Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2023. gada 23. septembris, Rīga

1. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. Atrast mazāko reālo konstanti N ar īpašību, ka jebkuram trijstūrim ABC, kura malu garumi apzīmēti ar $a < b < c$, izpildās nevienādība

$$\frac{a}{b+c} \cdot \frac{c}{a+b} < N.$$

2. Pierādīt, ka skaitlis $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt[100]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ir iracionāls.

3. Ar $\mathbb{R}$ apzīmēsim reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y izpildās

$$xf(y) + f(x+y) \geqslant (y+1)f(x) + f(y).$$

4. Dots naturāls skaitlis $n \geqslant 2$ un reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots a_n$ ar īpašību, ka $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ katram naturālam $1 \leqslant i \leqslant n$. Pierādīt, ka

$$\frac{1 - a_1 a_2 \ldots a_n}{n} \leqslant \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

5. Dots nepāra naturāls skaitlis $N \geqslant 3$. Badmintona turnīrā piedalās N spēlētāji. Pirms turnīra sākuma līdzjutēji sastāda spēlētājus rindā secīgi pēc tā, cik viņiem labi šķiet spēlētāji, sākot ar vislabāko un beidzot ar visvājāko (spēlētāju ar vienādiem vērtējumiem nav). Turnīra laikā katrs spēlētājs izspēlē vienu spēli pret ikkatru citu spēlētāju, un katrā spēlē viens no spēlētājiem uzvar. Sauksim spēli par *pārsteidzošu*, ja tajā uzvar spēlētājs, kurš līdzjutēju vērtējumā bija novērtēts sliktāk par savu pretinieku. Pēc turnīra beigām spēlētāji tiek sastādīti rindā pēc gūto uzvaru skaita, sākot ar spēlētāju, kurš uzvarēja visvairāk spēlēs. Gadījumā, ja vairākiem spēlētājiem ir vienāds uzvaru skaits, viņi savā starpā tiek sakārtoti pēc līdzjutēju vērtējuma, sākot ar vislabāk novērtēto.

Izrādījās, ka pēc turnīra iegūtā spēlētāju rinda sakrīt ar pirms turnīra izveidoto rindu. Kāds ir lielākais pārsteidzošu spēļu skaits, kas varēja notikt turnīrā?

6. Alfrēds un Petrs spēlē spēli. Viņiem ir kāpnes ar 56 pakāpieniem. Alfrēds slepeni izvēlas vienu no pakāpieniem, un tad Petra uzdevums ir uzminēt izvēlēto pakāpienu noteiktā veidā — viņš sāk spēli kāpņu apakšā un tad kāpj augšup pa kāpnēm, līdz apstājas uz sevis izvēlēta pakāpiena. Ja šis pakāpiens ir Alfrēda izvēlētais, tad Petrs uzvar. Pretējā gadījumā Alfrēds pasaka, vai viņa izvēlētais pakāpiens ir augstāk vai zemāk. Tad Petrs atkal kāpj (uz augšu vai leju) uz sevis izvēlētu pakāpienu — ja tas ir Alfrēda izvēlētais, tad Petrs uzvar, ja ne, tad Alfrēds pasaka, vai viņa izvēlētais pakāpiens ir augstāk vai zemāk, un spēle šādi turpinās.

Petrs spēles laikā drīkst apstāties uz ne vairāk kā 6 pakāpieniem, kā arī viņš drīkst mainīt savu kāpšanas virzienu ne vairāk kā 3 reizes. Uz kuriem pakāpieniem (ja tādi ir) Petrs drīkst apstāties savā pirmajā gājienā, lai garantētu, ka, pareizi spēlējot, viņš uzvarēs (t.i., spēles laikā nostāsies uz Alfrēda izvēlētā pakāpiena)?

7. Dots regulārs n-stūris, kas sadalīts $n-2$ trijstūros ar $n-3$ diagonālēm, kas n-stūra iekšienē savā starpā nekrustojas. Sadalījumu sauc par *divkrāsu*, ja tajā izkrāsots katrs no trijstūriem balts vai melns tā, ka jebkuri divi trijstūri, kam ir kopīga mala, ir dažādās krāsās. Sauksim naturālu skaitli $n \geqslant 4$ par *labi dalāmu*, ja regulāram n-stūrim eksistē divkrāsu sadalījums trijstūros, kam izpildās īpašība — no katras n-stūra virsotnes iziet vairāk melnu trijstūru nekā baltu. Noteikt visus labi dalāmus skaitļus.

Piezīme. Trijstūris iziet no n-stūra virsotnes, ja viena no trijstūra virsotnēm ir aplūkotā n-stūra virsotne.

8. Polārijas valstī 7 policisti ķer zagli, kas pārvietojas starp pilsētām. Divas pilsētas tiek sauktas par *kaimiņiem*, ja tās savieno tieša divvirzienu dzelzceļa līnija. Gan policisti, gan zaglis pārvietojas starp pilsētām, izmantojot dzelzceļa līnijas. Katru dienu vispirms policisti vienlaicīgi veic vienu savu gājienu, un pēc tam zaglis veic vienu savu gājienu. Policists savā gājienā var izvēlēties palikt pilsētā, kurā viņš šobrīd atrodas, vai aizbraukt uz kādu no kaimiņu pilsētām. Kad policisti ir veikuši savu gājienu, zaglis var savā gājienā aizbraukt uz kādu no kaimiņu pilsētām, ja tajā tobrīd neatrodas neviens policists, vai arī palikt savā pašreizējā pilsētā, ja tajā neatrodas neviens policists (jāievēro, ka policista iebraukšana pilsētā, kurā tobrīd atrodas zaglis, vēl nenozīmē, ka zaglis ir noķerts un process apstājas). Gan policisti, gan zaglis visu laiku zina visu cilvēku atrašanās vietu, kā arī policisti savā starpā sadarbojas. Zaglis ir *ielenkts*, ja viņš savā gājienā nevar aizbraukt uz nevienu no kaimiņu pilsētām.

Vai ir iespējams, ka Polārijā eksistē tāds pilsētu un dzelzceļa līniju izkārtojums, ka

- ikvienai pilsētai ir tieši 7 kaimiņi;
- nav iespējams aizbraukt no pilsētas un tajā atgriezties, izmantojot mazāk nekā 7 dažādas dzelzceļa līnijas, izņemot gadījumus, kad braucējs nolemj braukt pretējā virzienā pa kādu no aizbraukšanai izmantotajām dzelzceļa līnijām;
- neatkarīgi no tā, kurā pilsētā ir zaglis un no kurām pilsētām policisti uzsāk ķeršanu, policisti vienmēr var panākt, ka pēc galīga dienu skaita zaglis tiek ielenkts?