y + 1)(x + y - 1) \\ 4xy &\geq (x + y)^2 - 1 \\ 1 &\geq (x - y)^2 \end{aligned}$$

  Tā kā skaitļi x, y ir naturāli, tad $x - y = 1$ vai $x - y = -1$, vai $x = y$. Pēdējā gadījumā sākotnējā dalāmība kļūst par $2x^2$ dalās ar $2x+1$. Tādā gadījumā $x(2x+1) - 2x^2$ dalās ar $2x + 1$, līdz ar to x dalās ar $2x + 1$. Tas acīmredzami nevar būt, jo $2x + 1 > x$.

Tas nozīmē, ka vienīgie iespējamie skaitļu pāri ir $(x; y) = (k; k + 1)$ un $(x; y) = (k + 1; k)$, kur k ir patvaļīgs naturāls skaitlis. Atliek pārliecināties, ka tie patiešām der:

- Ja $(x; y) = (k; k+1)$, tad $2xy = 2k(k+1)$ jādalās ar $x+y+1 = k+k+1+1 = 2(k+1)$, kas acīmredzami izpildās, kā arī $x^2 + y^2 - 1 = k^2 + (k + 1)^2 - 1 = 2k(k + 1)$ dalās ar $x + y - 1 = k + k + 1 - 1 = 2k$, kas acīmredzami izpildās.

- Ja $(x; y) = (k+1; k)$, tad $2xy = 2k(k+1)$ jādalās ar $x+y+1 = k+k+1+1 = 2(k+1)$, kas acīmredzami izpildās, kā arī $x^2 + y^2 - 1 = k^2 + (k + 1)^2 - 1 = 2k(k + 1)$ dalās ar $x + y - 1 = k + k + 1 - 1 = 2k$.

Uzdevums ir atrisināts.

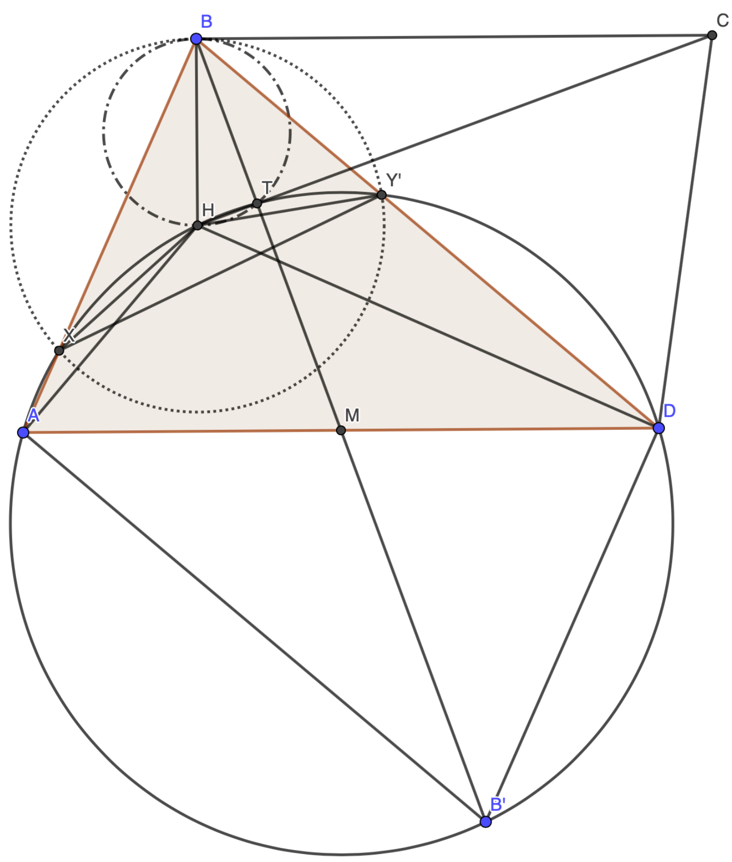
6.uzdevums Dota trapece $ABCD$, kurai $BC \parallel AD$. Trijstūra $\triangle ABD$ augstumi krustojas punktā H, punkts M ir malas AD viduspunkts. Zināms, ka $HC \perp BM$. Uz malas AB atlikts tāds punkts X, ka $BH = HX$. Taisne CX krusto nogriezni BD punktā Y. Pierādīt, ka punkti A, X, Y, D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers) Ievērosim, ka $\angle HDA = 90° - \angle BAC = \angle ABH$. Tā kā $HB = HX$, tad $\angle HBX = \angle HXB = 90° - \angle BAC$. Citiem vārdiem sakot, $\angle HXB = \angle HDA$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $XHDA$ var apvilkt riņķa līniju.

Definēsim punktu Y' kā $\odot(AXHD)$ krustpunktu ar BD. Ja mēs pierādītu, ka punkti X, Y', C atrodas uz vienas taisnes, tad uzdevums būtu atrisināts. Definēsim punktu T kā taišņu HC un BM krustpunktu. Tādā gadījumā $\angle BTH = 90°$.

Apgalvojums: Punkts $T \in \odot(AXHY'D)$.
Pierādījums: Punkta B simetrisko attēlojumu pāri punktam M apzīmēsim ar punktu B'. Tādā gadījumā $ABDB'$ ir paralelograms. Ievērosim, ka $\angle AHD = 180° - \angle ABD$ (labi zināms fakts) un $\angle AB'D = \angle ABD$. Šī iemesla dēļ $B' \in \odot(BXHY'D)$. No otras puses, $\angle BAB' = 180° - \angle ABD$ (no paralelograma) un $\angle BAH = 90° - \angle ABD$, tāpēc $\angle HAB' = \angle BAB' - \angle BAH = 90° = \angle BTH$. Tas savukārt ļauj mums pateikt to, ka $T \in \odot(AHTB')$. Prasītais ir pierādīts.

Ievērosim, ka $\angle CBD = \angle BDA = \angle BXY'$, tāpēc BC ir $\odot(BXY')$ pieskare. No otras puses, BC ir arī $\odot(BHT)$ pieskare, jo šīs riņķa līnijas diametrs ir BH un $BH \perp BC$. No radikālo asu teorēmas riņķa līnijām $\odot(AXHTY')$, $\odot(BXY')$ un $\odot(BHT)$ izriet, ka taisnes BC, HT un XY' krustojas vienā punktā, tāpēc punkti X, Y', C atrodas uz vienas taisnes. Tātad $Y = Y'$ un uzdevums ir atrisināts.



2.att.

Piezīmes: Lasītājs var iepazīties ar radikālo asu jēdzienu un ar to saistītām teorēmām šajā mājaslapā.

7.uzdevums Mūzikas skolā ir 289 skolnieki, n skolotāji ($n \geq 1$) un k kabineti ($k \geq 1$). Katrs skolotājs var vadīt individuālu stundu jebkuram no saviem skolniekiem jebkurā kabinetā, kuram viņam ir atslēga. Ja skolotājam ir atslēga no m kabinetiem, tad viņš pasniedz stundas tieši $2m+1$ skolniekiem. Katriem diviem skolniekiem ir tieši viens skolotājs, kas māca viņus abus. Katram skolniekam un katram kabinetam ir tieši viens skolotājs, kurš šajā kabinetā var mācīt šo skolnieku. Atrodiet visas iespējamās k vērtības!

Atrisinājums (Ilmārs Štolcers) Atbilde ir $k = 144$.

Izmantosim uzdevumā doto informāciju, lai skaitītu unikālo trijnieku P(skolēns, skolotājs, kabinets) skaitu, kuriem trijniekā esošajā kabinetā minētais skolotājs var mācīt minēto skolēnu.

No vienas puses, mēs varam n veidos izvēlēties skolotāju; apzīmēsim izvēlēto skolotāju ar indeksu i. Šim skolotājam ir atslēgas no m_i kabinetiem, līdz ar to kabinetu var izvēlēties tik veidos, un viņš katrā kabinetā var apmācīt katru no saviem $2m_i+1$ skolēniem, tādēļ vienam skolotājam pārējos trijnieka P elementus var izvēlēties $m_i(2m_i+1)$ veidos. Sasummējot to pa visiem n skolotājiem, var secināt, ka kopējais unikālo trijnieku P skaits ir $\sum_{i=1}^{n} m_i(2m_i+1)$.

No otras puses, mēs trijnieka P izvēli varam sākt ar kabineta izvēli, ko var izdarīt k veidos. Katram kabinetam var izvēlēties attiecīgu skolēnu 289 veidos, un tad no nosacījuma izriet, ka attiecīgu skolotāju var izvēlēties tikai vienā veidā. No šiem apsvērumiem varam secināt, ka unikālo trijnieku P skaits ir $289k$.

$$289k = \sum_{i=1}^{n} m_i(2m_i+1) \implies k = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(2m_i+1)}{289}$$

Tālāk aplūkosim trijniekus Q(skolēns, skolēns, skolotājs), kur abi skolēni mācās pie trijniekā ietvertā skolotāja.

No vienas puses, mēs varam skolotāju izvēlēties n veidos; apzīmēsim izvēlēto skolotāju ar indeksu i. Šis skolotājs stundas pasniedz $2m_i+1$ skolēnam, tādēļ pirmo skolēnu var izvēlēties $2m_i+1$ veidā, bet otro skolēnu $2m_i$ veidos. Sasummējot to pa visiem n skolotājiem, var secināt, ka kopējais unikālo trijnieku Q skaits ir $\sum_{i=1}^{n} 2m_i(2m_i+1)$.

No otras puses, mēs pirmo skolēnu varam izvēlēties 289 veidos, bet otro skolēnu 288 veidos. No nosacījumiem zināms, ka ikvienam skolēnu pārim ir tieši viens skolotājs, kas māca abus, tādēļ skolotāju var izvēlēties 1 veidā. Līdz ar to unikālo trijnieku Q skaits ir $289 \cdot 288$.

$$\sum_{i=1}^{n} 2m_i(2m_i+1) = 289 \cdot 288 \implies \sum_{i=1}^{n} m_i(2m_i+1) = \frac{289 \cdot 288}{2} = 289 \cdot 144$$

Ja mēs savienojam iegūto rezultātu ar iepriekš iegūto, iegūstam:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(2m_i+1)}{289} = \frac{289 \cdot 144}{289} = 144.$$

Līdz ar to vienīgā iespējamā k vērtība ir 144. Lai pārliecinātos, ka tā ir iespējama, pietiek aplūkot situāciju, ja ir $n = 1$ skolotājs. Tādā gadījumā var viegli pārliecināties, ka visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

Piezīme: Atrisinājumā izmantoto metodi sauc par *double counting*. Lasītājs var iepazīties ar to sīkāk šajā materiālā. Jāatzīmē, ka šai metodei ir plašs pielietojums ne tikai kombinatorikas uzdevumos, bet arī funkcionālvienādojumu risināšanā.

8.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un reāli pozitīvi skaitļi $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Pierādīt nevienādību:

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}x_n}{x_1} + \frac{x_nx_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Atrisinājums Pierādīsim prasīto ar matemātisko indukciju.

Indukcijas bāze: Ja $n = 3$, tad nevienādību var ekvivalenti pārrakstīt šādā formā:

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + x_3$$
$$(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 \geq x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$(x_1x_2 - x_2x_3)^2 + (x_2x_3 - x_3x_1)^2 + (x_3x_1 - x_1x_2)^2 \geq 0$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzami patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīvs lielums.

Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k izpildās:

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_{k-1}x_k}{x_1} + \frac{x_kx_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_k,$$

kur $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$.

Induktīvā pāreja: Mūsu mērķis būtu pierādīt, ka:

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_{k-1}x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_kx_{k+1}}{x_1} + \frac{x_{k+1}x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1},$$

kur $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq x_{k+1}$. Ņemot vērā induktīvo pieņēmu, tas ir ekvivalenti ar to, ka jāpierāda šāda nevienādība:

$$\frac{x_{k-1}x_k}{x_{k+1}} + \frac{x_kx_{k+1}}{x_1} + \frac{x_{k+1}x_1}{x_2} - \frac{x_{k-1}x_k}{x_1} - \frac{x_kx_1}{x_2} \geq x_{k+1}$$
$$\frac{x_1}{x_2}\left(x_{k+1} - x_k\right) + x_{k+1}\left(\frac{x_k}{x_1} - 1\right) + x_{k-1}x_k\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right) \geq 0$$

Ievērosim, ka:

$$\frac{x_1}{x_2}\left(x_{k+1} - x_k\right) \geq 0 \quad \text{un} \quad x_{k-1}x_k\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right) \leq 0$$

Ņemot vērā doto nosacījumu, varam secināt, ka:

$$x_{k-1}x_k\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right) \geq x_k^2\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right)$$
$$\frac{x_1}{x_2}\left(x_{k+1} - x_k\right) \geq \frac{x_1}{x_k}\left(x_{k+1} - x_k\right)$$

Šī iemesla dēļ:

$$\begin{aligned}
x_{k-1}x_k\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right) + \frac{x_1}{x_2}\left(x_{k+1} - x_k\right) + x_{k+1}\left(\frac{x_k}{x_1} - 1\right) \geq \\
\geq x_k^2\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_1}\right) + \frac{x_1}{x_k}\left(x_{k+1} - x_k\right) + x_{k+1}\left(\frac{x_k}{x_1} - 1\right) = \\
= \frac{x_1}{x_k}(x_{k+1} - x_k) + \frac{x_k^2}{x_{k+1}} - \frac{x_k^2}{x_1} + \frac{x_kx_{k+1}}{x_1} - x_{k+1} = \\
= \frac{x_1}{x_k}(x_{k+1} - x_k) + \frac{x_k}{x_1}(x_{k+1} - x_k) + \frac{(x_k - x_{k+1})(x_k + x_{k+1})}{x_{k+1}} = \\
= (x_{k+1} - x_k)\left(\frac{x_1}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} - \frac{x_{k+1} + x_k}{x_{k+1}}\right) \geq \\
\geq (x_{k+1} - x_k)\left(2 - \frac{x_{k+1} + x_k}{x_{k+1}}\right) = \\
\geq (x_{k+1} - x_k)\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right) \geq \\
\geq 0
\end{aligned}$$

Šajos pārveidojumus tika izmantota sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, lai iegūtu, ka:

$$\frac{x_1}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq 2$$

Līdz ar to induktīvā pāreja ir pabeigta.

No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka dotā nevienādība ir patiesa visām naturālām n vērtībām.

Atlases sacensības uz IMO 2022, 3.diena

1.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kas definētas reāliem pozitīviem skaitļiem, pieņem reālas pozitīvas vērtības un kurām visiem reāliem pozitīviem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}$$

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs) Ar $P(x; y)$ apzīmēsim doto funkcionālsakarību. Ievērosim, ka $P(y; x)$ dod mums:

$$f(y)f(x) = f(x)f(yf(x)) + \frac{1}{xy}$$

Salīdzinot iegūto sakarību ar $P(x; y)$, varam secināt, ka:

$$f(x)f(yf(x)) = f(y)f(xf(y))$$

Ievietojot pēdējā sakarībā $x = 1$:

$$f(1)f(yf(1)) = f(y)f(f(y)) \qquad (*)$$

Apskatīsim $P(x; 1)$, izmantojot (*):

$$\begin{aligned} f(x)f(1) &= f(x)f((x)) + \frac{1}{x} \\ f(x)f(1) &= f(1)f(xf(1)) + \frac{1}{x} \\ f(x) &= f(xf(1)) + \frac{1}{xf(1)} \qquad (1) \end{aligned}$$

Aizvietojot x ar $\frac{1}{f(x)}$ (ievērojam, ka funkcija pieņem tikai pozitīvas vērtības), iegūstam, ka:

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(\frac{f(1)}{f(x)}\right) + \frac{f(x)}{f(1)}$$

Ievērosim, ka $P\left(\frac{1}{f(x)}; x\right)$ dod mums šādas sakarības:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{f(x)}\right)f(x) &= f(x)f(1) + \frac{f(x)}{x} \\ f\left(\frac{1}{f(x)}\right) &= f(1) + \frac{1}{x} \qquad (2) \end{aligned}$$

Savukārt $P\left(\frac{f(1)}{f(x)}; x\right)$ pasaka mums, ka:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{f(1)}{f(x)}\right)f(x) &= f(x)f(f(1)) + \frac{f(x)}{xf(1)} \\ f\left(\frac{f(1)}{f(x)}\right) &= f(f(1)) + \frac{1}{xf(1)} \qquad (3) \end{aligned}$$

Sakarību (3) var pārveidot, izmantojot sakarības (1) pārveidoto formu, šādi:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{f(1)}{f(x)}\right) &= f(f(1)) + \frac{1}{xf(1)} \\ f\left(\frac{1}{f(x)}\right) - \frac{f(x)}{f(1)} &= f(f(1)) + \frac{1}{xf(1)} \end{aligned}$$

Izmantojot sakarību (2), varam rakstīt, ka:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{f(x)}\right) - \frac{f(x)}{f(1)} &= f(f(1)) + \frac{1}{xf(1)} \\
f(1) + \frac{1}{x} - \frac{f(x)}{f(1)} &= f(f(1)) + \frac{1}{xf(1)} \\
\frac{f(x)}{f(1)} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{f(1)-1}{f(1)} + f(1) - f(f(1)) \\
f(x) &= \frac{1}{x}(f(1)-1) + f(1)^2 - f(1)f(f(1))
\end{aligned}$$

Ievērosim, ka no $P(1;1)$ izriet, ka $f(1)^2 - f(1)f(f(1)) = 1$, tāpēc:

$$f(x) = \frac{1}{x}(f(1)-1) + 1$$

Varam secināt, ka $f(x) = \frac{C}{x} + 1$, kur $C = f(1) - 1$. Atliek noteikt, kāda ir C vērtība. Atzīmēsim, ka $f(1) = C + 1$, līdz ar to:

$$\begin{aligned}
f(1)^2 - f(f(1))f(1) &= 1 \\
(C+1)^2 - f(C+1)(C+1) &= 1 \\
(C+1)^2 - (\frac{C}{C+1} + 1)(C+1) &= 1 \\
C^2 + 2C + 1 - C - C - 1 &= 1 \\
C^2 = 1 \implies C = 1 \quad \text{vai} \quad C &= -1
\end{aligned}$$

Pamanīsim, ka $C = -1$ nevar būt, jo tādā gadījumā $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, taču tas nozīmē, ka $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 = -1$, kas ir pretrunā ar to, ka funkcijas vērtības ir tikai pozitīvi skaitļi.

Tātad $C = 1$ un meklētā funkcija ir $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Atliek pārbaudīt, ka tā patiešām der:

$$\begin{aligned}
f(x)f(y) &= f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy} \\
\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) &= \left(1+\frac{1}{y}\right)f\left(x+\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} \\
1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{x+\frac{x}{y}}\right) + \frac{1}{xy} \\
1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= \left(\frac{y+1}{y}\right)\left(\frac{y}{x(y+1)}+1\right) + \frac{1}{xy} \\
1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= \frac{1}{x} + \frac{y+1}{y} + \frac{1}{xy} \\
1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}
\end{aligned}$$

Uzdevums ir atrisināts.

2.uzdevums Šaurleņķa trijstūrī $\triangle ABC$ iekšpusē izvēlēts punkts P tā, ka $\angle CAP = \angle BCP$, pie tam P neatrodas uz mediānas, kas vilkta no virsotnes A. Taisnes BP un CP krusto malas AC un AB attiecīgi punktos B' un C'. Taisne AP krusto otrreiz $\triangle ABC$ apvilkto riņķa līniju punktā Q. Taisnes $B'Q$ un CC' krustojas punktā R. Taisne, kas caur punktu P vilkta paralēli AC, krusto taisni $B'Q$ punktā S. Taisnes $B'C'$ un QB krustojas punktā T, pie tam punkti T un C atrodas dažādās taisnes AB pusēs.
Pierādīt, ka $\angle BAT = \angle BB'Q$ tad un tikai tad, ja $SQ = RB'$.

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers) Vispirms pierādīsim, ka, ja $SQ = RB'$, tad $\angle BAT = \angle BB'Q$.

Ievērosim, ka $\angle BCP = \angle CAP = \angle CAQ = \angle CBQ$, tāpēc $PC \parallel BQ$. No Talesa teorēmas izriet, ka:

$$\frac{B'S}{BP} = \frac{RQ}{PB} = \frac{B'R}{B'P} = \frac{SQ}{B'P} \implies \frac{BP}{B'P} = \frac{B'S}{SQ}$$

No otras puses, pielietojot Talesa teorēmu taisnēm QB' un AQ, varam iegūt, ka:

$$\frac{QP}{QS} = \frac{AP}{B'S} \implies \frac{AP}{QP} = \frac{B'S}{SQ}$$

Līdz ar to varam secināt, ka:

$$\frac{B'S}{SQ} = \frac{BP}{B'P} = \frac{AP}{QP}$$

No apgrieztās Talesa teorēmas izriet, ka taisnes AB un $B'Q$ ir paralēlas.

Ievērosim, ka no Talesa teorēmas taisnēm $B'T$ un $B'P$ izriet, ka:

$$\frac{B'C'}{C'T} = \frac{B'P}{PB} = \frac{QP}{PA}$$

Analoģiski, pielietojot Talesa teorēmu taisnēm AQ un AB, varam iegūt, ka:

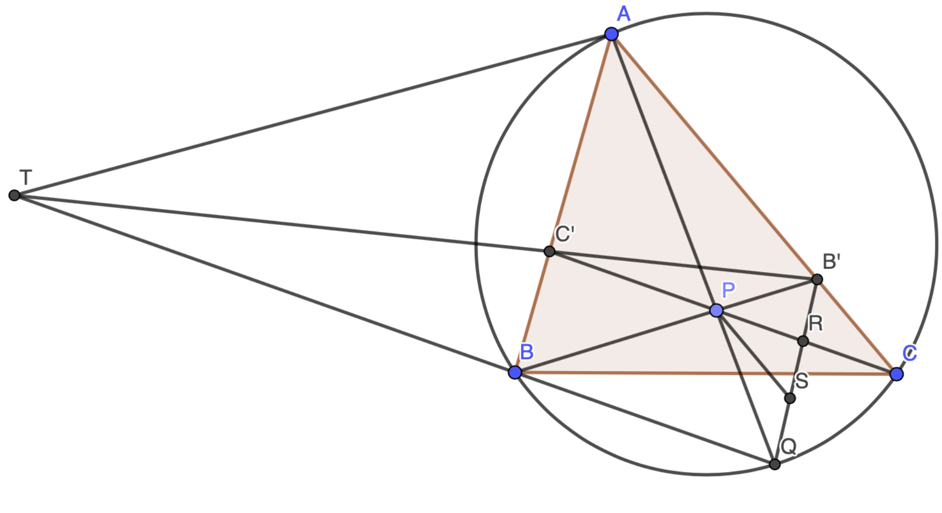
$$\frac{QP}{PA} = \frac{BC'}{C'A}$$

Apvienojot iepriekš iegūtās sakarības kopā, iegūstam, ka:

$$\frac{B'C'}{C'T} = \frac{BC'}{C'A}$$

No apgrieztās Talesa teorēmas izriet, ka taisnes AT un BB' arī ir savā starpā paralēlas. Līdz ar to varam secināt, ka:

$$\angle BAT = \angle ABB' = \angle BB'Q$$



3.att.

Tagad aplūkosim otru gadījumu, ja ir zināms, ka $\angle BAT = \angle BB'Q$. Pierādīsim, ka tādā gadījumā $SQ = RB'$.

Ieviešam punktus $A' = AP \cap BC$, $U = B'C' \cap AP$ un $D = (B'PC') \cap AP$.
Vispirms pierādīsim, ka $D \neq A$. Pieņemsim pretējo, tad $A \in (B'C'P)$. Ievērosim, ka tādā gadījumā

$$\angle PAB' = \angle B'C'P = \angle PCA' \implies B'C' \parallel BC \implies \angle C'AP = \angle C'B'P = \angle PBC.$$

No tā var secināt, ka riņķa līnija $\odot(APB)$ pieskaras taisnei BC, tātad $A'B^2 = A'P \cdot A'A$. No dotajām leņķu vienādībām līdzīgi var secināt, ka $\odot(APC)$ arī pieskaras taisnei BC, tātad $A'C^2 = A'P \cdot A'A$. Taču tādā gadījumā $A'B^2 = A'C^2 \implies A'B = A'C$, kas nozīmē, ka AP ir mediāna. Bet tas nav iespējams no uzdevuma nosacījumiem - pretruna. Līdz ar to $D \neq A$.

Pierādījumā aplūkosim gadījumu, kad punkts D neatrodas nogriežņa AP iekšpusē. Otru gadījumu var pierādīt analoģiski.
Līdzīgi kā pirmajā risinājuma daļā var iegūt $PC \parallel BQ$. No punkta pakāpes $\odot(B'PC'D)$ zināms, ka $UD \cdot UP = UC' \cdot UB'$, tādēļ kopā ar Talesa teorēmu:

$$\frac{UD}{UB'} = \frac{UC'}{UP} = \frac{UT}{UQ}.$$

Krustleņķu dēļ varam secīgi iegūt trijstūru līdzības $\triangle TDU \sim \triangle QB'U$ un attiecīgi $\triangle TDC' \sim \triangle QB'P$, jo tad $\angle DTU = \angle B'QU$ (no pirmās līdzības) un $\angle DCB' = \angle DPB' \implies DC'T = \angle B'PQ$.
Tad no leņķiem varam ievērot:

$$\angle C'AT = \angle BAT = \angle BB'Q = \angle PB'Q = \angle C'DT,$$

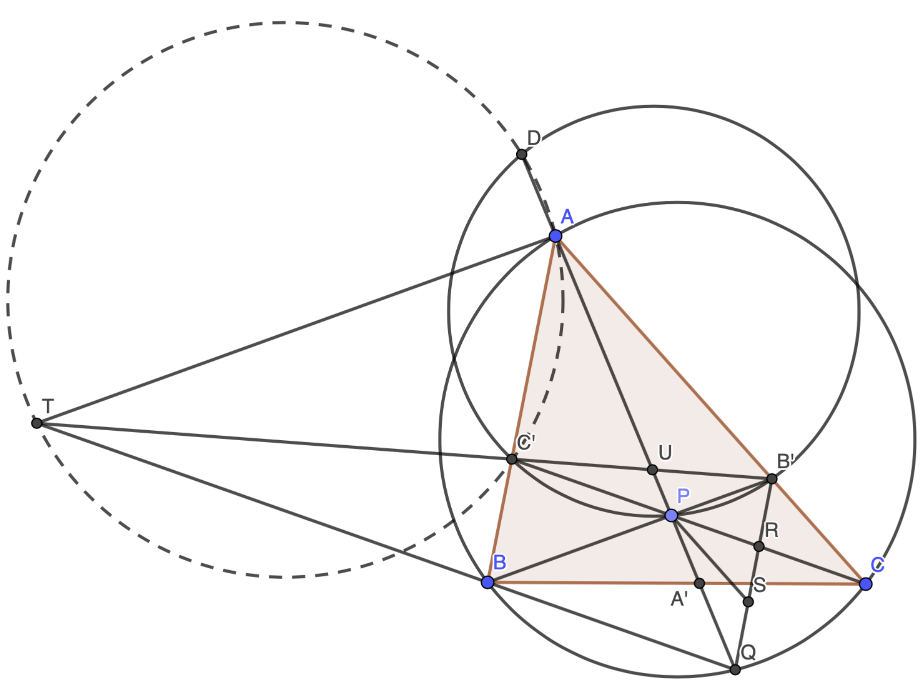
kas nozīmē, ka četrstūrim $DAC'T$ var apvilkt riņķa līniju. Veicot vēl novērojumus:

$$\angle PAB = \angle DTC' = \angle B'QP \implies AB \parallel B'Q.$$

Atkārtoti pielietojot Talesa teorēmu ar paralēlu taišņu pāriem $PC \parallel BQ, AB \parallel B'Q, PS \parallel AC$, iegūstam:

$$\frac{RB'}{RQ} = \frac{PB'}{PB} = \frac{PQ}{PA} = \frac{SQ}{SB'}.$$

Tā kā punkti S un R dala vienu un to pašu nogriezni $B'Q$ vienādās attiecībās, tad ir skaidrs, ka tie ir simetriski pret nogriežņa viduspunktu, un tad $SQ = RB'$, kas kopā ar pirmo risinājuma daļu pierāda uzdevumā prasīto.



4.att.

3.uzdevums Dots naturāls skaitlis n. Kvadrātiskas tabulas izmērs ir $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ rūtiņas, katrā rūtiņā var ierakstīt vai nu 1, vai -1. Tabulas aizpildījumu sauksim par *veiksmīgu*, ja katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar visu savu kaimiņu reizinājumu (kaimiņš ir skaitlis, kas ir ierakstīts rūtiņā, ar ko dotajai rūtiņai ir kopīga mala). Cik ir dažādu veiksmīgu tabulas aizpildījumu?

Atrisinājums Atbilde ir $k = 2$ pie $n = 1$ un $k = 1$ pie $n \geq 2$, kur k ir veiksmīgo aizpildījumu skaits. Gadījums $n = 1$ ir acīmredzams, tādēļ aplūkosim pārējos gadījumus $n \geq 2$. Pie $n = 2$ ir viegli iespējams pārbaudīt, ka vienīgais veiksmīgais aizpildījums ir tad, ja visās rūtiņās ir ierakstīts 1. Pieņemsim, ka eksistē tabulas ar $n > 2$, kurām veiksmīgā aizpildījumā ir rūtiņas ar -1. Aplūkosim šādu tabulu ar minimālo n vērtību.

Ja šis aizpildījums nav vertikāli simetrisks, tad veicam šādu operāciju: sareizinām katru tabulas skaitli ar tam simetrisko pār vertikālo viduslīniju (vidējās kolonnas skaitļus attiecīgi ceļam kvadrātā). Pirmkārt, pēc šādas operācijas tabulas aizpildījums joprojām ir veiksmīgs. To var ievērot, jo katrs skaitlis tika sareizināts ar tam simetrisko, kā arī katrs šī skaitļa kaimiņš tika pareizināts ar simetriskā kaimiņu, tādēļ reizinājumu vienādība joprojām izpildās. Otrkārt, jaunais aizpildījums joprojām satur vismaz vienu -1, izņemot tos gadījumus, ja pirms operācijas visi -1 atradās vidējā kolonnā. Tas izpildās, jo pretējā gadījumā katrs skaitlis tiktu celts kvadrātā, kas nozīmētu, ka tabula bija vertikāli simetriska jau pirms operācijas.
Pieņemsim, ka pirms operācijas visi -1 tiešām atradās vidējā kolonnā. Aplūkojam kādu skaitli, kurš atrodas blakus vidējai kolonnai un kura kaimiņš vidējā kolonnā ir -1. Tā kā šis skaitlis ir 1 (jo visi -1 ir vidējā kolonnā), tad tā kaimiņu reizinājumam būtu jābūt 1. Taču šis reizinājums sanāktu $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$, kas ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad šis gadījums nav iespējams un -1 atrodas aizpildījumā ne uz vidējās kolonnas.
Tā kā kvadrāts ir simetriska figūra pret diagonāli, varam veikt analoģisku operāciju arī pret vidējo rindu (horizontāli). Tā rezultātā būsim ieguvuši gan horizontāli, gan vertikāli simetrisku aizpildījumu, kurā kādā no rūtiņām ir skaitlis -1.

Aplūkojam vidējo kolonnu. Katrs tajā ierakstītais skaitlis ir savu kaimiņu reizinājums. Tā kā tabulas aizpildījums ir vertikāli simetrisks, tad pēc būtības katrs skaitlis ir tikai savu vidējās kolonnas kaimiņu reizinājums. Aplūkojot rūtiņu vidējā kolonnā, kas atrodas pie tabulas malas, var novērot, ka, izvēloties tajā 1 vai -1, tā rada tālāk unikālu kolonnas aizpildījumu. Pirmajā gadījumā aizpildījums ir $1, 1, 1, \ldots, 1$, kamēr otrajā tas ir $-1, -1, 1, -1, -1, \ldots, 1, -1, -1$ (tam garantēti jānoslēdzas ar $-1, -1$). Taču otrajā gadījumā tad kolonnas garumam jābūt $2 \pmod 3$, bet tas nav iespējams, jo $2^n - 1 \not\equiv 2 \pmod 3$. Analoģiskus spriedumus varam pielietot arī vidējai rindai. No tā iegūsim, ka gan vidējā rinda, gan vidējā kolonna saturēs tikai skaitļus 1.

Šādā gadījumā var ievērot, ka vidējā rinda un vidējā kolonna sadala tabulu četrās mazākās tabulās ar izmēru $2^{n-1} - 1$. Papildus tam, tā kā vidējā rinda un vidējā kolonna sastāv tikai no vieniniekiem, tās neietekmē skaitļu vērtības un reizinājumus šajās mazākajās tabulās. Tātad šīs mazākās tabulas arī ir veiksmīgi sakārtotas, piedevām no iepriekš iegūtajiem rezultātiem tajās ir atrodamas rūtiņas ar -1. Taču tādā gadījumā būtu jāeksistē veiksmīgam aizpildījumam ar -1 pie $n-1$, kas ir pretruna ar n minimalitāti. Līdz ar to tas nav iespējams un šāds minimālais $n \geq 2$ neeksistē. Tādēļ pie katras $n \geq 2$ vērtības eksistē tikai viens veiksmīgs tabulas aizpildījums, kuram katrā rūtiņā ir rakstīts 1. Viegli redzams, ka šāds aizpildījums apmierina uzdevuma nosacījumus.

Atlases sacensības uz IMO 2022, 4.diena

4.uzdevums Riņķa līnijā, kuras centrs ir O, ievilkts četrstūris $ABCD$. Tā diagonāles AC un BD krustojas punktā E, bet taisnes AD un BC krustojas punktā F. Malu AD un BC viduspunkti attiecīgi ir punkti X un Y. Trijstūrim $\triangle EXY$ apvilktās riņķa līnijas centrs ir O_1. Pierādīt, ka $OF \parallel O_1E$.

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs) Taisņu AB un CD krustpunktu apzīmēsim ar T. No Brokāra teorēmas četrstūri $ABCD$ izriet, ka punkts O ir $\triangle EFT$ augstumu krustpunkts. Šī iemesla dēļ $OF \perp TE$. Ja mēs pierādītu, ka $TE \perp EO_1$, tad uzdevums būtu atrisināts. Tas ir ekvivalents ar to, lai pierādītu, ka TE ir $\odot(EXY)$ pieskare.

Pieņemsim, ka TE krusto nogriežņus BC un AD attiecīgi punktos M un N. No projektīvās ģeometrijas faktiem ievērosim, ka:

$$-1 = (F, N; A, D) \stackrel{T}{=} (F, M; B, C)$$

Tā kā punkti X un Y ir attiecīgi nogriežņu AD un BC viduspunkti, tad:

$$FA \cdot FD = FN \cdot FX \quad \text{un} \quad FB \cdot FC = FM \cdot FY$$

Tā kā ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $FA \cdot FD = FB \cdot FC$, līdz ar to varam secināt, ka:

$$FN \cdot FX = FM \cdot FY$$

No apgrieztās apvilktā četrstūra pazīmes varam secināt, ka ap četrstūri $MYXN$ var apvilkt riņķa līniju.

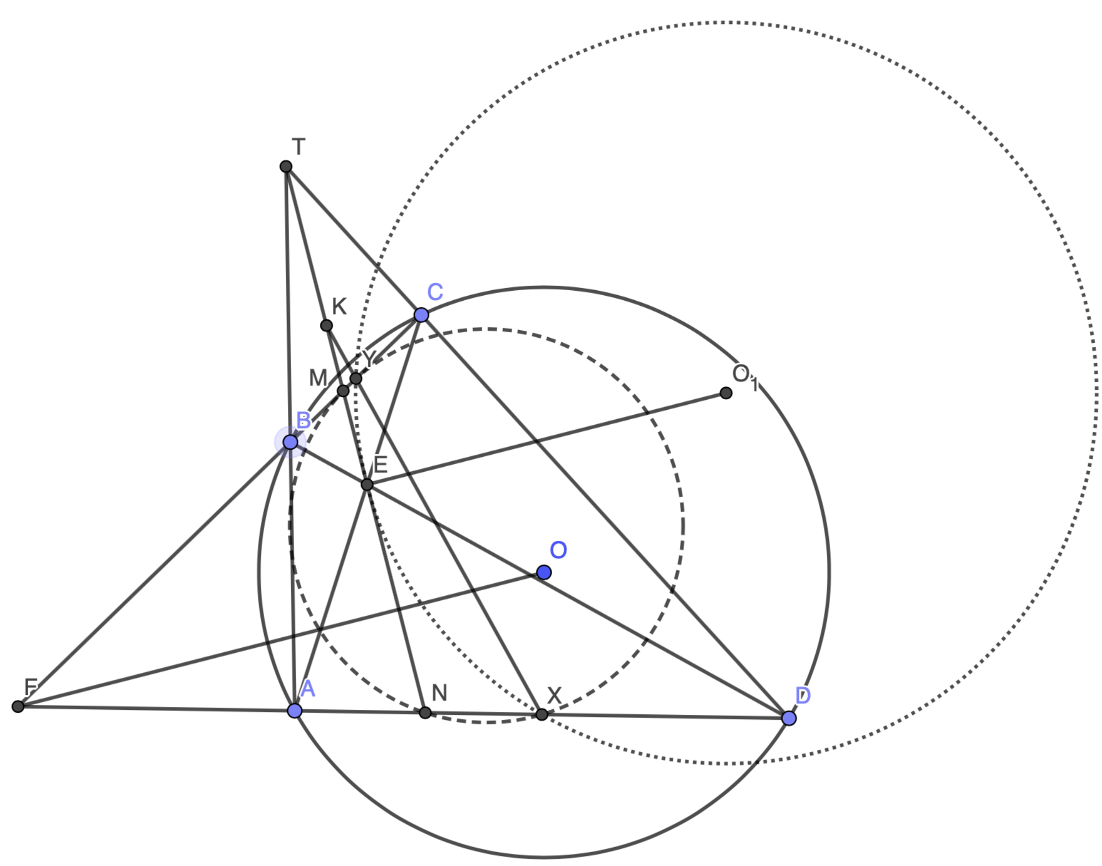
Ievērosim, ka:

$$-1 = (T, FE \cap TD; C, D) \stackrel{F}{=} (T, E; M, N)$$

Atzīmēsim, ka, tā kā punkti X un Y ir nogriežņu AD un BC viduspunkti, tad no Ņūtona-Gausa taisnes četrstūrī $ACDB$ izriet, ka taisne XY iet caur nogriežņa TE viduspunktu. Ja mēs pieņemam, ka $XY \cap TE = K$, tad punkts K ir nogriežņa TE viduspunkts. Tā kā $-1 = (T, E; M, N)$, tad:

$$KE^2 = KM \cdot KN = KY \cdot KX$$

kur tika izmantots fakts, ka ap četrstūri $MYXN$ var apvilkt riņķa līniju. No apgrieztās pieskares pazīmes izriet, ka KE ir $\odot(EXY)$ pieskare un uzdevums ir atrisināts.



5.att.

Piezīmes: Risinājumā tika izmantotas sekojošas teorēmas:

- **Brokāra teorēma**. Dots četrstūris $ABCD$, ap kuru var apvilkt riņķa līniju, kuras centrs ir punkts O. Ar punktu E apzīmēsim taišņu AB un CD krustpunktu, ar punktu F apzīmēsim taišņu AD un BC krustpunktu, savukārt ar punktu G apzīmēsim taišņu AC un BD krustpunktu. Tad punkts O ir $\triangle EFG$ ortocentrs (augstumu krustpunkts).

- **Ņūtona - Gausa taisne**. Dots patvaļīgs četrstūris $ABCD$. Ar punktu E apzīmēsim taišņu AB un CD krustpunktu, bet ar punktu F apzīmēsim taišņu AD un BC krustpunktu. Pieņemsim, ka nogriežņu AC, BD un EF viduspunkti ir attiecīgi punkti M, N, R. Tad punkti M, N, R atrodas uz vienas taisnes, ko sauc par Ņūtona - Gausa taisni. Šī teorēma ir spēkā pilnībā patvaļīgam četrstūrim - gan ieliektam, gan izliektam, gan lauztam u.tml. Uzdevumā tā tika pielietota lauztam četrstūrim $ACDB$. Sīkāk ar šo teorēmu un tās pierādījumu var iepazīties šajā mājaslapā.

- **Harmonisks četrinieks no trijstūra čeviānām**. Apskatīsim patvaļīgu trijstūri $\triangle ABC$. Uz nogriežņiem BC, CA, AB izvēlēti attiecīgi tādi punkti D, E, F, ka taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā (šādas taisnes caur par čeviānām). Ar punktu X apzīmēsim taišņu EF un BC krustpunktu. Tad punkti X, D, B, C veido harmonisku četrinieku, tas ir, $(X, D; B, C) = -1$. Dotajā uzdevumā šī teorēma tika pielietota trijstūrī $\triangle TAD$ un tā čeviānām TN, AC, BD, lai secinātu, ka $(F, N; B, C) = -1$, kā arī trijstūrim $\triangle CDF$ un tā čeviānām FE, AC, BD, lai iegūtu, ka $(T, FE \cap CD; C, D) = -1$.

- **Harmoniskais četrinieks, nogriežņu viduspunkti un to īpašības**. Pieņemsim, ka punkti A, C, B, D veido harmonisku četrinieku, tas ir, $(A, C; B, D) = -1$. Punkts M ir nogriežņa BD viduspunkts, tad izpildās šādas sakarības:

  $$MB^2 = MA \cdot MC \quad \text{un} \quad AB \cdot AD = AC \cdot AM$$

  Ir svarīgi pieminēt, ka, pirmkārt, šīs sakarības savā starpā ir ekvivalentas, tas ir, tās var iegūt vienu no otras, veicot ekvivalentus pārveidojumus ar nogriežņu garumiem. Otrkārt, ja izpildās kaut viena no šīm sakarībām, tad $(A, C; B, D) = -1$, tas ir, šīs teorēmas apgrieztā teorēma arī ir patiesa.
  Uzdevumā šī teorēma tika izmantota, lai no sakarībām $(F, N; A, D) = -1$ un $(F, M; B, C) = -1$, secinātu, ka $FN \cdot FX = FA \cdot FD$ un $FM \cdot FY = FB \cdot FC$, kā arī, lai no sakarības $(T, E; M, N) = -1$ iegūtu, ka $KE^2 = KM \cdot KN$.

Pēdējām 2 teorēmām ir plašs pielietojums projektīvajā ģeometrijā. Lasītājiem, kuri nav pazīstami ar šo tematu, ieteicams iepazīties ar to šajā mājaslapā.

5.uzdevums Galerijā "Ekspresionists" ir izstādītas 100 gleznas, apzīmēsim tās ar $G_1, G_2, \ldots, G_{100}$. Mākslinieks un kritiķis spēlē šādu spēli.

No sākuma mākslinieks katrai no gleznām izdomā cenu, kas ir naturāls skaitlis, apzīmēsim cenas attiecīgi ar $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{100}$. Pēc tam katrā gājienā:

- mākslinieks nosauc kādu naturālu skaitli x;
- kritiķis izvēles gleznu G_i un nomaina tās cenu uz x (t.i., tagad $c_i = x$, pārējās c_j vērtības, kurām $j \neq i$, nemainās)

Ja pēc kāda gājiena cenas ir sakārtotas nedilstošā secībā $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{100}$, tad kritiķis ir uzvarējis un spēle beidzas. Pretējā gadījumā spēle turpinās.

Vai kritiķis vienmēr var uzvarēt neatkarīgi no tā, kā spēlē mākslinieks?

Atrisinājums (Ilmārs Štolcers) Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka kritiķis var uzvarēt jebkuram naturālam gleznu skaitam n.

Indukcijas bāze: Ja $n = 1$, tad acīmredzami pēc pirmā gājiena kritiķis būs uzvarējis.

Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka naturālam k kritiķis var sakārtot k gleznas nedilstošā cenu secībā.

Induktīvā pāreja: Aplūkosim situāciju, kad ir $k + 1$ glezna. No induktīvā pieņēmuma kritiķis var pirmās k gleznas sakārtot nedilstošā cenu secībā. Ja $c_{k+1} \geq c_k$, tad prasītais izpildās; aplūkosim pretējo situāciju. Veidosim kritiķa darbības algoritmu atkarībā no mākslinieka izvēlētā skaitļa x katrā gājienā:

- Ja $x \geq c_k$. Šajā gadījumā kritiķis aizstāj c_{k+1} ar x. Tā kā pirmās k gleznas jau ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā, tad acīmredzami visas $k + 1$ gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā un kritiķis ir uzvarējis.
- Ja $x < c_k$. Tad kritiķis pēc kārtas salīdzina gleznu cenas ar x, sākot ar c_1, tad c_2 utt. līdz c_k. Kad kritiķis atrod pirmo gleznu G_i, ka $x < c_i$, viņš aizstāj c_i ar x. Šāda glezna noteikti eksistēs, jo $x < c_k$.
  Šajā gadījumā varam attiecīgi ievērot, ka pēc c_i aizstāšanas gleznu cenas joprojām ir sakārtotas nedilstošā secībā, jo no algoritma $x \geq c_{i-1}$. Papildus tam var secināt, ka pirmo k gleznu cenu summa samazinās, jo $x < c_i$.

Izmantojot šādu algoritmu, kritiķis var garantēt uzvaru, jo algoritms garantēti kādā brīdī nonāks gadījumā $x \geq c_k$. Tas izriet no tā, ka otrā gadījumā pirmo k gleznu cenu summa katru reizi samazinās, taču tā nevar kļūt mazāka par k (kad $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 1$). Ja tā sasniedz minimumu, tad acīmredzami $x \geq c_k$ un visas gleznas ir sakārtotas nedilstošā cenu secībā. Līdz ar to induktīvā pāreja ir pierādīta.
Tā kā esam pierādījuši, ka kritiķis uzvar visiem naturāliem n, tad viņš uzvar arī gadījumā $n = 100$, kas bija jāpierāda.

6.uzdevums Atrodiet visus naturālu skaitļu pārus $a, b > 1$, kuriem $a^b - 1$ dalās ar b^a.

Atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs) Pierādīsim, ka skaitlis b ir pāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, tad skaitlim b eksistē tā mazākais nepāra pirmreizinātājs p.
Apskatīsim gadījumu, kad p dala $a-1$. Tādā gadījumā no LTE lemmas izriet, ka:

$$\nu_p(a^b - 1) = \nu_p(a-1) + \nu_p(b)$$

Lai izpildītos dalāmības nosacījums, ir jābūt spēkā šādai sakarībai:

$$\begin{aligned}
\nu_p(a^b - 1) &\geq \nu_p(b^a) \\
\nu_p(a-1) + \nu_p(b) &\geq a\nu_p(b) \\
\nu_p(a-1) \geq \nu_p(b)(a-1) &\geq a-1 \\
\log_p(a-1) \geq \nu_p(a-1) \geq \nu_p(b)(a-1) &\geq a-1 \\
\log_p(a-1) &\geq a-1 \\
a-1 &\geq p^{(a-1)}
\end{aligned}$$

juPēdējā sakarība ir aplama, jo $f(x) = p^x$ naturālos skaitļos aug ātrāk nekā funkcija $g(x) = x$. Līdz ar to p nedala $a-1$.

No Fermā mazās teorēmas izriet, ka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ un $a^b \equiv 1 \pmod p$.

Lemma: Pieņemsim, ka d ir mazākais naturālais skaitlis, kuram $a^d \equiv 1 \pmod p$. Ja $a^x \equiv 1 \pmod p$ kaut kādam naturālam skaitlim x, tad x dalās ar d.
Pierādījums Pieņemsim pretējo, ka x nedalās ar d, tad $x = dy + r$, kur $1 \leq r \leq d-1$. Līdz ar to:

$$1 \equiv a^x = a^{dy+r} \equiv (a^d)^y \cdot a^r \equiv a^r \pmod p$$

Taču pēdējā sakarība ir pretrunā ar d minimalitāti, jo $1 \leq r \leq d-1$. Līdz ar to sākotnējais pieņēmums ir aplams, tāpēc x dalās ar d.

Atgriežoties pie uzdevuma, esam ieguvuši, ka d dala gan $p-1$, gan b (nepāra). Tas nozīmē, ka skaitlis d dalās ar kādu nepāra naturālu skaitli, kas ir mazāks par p. Ievērosim, ka $d \neq 1$, jo $a-1$ ar p nedalās. Līdz ar to b satur kādu pirmreizinātāju, kas mazāks par p. Tā ir pretruna ar p minimalitāti.

Esam ieguvuši, ka b ir pāra skaitlis, kas nozīmē, ka a ir nepāra skaitlis. Pielietojot LTE lemmu, iegūsim, ka:

$$\nu_2(a^b - 1) = \nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) + \nu_2(b) - 1$$

Lai izpildītos dalāmības nosacījums, ir jābūt spēkā šādai sakarībai:

$$\begin{aligned}
\nu_2(a^b - 1) &\geq \nu_2(b^a) \\
\nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) + \nu_2(b) - 1 &\geq a\nu_2(b) \\
\nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) - 1 \geq \nu_2(b)(a-1) &\geq a-1 \\
\nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) - 1 &\geq a-1
\end{aligned}$$

Ievērosim, ka $a-1; a+1$ ir divi pēc kārtas sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 2, bet nedalās ar 4. Šķirojam gadījumus:

- Ja $\nu_2(a+1) = 1$, tad iegūsim, ka:

  $$\begin{aligned}
  \nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) - 1 &\geq a-1 \\
  \nu_2(a-1) &\geq a-1 \\
  \log_2(a-1) \geq \nu_2(a-1) &\geq a-1 \\
  \log_2(a-1) &\geq a-1 \\
  a-1 &\geq 2^{a-1}
  \end{aligned}$$

  Pēdējā sakarība ir aplama, jo funkcija $f(x) = 2^x$ naturālos skaitļos aug ātrāk nekā $g(x) = x$. Līdz ar to šāds gadījums nav iespējams.

- Ja $\nu_2(a-1) = 1$, tad iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} \nu_2(a-1) + \nu_2(a+1) - 1 &\geq a-1 \\ \nu_2(a+1) &\geq a-1 \\ \log_2(a+1) \geq \nu_2(a+1) &\geq a-1 \\ \log_2(a+1) &\geq a-1 \\ a+1 &\geq 2^{a-1} \end{aligned}$$

  Pēdējā sakarība ir aplama visiem naturāliem skaitļiem $a > 3$, jo funkcija $f(x) = 2^x$ naturālos skaitļos aug straujāk nekā funkcija $g(x) = x + 2$ visiem $x > 2$. Secinām, ka $a = 3$ un $\nu_2(b) = 1$

Esam ieguvuši, ka $a = 3$ un $b = 2c$, kur c ir nepāra skaitlis. Dalāmības nosacījums kļūst par $9^c - 1$ dalās ar $8c^3$. Pieņemsim, ka skaitlim c eksistē kaut kāds mazākais nepāra pirmreizinātājs p, tad no mazās Fermā teorēmas izriet, ka:

$$9^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad \text{un} \quad 9^c \equiv 1 \pmod p$$

Ja mēs apskatām mazāko naturālo skaitli d tādu, ka $9^d \equiv 1 \pmod p$, tad no lemmas izriet, ka d dala gan $p - 1$, gan c. Acīmredzami $d \neq 1$ un d ir nepāra skaitlis, taču tādā gadījumā esam atraduši vēl mazāku pirmreizinātāju skaitlim c, jo $d \leq p - 1 < p$. Pretruna. Tas nozīmē, ka $c = 1$. Līdz ar to vienīgais derīgais skaitļu pāris $(a; b)$ ir $(3; 2)$.

Piezīme: Lasītājs var sīkāk iepazīties ar LTE lemmu Vikipēdijas lapā. Iesakām apskatīt arī tādus uzdevumus kā IMO 2019 P4 un IMO 2022 P5, lai trenētu savas prasmes to izmantot.