Baltijas Ceļa atlases 2023 atrisinājumi

1.uzdevums Atrast mazāko reālo konstanti N ar īpašību, ka jebkuram trijstūrim ABC, kura malu garumi apzīmēti ar $a < b < c$, izpildās nevienādība

$$\frac{a}{b+c} \cdot \frac{c}{a+b} < N.$$

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka $N = \frac{1}{3}$ der. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b+c} \cdot \frac{c}{a+b} < \frac{1}{3}$$
$$3ac < (b+c)(b+a)$$
$$3ac < b^2 + bc + ac + ab$$
$$b^2 + ba + bc > 2ac$$
$$b(a+b+c) > 2ac$$

Ievērosim, ka no trijstūra nevienādības izriet, ka $a + b > c \implies a + b + c > 2c$, tāpēc secinām, ka $b(a + b + c) > b \cdot 2c > a \cdot 2c = 2ac$. Tā kā dotajai nevienādībai ekvivalentā nevienādība ir patiesa, tad secinām, ka arī sākotnējā nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

Tagad pierādīsim, ka, ja $N < \frac{1}{3}$, tad var atrast tādu trijstūri ar malu garumiem $a < b < c$, kuram dotā nevienādība ir aplama. Aplūkosim trijstūri ar malu garumiem $a = 1, b = 1 + \epsilon$, $c = 2$ (šāds trijstūris eksistē, jo izpildās trijstūra nevienādība malu garumiem). Ievērosim, ka:

$$\frac{a}{b+c} \cdot \frac{c}{a+b} = \frac{1}{3+\epsilon} \cdot \frac{2}{2+\epsilon}$$

Līdz ar to varam secināt, ka

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{3+\epsilon} \cdot \frac{2}{2+\epsilon} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

No pirmajā rindkopā pierādītā izriet, ka $\frac{1}{3+\epsilon} \cdot \frac{2}{2+\epsilon} < \frac{1}{3}$, kas nozīmē, ka šis lielums tiecas uz $\frac{1}{3}$ no apakšas. Tas nozīmē, ka neviena par $\frac{1}{3}$ mazāka konstante nav iespējama, jo pie pietiekami mazas ϵ vērtības dotā izteiksme pārsniegtu šo konstanti.

2.uzdevums Pierādīt, ka skaitlis $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[100]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ir iracionāls.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka skaitlis $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[100]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ir racionāls. Apzīmēsim $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=a$, tādā gadījumā

$$\sqrt[100]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt[100]{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}=\sqrt[100]{\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}=\frac{1}{a}.$$

No mūsu pieņēmuma izriet, ka skaitlis $a+\frac{1}{a}$ ir racionāls.

Lemma. Ja skaitlis $a+\frac{1}{a}$ ir racionāls, tad katram naturālam skaitlim n ir spēkā, ka skaitlis $a^n+\frac{1}{a^n}$ ir racionāls skaitlis.
Pierādījums. Pierādīsim šo lemmu ar matemātiskās indukcijas palīdzību. Tā kā skaitlis $a+\frac{1}{a}$ ir racionāls, tad

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}$$

ir racionāls skaitlis. Līdz ar to mums ir indukcijas bāze priekš $n=1$ un $n=2$.

Priekš induktīvā pieņēmuma pieņemsim, ka skaitļi $a^k+\frac{1}{a^k}$ un $a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}$ ir racionāli, kur $k\geq 2$ ir naturāls skaitlis. Tādā gadījumā ievērosim, ka

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)-\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right)$$

Tas nozīmē, ka skaitlis $a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}$ ir racionāls skaitlis. Induktīvā pāreja pabeigta.

No pierādītā izriet, ka:

$$a^{100}+\frac{1}{a^{100}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

ir racionāls skaitlis, taču tas acīmredzami ir iracionāls - pretruna. Secinām, ka mūsu sākotnējais pieņēmums ir aplams, līdz ar to skaitlis $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[100]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ir iracionāls, kas arī bija jāpierāda.

3.uzdevums Ar $\mathbb{R}$ apzīmēsim reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y izpildās

$$xf(y) + f(x+y) \geqslant (y+1)f(x) + f(y).$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim $P(0, y)$:

$$f(y) \geq (y+1)f(0) + f(y) \implies 0 \geq (y+1)f(0)$$

Šī nevienādība izpildās katram y. Paņemot $y = 0$, iegūstam, ka $0 \geq f(0)$, Savukārt, paņemot $y = -2$, iegūstam, ka $0 \geq -f(0) \implies f(0) \geq 0$. Līdz ar to $0 \geq f(0) \geq 0$, kas nozīmē, ka $f(0) = 0$.

Aplūkosim $P(x, y)$ un $P(y, x)$:

$$\begin{aligned} xf(y) + f(x+y) &\geq (y+1)f(x) + f(y) \\ yf(x) + f(y+x) &\geq (x+1)f(y) + f(x) \end{aligned}$$

Saskaitīsim šīs divas nevienādības kopā:

$$2f(x+y) \geq 2f(x) + 2f(y) \implies f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

Pēdējā sakarībā ievietojot $y = -x$, iegūstam, ka:

$$f(0) = 0 \geq f(x) + f(-x) \implies -f(-x) \geq f(x).$$

Aplūkojot $P(x, -1)$, secinām, ka:

$$xf(-1) + f(x-1) \geq f(-1) \implies f(x-1) \geq f(-1)(1-x)$$

Aizvietojot x ar $x + 1$, iegūstam, ka:

$$f(x) \geq -f(-1)x$$

Tā kā $-f(-x) \geq f(x)$, tad varam iegūt, ka:

$$-f(-x) \geq f(x) \geq -f(-1)x \implies f(-x) \leq f(-1)x$$

No otras puses, sakarībā $f(x) \geq -f(-1)x$ aizvietojot x ar $-x$, iegūsim, ka $f(-x) \geq f(-1)x$. Esam ieguvuši, ka:

$$f(-1)x \geq f(-x) \geq f(-1)x \implies f(-x) = xf(-1)$$

Tas nozīmē, ka visiem reāliem skaitļiem x vienlaicīgi ir spēkā, ka $f(x) = Cx$, kur C ir patvaļīga reāla konstante. Pārbaudīsim, ka visas šādas funkcijas tiešām der:

$$\begin{aligned} xf(y) + f(x+y) &\geq (y+1)f(x) + f(y) \\ Cxy + Cx + Cy &\geq (y+1)Cx + Cy \\ Cxy + Cx + Cy &\geq Cxy + Cx + Cy \\ 0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Secinām, ka šī funkciju saime ir arī vienīgie atrisinājumi.

4.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geqslant 2$ un reāli skaitļi $a_1, a_2, \dots a_n$ ar īpašību, ka $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ katram naturālam $1 \leqslant i \leqslant n$. Pierādīt, ka

$$\frac{1 - a_1 \dots a_n}{n} \leqslant \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n}.$$

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma: Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un reāli skaitļi $0 \leq x_i \leq 1$ katram naturālam skaitlim $1 \leq i \leq n$. Izpildās nevienādība $x_1 + x_2 \dots + x_n \leq n - 1 + x_1 x_2 \dots x_n$.
Pierādījums. Pierādīsim prasīto ar indukciju pa n. Bāzes gadījumā, kad $n = 2$, mums ir jāpierāda, ka:

$$x_1 + x_2 \leq 1 + x_1 x_2 \implies (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzami patiesa, jo $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 2$ ir spēkā, ka:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq (k - 1) + x_1 x_2 \dots x_k$$

Mums ir jāpierāda, ka:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} \leq k + x_1 x_2 \dots x_{k+1}$$

No induktīvā pieņēmuma un bāzes izriet, ka:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \leq \\ \leq (k - 1) + x_1 x_2 \dots x_k + x_{k+1} \leq \\ \leq (k - 1) + 1 + x_1 \dots x_{k+1} = 1 + x_1 x_2 \dots x_{k+1} \end{gathered}$$

Pēdējā solī tika izmantota indukcijas bāze skaitļiem $x_1 x_2 \dots x_k$ un x_{k+1}, kur abi acīmredzami ir intervālā $[0; 1]$, tādēļ bāzi drīkst pielietot. Induktīvā pāreja ir izdarīta, līdz ar to lemma ir pierādīta.

Pārrakstīsim ekvivalenti pierādāmo nevienādību:

$$\begin{gathered} \frac{1 - a_1 \dots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \\ (1 - a_1 \dots a_n)(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq n \end{gathered}$$

No lemmas izriet, ka:

$$(1 - a_1 \dots a_n)(1 + a_1 + \dots + a_n) \leq (1 - a_1 \dots a_n)(n + a_1 \dots a_n)$$

Līdz ar to mums atliek pierādīt, ka:

$$\begin{gathered} (1 - a_1 \dots a_n)(n + a_1 \dots a_n) \leq n \\ n - (a_1 \dots a_n)^2 - (n - 1)(a_1 \dots a_n) \leq n \\ (a_1 \dots a_n)(n - 1 + a_1 \dots a_n) \geq 0 \end{gathered}$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzami patiesa.

5.uzdevums Dots nepāra naturāls skaitlis $N \geqslant 3$. Badmintona turnīrā piedalās N spēlētāji. Pirms turnīra sākuma līdzjutēji sastāda spēlētājus rindā secīgi pēc tā, cik viņiem labi šķiet spēlētāji, sākot ar vislabāko un beidzot ar visvājāko (spēlētāju ar vienādiem vērtējumiem nav). Turnīra laikā katrs spēlētājs izspēlē vienu spēli pret ikkatru citu spēlētāju, un katrā spēlē viens no spēlētājiem uzvar. Sauksim spēli par *pārsteidzošu*, ja tajā uzvar spēlētājs, kurš līdzjutēju vērtējumā bija novērtēts sliktāk par savu pretinieku. Pēc turnīra beigām spēlētāji tiek sastādīti rindā pēc gūto uzvaru skaita, sākot ar spēlētāju, kurš uzvarēja visvairāk spēlēs. Gadījumā, ja vairākiem spēlētājiem ir vienāds uzvaru skaits, viņi savā starpā tiek sakārtoti pēc līdzjutēju vērtējuma, sākot ar vislabāk novērtēto.
Izrādījās, ka pēc turnīra iegūtā spēlētāju rinda sakrīt ar pirms turnīra izveidoto rindu. Kāds ir lielākais pārsteidzošu spēļu skaits, kas varēja notikt turnīrā?

Atrisinājums. Atbilde ir $\frac{(N-1)(3N-1)}{8}$ spēles.

Sākotnēji pierādīsim, ka lielāks pārsteidzošu spēļu skaits nevar notikt. Apzīmēsim $N = 2k+1$, kur k ir naturāls, kā arī spēlētājus ar $a_1, a_2, \ldots, a_N$, kur a_1 apzīmē vislabāko spēlētāju rindā pirms turnīra, a_2 — otro labāko spēlētāju rindā pirms turnīra utt. Ar W_i apzīmēsim a_i turnīrā gūto uzvaru skaitu.

Novērtēsim to spēļu skaitu, kas nebija pārsteidzošas. Ievērosim, ka visas uzvaras, ko guva a_1, ir spēlēs, kas nav pārsteidzošas. Tātad ir vismaz W_1 nepārsteidzošu spēļu. Savās spēlēs a_2 varēja uzvarēt tikai vienā pārsteidzošā spēlē, kas būtu pret a_1, tādēļ ir vēl vismaz $W_2 - 1$ nepārsteidzošu spēļu. Šādu secinājumu var pielietot spēlētājiem līdz pat a_k, kurš uzvarēja vismaz $W_k - (k-1)$ nepārsteidzošās spēlēs. Tādēļ turnīrā notika vismaz

$$W_1 + (W_2 - 1) + \ldots + (W_k - (k-1)) = (W_1 + W_2 + \ldots + W_k) - \frac{(k-1)k}{2}$$

nepārsteidzošu spēļu.

Kopumā turnīrā gūto uzvaru skaits sakrīt ar spēļu skaitu, t.i., $\frac{N(N-1)}{2} = k(2k+1)$. Ievērosim, ka labākie k spēlētāji guva vismaz $\frac{k}{2k+1}$ no visām uzvarām. Pretējā gadījumā a_k kā sliktākais no *labo* grupas gūtu mazāk nekā $\frac{1}{2k+1}$ no uzvarām, kamēr sliktākie $k+1$ spēlētāji kopā gūtu vairāk nekā $\frac{k+1}{2k+1}$ no visām uzvarām, tātad a_{k+1} kā labākais no *slikto* grupas gūtu vairāk nekā $\frac{1}{2k+1}$ no uzvarām. Tas nozīmētu $W_k < W_{k+1}$, kas ir pretruna. Secinām, ka labāko k spēlētāju kopējais uzvaru skaits ir vismaz

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_k \geq k(2k+1) \cdot \frac{k}{2k+1} = k^2.$$

Tātad turnīrā notika vismaz $k^2 - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ nepārsteidzošu spēļu. Līdz ar to pārsteidzošu spēļu skaits nevar pārsniegt

$$k(2k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(3k+1)}{2} = \frac{\frac{(2k+1)-1}{2} \cdot \frac{(6k+3)-1}{2}}{2} = \frac{(N-1)(3N-1)}{8}.$$

Atliek pierādīt, ka šādu pārsteidzošu spēļu skaitu var sasniegt. Skaidrs, ka visām iepriekšējām nevienādībām jābūt vienādībām, kas dod konstrukciju: a_i uzvar spēlēs pret $a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_{i-k}$, kur $a_0 = a_N$, $a_{-1} = a_{N-1}$ utt. Visiem spēlētājiem tad ir vienāds uzvaru skaits, tāpēc tie būs nostādīti sākotnējā secībā. Tādā gadījumā $k+1$ sliktākie spēlētāji kopumā dos $k(k+1)$ pārsteidzošas uzvaras, kamēr labākie k spēlētāji dos kopumā $0 + 1 + \ldots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$ pārsteidzošas uzvaras. Viegli pārbaudīt, ka šie skaitļi summā dod uzdevuma atbildi.

6.uzdevums Alfrēds un Petrs spēlē spēli. Viņiem ir kāpnes ar 56 pakāpieniem. Alfrēds slepeni izvēlas vienu no pakāpieniem, un tad Petra uzdevums ir uzminēt izvēlēto pakāpienu noteiktā veidā — viņš sāk spēli kāpņu apakšā un tad kāpj augšup pa kāpnēm, līdz apstājas uz sevis izvēlēta pakāpiena. Ja šis pakāpiens ir Alfrēda izvēlētais, tad Petrs uzvar. Pretējā gadījumā Alfrēds pasaka, vai viņa izvēlētais pakāpiens ir augstāk vai zemāk. Tad Petrs atkal kāpj (uz augšu vai leju) uz sevis izvēlētu pakāpienu — ja tas ir Alfrēda izvēlētais, tad Petrs uzvar, ja ne, tad Alfrēds pasaka, vai viņa izvēlētais pakāpiens ir augstāk vai zemāk, un spēle šādi turpinās.
Petrs spēles laikā drīkst apstāties uz ne vairāk kā 6 pakāpieniem, kā arī viņš drīkst mainīt savu kāpšanas virzienu ne vairāk kā 3 reizes. Uz kuriem pakāpieniem (ja tādi ir) Petrs drīkst apstāties savā pirmajā gājienā, lai garantētu, ka, pareizi spēlējot, viņš uzvarēs (t.i., spēles laikā nostāsies uz Alfrēda izvēlētā pakāpiena)?

Atrisinājums. Petram savā pirmajā gājienā jānostājas uz 26. pakāpiena no lejas.

Vispārināsim spēli — ar a apzīmēsim, cik reizes Petrs drīkst apstāties uz pakāpieniem, un ar b apzīmēsim atļauto kāpšanas virziena maiņu skaitu. Tad $f(a,b)$ apzīmēs maksimālo pakāpienu skaitu, pie kuriem Petrs var garantēti uzvarēt ar attiecīgām mainīgo vērtībām. Ievērosim, ka $f(a,0)=a$, jo Petram jāapstājas uz katra pakāpiena, sākot ar apakšējo, jo virzienu nedrīkst mainīt, tādēļ nevar izlaist kādu pakāpienu. Kā arī ievērosim, ka $f(1,b)=1$, jo ir tikai viena iespējama apstāšanās, ar kuru noteikti jāuzvar. Pierādīsim, ka

$$f(a,b)=f(a-1,b)+f(a-1,b-1)+1,$$

kur $a>1$ un $b>0$. Ja Petrs kāpj augšup, apstājas uz pakāpiena un uzzina, ka Alfrēda izvēlētais pakāpiens ir augstāk, viņš var garantēti uzvarēt tikai tad, ja pakāpienu skaits augstāk nepārsniedz $f(a-1,b)$. Analoģiski, ja Petrs kāpj augšup, apstājas uz pakāpiena un uzzina, ka Alfrēda izvēlētais pakāpiens ir zemāk, viņš var garantēti uzvarēt tikai tad, ja pakāpienu skaits zemāk nepārsniedz $f(a-1,b-1)$, jo viņam būs jāmaina kāpšanas virziens. No tā var secināt, ka, lai Petrs noteikti uzvarētu, pakāpienu kopējais skaits nevar pārsniegt abu aplūkoto gadījumu summu plus vienu pakāpienu, uz kura Petrs sākotnēji apstājas (tas arī var būt uzminamais), jeb $f(a-1,b)+f(a-1,b-1)+1$. Analoģiskus secinājumus var veikt arī gadījumam, ja Petrs kāpj uz leju.

Tas nozīmē, ka iegūtā formula $f(a,b)=f(a-1,b)+f(a-1,b-1)+1$ ir patiesa. Kopā ar iegūtajām sakarībām $f(a,0)=a$ un $f(1,b)=1$ varam rekursīvi izrēķināt lielākas funkcijas vērtības. Sastādām tabulu:

$a \backslash b$	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	3	3	3
3	3	6	7	7
4		10	14	15
5			25	30

Kad Petrs pirmo reizi apstājas uz pakāpiena, viņam ir uzvaroša stratēģija, ja augstāk nav vairāk par $f(5,3)=30$ pakāpieniem, bet zemāk nav vairāk par $f(5,2)=25$ pakāpieniem. Tā kā kāpnēm kopumā ir 56 pakāpieni, tas var izpildīties tikai tādā gadījumā, ja savā pirmajā gājienā Petrs apstājas uz 26. pakāpiena no apakšas.

7.uzdevums Dots regulārs n-stūris, kas sadalīts $n-2$ trijstūros ar $n-3$ diagonālēm, kas n-stūra iekšienē savā starpā nekrustojas. Sadalījumu sauc par *divkrāsu*, ja tajā izkrāsots katrs no trijstūriem balts vai melns tā, ka jebkuri divi trijstūri, kam ir kopīga mala, ir dažādās krāsās. Sauksim naturālu skaitli $n \geqslant 4$ par *labi dalāmu*, ja regulāram n-stūrim eksistē divkrāsu sadalījums trijstūros, kam izpildās īpašība — no katras n-stūra virsotnes iziet vairāk melnu trijstūru nekā baltu. Noteikt visus labi dalāmus skaitļus.

Piezīme. Trijstūris iziet no n-stūra virsotnes, ja viena no trijstūra virsotnēm ir aplūkotā n-stūra virsotne.

Atrisinājums. Labi dalāmi ir visi naturāli $n \geq 6$, kas dalās ar 3.

Sākotnēji pierādīsim, ka citas n vērtības nav iespējamas. Ar T apzīmēsim starpību starp melno un balto trijstūru skaitu n-stūrī. Novērtēsim šo lielumu divos veidos:

- saskaitīsim melno trijstūru malas un atņemsim balto trijstūru malas. No nosacījumiem zināms, ka ikviena diagonāle n-stūrī ir mala vienam melnam un vienam baltam trijstūrim, jo katri divi blakusesoši trijstūri ir dažādās krāsās. Tātad diagonāles šo starpību neietekmē. Vienīgās trijstūru malas, kas nav ieskaitītas, ir n-stūra malas. Katra n-stūra mala ir viena mala vienam trijstūrim, līdz ar to melno trijstūru malas var būt maksimāli par n vairāk nekā balto trijstūru. Tā kā malu skaits ir 3 reizes lielāks par trijstūru skaitu, tad $T \leq \frac{n}{3}$.

- saskaitīsim melno trijstūru virsotnes un atņemsim balto trijstūru virsotnes. Visas trijstūru virsotnes ir n-stūra virsotnes, kurām zināms, ka ikviena n-stūra virsotne ir virsotne vairāk melnos trijstūros nekā baltos. Vēlamo starpību mēs varam iegūt, saskaitot katras virsotnes piedalīšanās reizes melnos trijstūros un atņemot piedalīšanās reizes baltos, pēc tam sasummējot pa visām n-stūra virsotnēm. Tā kā katrai virsotnei šī lokālā starpība ir vismaz 1, tad kopējais iegūtais lielums starpībai būs vismaz n. Tā kā virsotņu skaits ir 3 reizes lielāks par trijstūru skaitu, tad $T \geq \frac{n}{3}$.

Varam secināt, ka $\frac{n}{3} \leq T \leq \frac{n}{3} \implies T = \frac{n}{3}$. Tā kā trijstūru skaita starpība ir vesels skaitlis, tad arī $\frac{n}{3}$ jābūt veselam. Tas iespējams tikai tad, ja $3 \mid n$. Tātad citi naturāli n nav labi dalāmi.

Pierādīsim, ka jebkurš $n \geq 4$, kas dalās ar 3, ir labi dalāms. Apzīmēsim $n = 3m$ un sanumurēsim n-stūra virsotnes $V_1, V_2, \ldots, V_{3m}$. Konstruēsim derīgu n-stūra piemēru katram naturālam $m \geq 2$ ar indukcijas palīdzību. Bāzes gadījums, kad $n = 6$, ir vienkāršs — savieno diagonāles V_1V_3, V_3V_5 un V_5V_1 un izkrāso trijstūri $V_1V_3V_5$ baltu, pārējos trijstūrus $V_1V_2V_3$, $V_3V_4V_5$ un $V_5V_6V_1$ izkrāsojot melnus. Viegli pārliecināties, ka šāds regulāra sešstūra sadalījums un krāsojums apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

Induktīvajā pārejā pieņemsim, ka eksistē labs sadalījums pie $n = 3m$ un parādīsim, kā to iegūt pie $n = 3(m+1)$. Aplūkojam regulāru $3(m+1)$-stūri. Novelkam diagonāli V_1V_{3m} un daļā ar virsotnēm $V_1, V_2, \ldots, V_{3m-1}, V_{3m}$ savienojam un izkrāsojam visus trijstūrus tāpat kā regulārā $3m$-stūrī. Skaidrs, ka visām virsotnēm, izņemot V_1 un V_{3m}, prasītais joprojām izpildīsies un krāsojums būs derīgs. Tālāk savienojam diagonāles V_1V_{3m+2} un $V_{3m}V_{3m+2}$ un izkrāsojam trijstūrus — $V_1V_{3m}V_{3m+2}$ baltu, $V_1V_{3m+3}V_{3m+2}$ un $V_{3m}V_{3m+1}V_{3m+2}$ melnus. Ievērosim, ka arī visām šīm nosauktajām virsotnēm izpildīsies nepieciešamais nosacījums par izejošo trijstūru krāsām (V_1 un V_{3m} izejošo trijstūru krāsu starpība netika ietekmēta, un tā jau pieņēmumā izpildīja nosacījumu).

Atliek tikai pārbaudīt, ka jaunajām diagonālēm izpildās krāsojuma īpašība. V_1V_{3m+2} un $V_{3m}V_{3m+2}$ tā acīmredzami izpildās. Ievērosim, ka pārejas laikā visi jaunaplūkotie trijstūri, kas satur n-stūra malas, tika nokrāsoti melni. Šī īpašība izpildās arī bāzes gadījumam. Tas nozīmē, ka šī īpašība piemīt arī visiem iegūtajiem dalījumiem, tādēļ $3m$-stūrī mala V_1V_{3m} ir daļa no melna trijstūra. $3(m+1)$-stūrī šī mala kļuva par diagonāli un no otras puses tai tika nokrāsots trijstūris balts, tādēļ arī tai izpildās krāsojuma īpašība. Tātad iegūtajā konstrukcijā visi uzdevuma nosacījumi izpildās, kas pierāda, ka visi $n \geq 4$, kas dalās ar 3, ir labi dalāmi.

8.uzdevums Polārijas valstī 7 policisti ķer zagli, kas pārvietojas starp pilsētām. Divas pilsētas tiek sauktas par *kaimiņiem*, ja tās savieno tieša divvirzienu dzelzceļa līnija. Gan policisti, gan zaglis pārvietojas starp pilsētām, izmantojot dzelzceļa līnijas. Katru dienu vispirms policisti vienlaicīgi veic vienu savu gājienu, un pēc tam zaglis veic vienu savu gājienu. Policists savā gājienā var izvēlēties palikt pilsētā, kurā viņš šobrīd atrodas, vai aizbraukt uz kādu no kaimiņu pilsētām. Kad policisti ir veikuši savu gājienu, zaglis var savā gājienā aizbraukt uz kādu no kaimiņu pilsētām, ja tajā tobrīd neatrodas neviens policists, vai arī palikt savā pašreizējā pilsētā, ja tajā neatrodas neviens policists (jāievēro, ka policista iebraukšana pilsētā, kurā tobrīd atrodas zaglis, vēl nenozīmē, ka zaglis ir noķerts un process apstājas). Gan policisti, gan zaglis visu laiku zina visu cilvēku atrašanās vietu, kā arī policisti savā starpā sadarbojas. Zaglis ir *ielenkts*, ja viņš savā gājienā nevar aizbraukt uz nevienu no kaimiņu pilsētām.
Vai ir iespējams, ka Polārijā eksistē tāds pilsētu un dzelzceļa līniju izkārtojums, ka

- ikvienai pilsētai ir tieši 7 kaimiņi;
- nav iespējams aizbraukt no pilsētas un tajā atgriezties, izmantojot mazāk nekā 7 dažādas dzelzceļa līnijas, izņemot gadījumus, kad braucējs nolemj braukt pretējā virzienā pa kādu no aizbraukšanai izmantotajām dzelzceļa līnijām;
- neatkarīgi no tā, kurā pilsētā ir zaglis un no kurām pilsētām policisti uzsāk ķeršanu, policisti vienmēr var panākt, ka pēc galīga dienu skaita zaglis tiek ielenkts?

Atrisinājums. Atbilde ir nē.

Pārrakstīsim uzdevumu grafu valodā, kur pilsētas ir grafa virsotnes un ceļi starp virsotnēm ir šķautnes. Ievērosim, ka 1.nosacījums nozīmē, ka ikvienas virsotnes pakāpe ir 7, bet 2.nosacījums nozīmē, ka īsākā cikla garums grafā nav mazāks kā 7. Pierādīsim, ka zaglim eksistē gājienu stratēģija, lai pēc nākamā policistu gājiena viņš nebūtu ielenkts. To veidos divas daļas: 1) izvēlēties labu virsotni sākumā; 2) izvēlēties labu gājienu katru reizi.

Sākumā aprakstīsim otro daļu jeb kā izvēlēties labu gājienu. Pieņemsim, ka zaglis atrodas virsotnē R, un ar $\{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ apzīmēsim R kaimiņus. Katram $1 \leq i \leq 7$ ar S_i apzīmēsim tās 6 virsotnes, kas ir pārējie x_i kaimiņi bez R. Ar T_i apzīmēsim tās virsotnes, kas ir S_i kaimiņi, neieskaitot x_i. Tā kā grafā īsākā cikla garums ir vismaz 7, tad varam iegūt katriem $i, j \in \{1, 2, \ldots, 7\}$:

1. $x_j \notin S_i \cup T_i$ (pretējā gadījumā caur R ietu cikls ar garumu 3 vai 4);
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ (pretējā gadījumā caur R ietu cikls ar garumu 4);
3. $S_i \cap T_j = \emptyset$ (pretējā gadījumā caur R ietu cikls ar garumu 5);
4. $T_i \cap T_j = \emptyset$ (pretējā gadījumā caur R ietu cikls ar garumu 6).

Kopumā var secināt, ka $S_i \cap T_i$ nesatur nevienu virsotni no $\{x_j\} \cap S_j \cap T_j$, ja $i \neq j$.

Aplūkosim trīs gadījumus. Pirmais, pieņemsim, ka ir kāds R kaimiņš, piemēram, x_1, kuram nevienā no kaimiņiem (kopa $S_1 \cup \{R\}$), kā arī pašā x_1 neatrodas policists. Šajā gadījumā zaglis paliek uz vietas R (ievērosim, ka R šajā brīdī nav policistu). Nākamajā gājienā neviens policists nevar nonākt x_1, tādēļ zaglis nebūs ielenkts.

Otrais, pieņemsim, ka ikvienam $1 \leq i \leq 7$ kopā $S_i \cup \{x_i\}$ atrodas policisti, bet R nav policistu. Tā kā $S_i \cup \{x_i\}$ un $S_j \cup \{x_j\}$ nav kopīgu virsotņu, ja $i \neq j$, tad katrā kopā $S_i \cup \{x_i\}$ ir tieši viens policists. Varam arī ievērot, ka neviena no kopām T_i tad nesatur policistus. Tā kā zaglis šobrīd nav ielenkts, tad vienā no R kaimiņiem nav policista, pieņemsim, ka tas ir x_1. Tas nozīmē, ka virsotnē $s \in S_1$ atrodas policists. Tā kā x_1 ir vēl 5 kaimiņi bez s un R, aplūkojam vienu no tiem, apzīmējot s'. Tā kā s' kaimiņi ir x_1 un daļa no T_1 (neviens kaimiņš nav no S_1, jo tad būtu cikls ar garumu 3 caur x_1), nevienā no tiem nav policista. Tādēļ zaglis savā gājienā var pāriet uz x_1, un iegūtais nozīmē, ka nākamajā gājienā neviens policists nevarēs aiziet uz s', tāpēc zaglis nebūs ielenkts.

Trešais, pieņemsim, ka policists pārvietojas uz R. Tā kā zaglis šobrīd nav ielenkts, vismaz vienā no R kaimiņiem, piemēram, x_1, nav policistu. Zaglis nevar pāriet uz x_1 tikai tad, ja viņš tiks ielenkts nākamajā policistu gājienā. Tā kā neviens R kaimiņš nepieder S_1 (citādi būtu cikls ar garumu 3), tad zagli var ielenkt x_1 tikai tad, ja pārējie 6 policisti varēs pāriet uz S_1, t.i., tie visi atrodas $S_1 \cap T_1$. Taču tādā gadījumā $\{x_2\} \cap S_2 \cap T_2$ nesatur nevienu policistu, tāpēc šajā gadījumā zaglis var doties uz x_2 un netikt ielenkts. Līdz ar to zaglis var no situācijas iet uz x_1 vai x_2 un netikt ielenkts nākamajā gājienā.

Esam pierādījuši, ka zaglis var vienmēr veikt labu gājienu, ja viņš nav bijis ielenkts pirms tam. Atliek pierādīt, ka zaglis var izvēlēties labu virsotni sākumā, lai netiktu ielenkts pēc pirmā policistu gājiena. Pieņemsim, ka tāda virsotne neeksistē. Tādā gadījumā katrs policists atrodas ne tālāk kā 2 šķautņu attālumā no katras virsotnes, kurā nav policista (citādi nebūtu iespējams kādam policistam nonākt kaimiņu virsotnē pirmajā gājienā, tādēļ zaglis nebūtu ielenkts). Skaidrs, ka eksistē virsotne R, kurai ir kāds kaimiņš, kurā nav policista — pretējā gadījumā grafā būtu cikls ar garumu 3 vai 4.

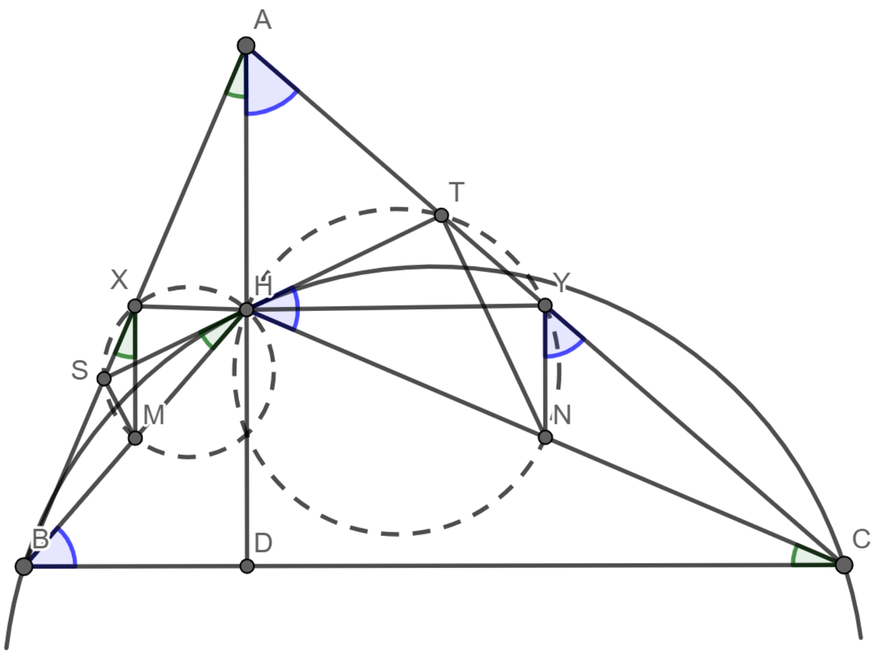
Zaglis spēli uzsāk virsotnē R, kura nav ielenkta jau spēles sākumā. Ar C apzīmēsim virsotni, kurā ir policists un kura nav R kaimiņš. Ar x apzīmēsim C un R kopīgo kaimiņu. Tā kā īsākā cikla garums ir vismaz 7, tad x ir vienīgais kopīgais kaimiņš C un R. No pieņēmuma policisti varēs ielenkt R savā pirmajā gājienā, tāpēc eksistē virsotne $C' \neq C$, kurā ir policists. Papildus tam virsotnē x nevar atrasties policists, jo policisti no C un x nevar sasniegt citus R kaimiņus pirmajā gājienā (pretējā gadījumā grafā būtu cikls ar garumu 3 vai 4). No pieņēmuma izriet, ka C' jābūt kaimiņam x vai attālumā 2 no x (jo zaglis varēja uzsākt spēli arī tur), kā arī jābūt kaimiņam R vai attālumā 2 no R. Tā kā x un R ir kaimiņi, tas nozīmē, ka grafā eksistē cikls, kurš nav garāks par 5, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un laba virsotne, ko zaglim izvēlēties sākumā, eksistē.

9.uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā novilkts augstums AD (punkts D atrodas uz malas BC). Ar H apzīmēts ABC augstumu krustpunkts, pie tam zināms, ka $AH = HD$. Ar ℓ apzīmēsim taisni, kura iet caur punktu H un pieskaras trijstūra BHC apvilktajai riņķa līnijai. Punkti S un T ir taisnes ℓ krustpunkti attiecīgi ar malām AB un AC. Nogriežņu BH un CH viduspunktus apzīmēsim attiecīgi ar punktiem M un N. Pierādīt, ka taisnes SM un TN ir paralēlas.

1.atrisinājums Ar X un Y apzīmēsim attiecīgi nogriežņu AB un AC viduspunktus. Ievērosim, ka XM ir viduslīnija trijstūrī ABH, tāpēc $XM \parallel AD$, savukārt XH ir viduslīnija trijstūrī ABD, tāpēc $XH \parallel BC$. Tā kā $AD \perp BC$, tad $XM \perp BC$, bet $XH \parallel BC$, tāpēc $XH \perp XM$ jeb $\angle MXH = 90°$.

Ievērosim, ka $\angle SHB = \angle HCB$ kā pieskares leņķis. Atzīmēsim, ka $\angle HCB = \angle BAH = 90° - \angle ABC$, jo punkts H ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts. Piedevām $XM \parallel AD$, tāpēc $\angle BAH = \angle BXM$. Secinām, $\angle BXM = \angle SHB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $XSMH$ var apvilkt riņķa līniju. Tādā gadījumā $\angle MXH = \angle MSH = 90°$.

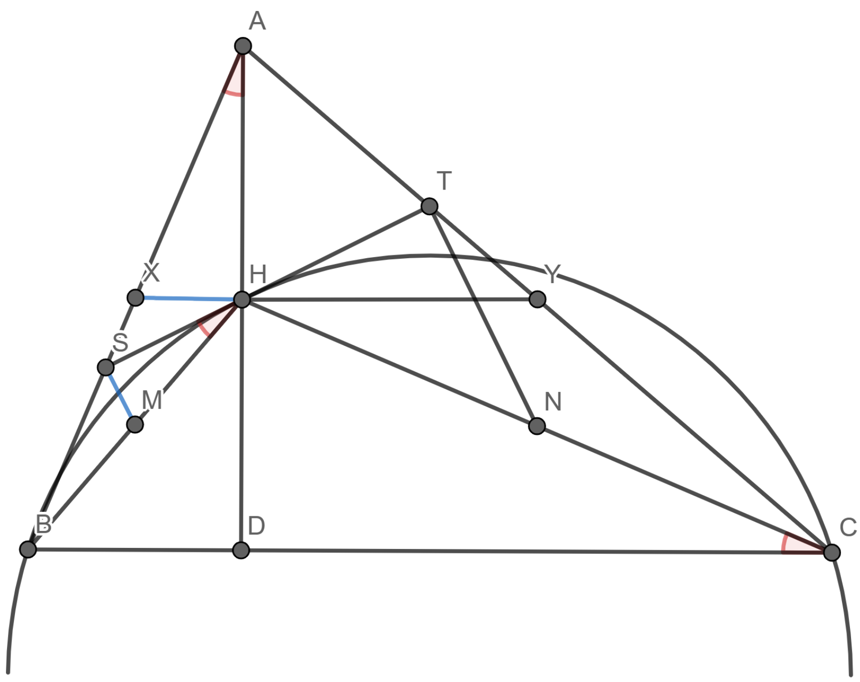
Analoģiski varam pierādīt, ka $\angle NTH = 90°$. Tas nozīmē, ka $SM \parallel TN$, kas arī bija jāpierāda.



2.atrisinājums Līdzīgi kā 1.risinājumā ar X un Y apzīmēsim attiecīgi nogriežņu AB un AC viduspunktus un ievērosim, ka $XH \perp AD$ un X, H, Y visi atrodas uz $\triangle ABC$ viduslīnijas. Papildus tam zināms, ka $\angle SHB = \angle HCB$ kā pieskares leņķis, bet $\angle HCB = \angle BAH = 90° - \angle ABC$, jo punkts H ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts.

Varam secināt, ka $\triangle BAH \sim \triangle BHS$ pēc pazīmes *ll*, jo $\angle SHB = \angle HCB = \angle BAH$ un $\angle HBA$ ir kopīgs leņķis. Ievērosim, ka SM ir mediāna trijstūrī BHS, un HX ir mediāna trijstūrī BAH. Tā kā līdzīgos trijstūros leņķi pie attiecīgajiem elementiem ir vienādi, tad $\angle MSH = \angle AHX$ kā leņķi pie attiecīgajām mediānām. Iepriekš ieguvām, ka $XH \perp AD$, tātad $\angle AHX = 90° = \angle MSH$.

Analoģiski var pierādīt, ka $\angle NTH = 90°$. Tas nozīmē, ka gan taisne SM, gan taisne TN ir perpendikulāra taisnei ST, tātad tās ir paralēlas.



10.uzdevums Dots dažādmalu trijstūris ABC. Punkti A_1, B_1, C_1 ir viduspunkti attiecīgi ABC apvilktās riņķa līnijas lokiem BC, CA, AB, kas nesatur attiecīgi punktus A, B, C. Punkti A_2, B_2, C_2 ir izvēlēti tā, ka četrstūri $AB_1A_2C_1, BA_1B_2C_1$ un $CA_1C_2B_1$ ir paralelogrami. Pierādīt, ka trijstūriem $A_2B_2C_2$ un ABC sakrīt apvilkto riņķa līniju centri.

1.atrisinājums Sākotnēji pierādīsim lemmu.

Lemma. Trijstūra virsotni simetriski attēlojot pār tai blakus esošo apvilktās riņķa līnijas loku viduspunktus savienojošo nogriezni, iegūst trijstūra ievilktās riņķa līnijas centru.

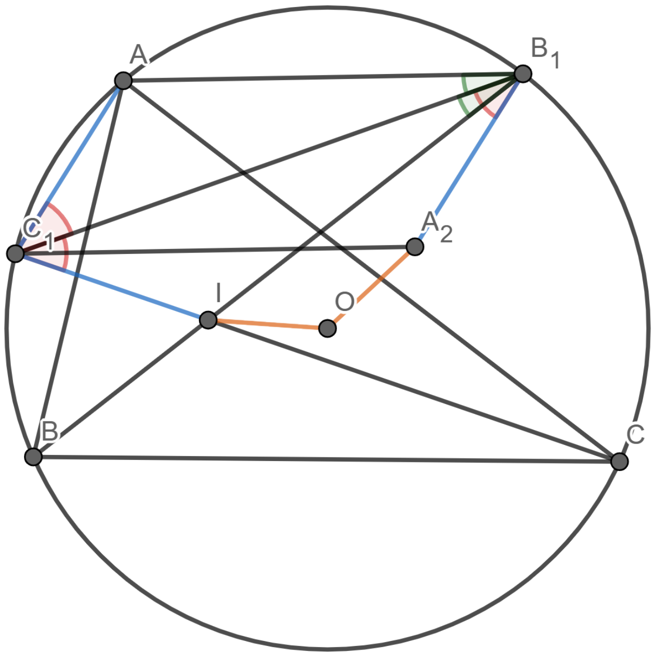
Pierādījums. Izmantojot šī uzdevuma apzīmējumus, aplūkosim virsotni A, tai blakus esošo loku viduspunktus B_1 un C_1, kā arī ar I apzīmēsim trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centru. Ievērosim, ka punktu trijnieki B, I, B_1 un C, I, C_1 katrs ir kolineārs, jo trijstūra bisektrise iet caur pretējā loka viduspunktu. Tātad $\angle B_1C_1A = \angle B_1C_1I = \frac{1}{2}\angle ABC$ un $\angle C_1B_1A = \angle C_1B_1I = \frac{1}{2}\angle ACB$, jo B_1 un C_1 ir loku viduspunkti. Tas nozīmē, ka $\triangle AB_1C_1 = \triangle IB_1C_1$ pēc pazīmes *lml*, jo B_1C_1 ir šo trijstūru kopīgā mala. No tā acīmredzami var secināt, ka A simetriskais punkts attiecībā pret B_1C_1 ir I, kas pierāda lemmu.

Tā kā punkts I ir virsotnes A simetriskais attēlojums pār nogriezni B_1C_1, bet $AB_1A_2C_1$ ir paralelograms, tātad A_2 ir virsotnes A simetriskais attēlojums pāri nogriežņa B_1C_1 viduspunktam, viegli var ievērot, ka punkti I un A_2 ir simetriski pret nogriežņa B_1C_1 vidusperpendikulu.

Formāli to var pierādīt ļoti dažādos veidos, piemēram, šādi. No iepriekš iegūtā zināms, ka $IC_1 = AC_1$ un $\angle IC_1B_1 = \angle AC_1B_1$, jo $\triangle AB_1C_1 = \triangle IB_1C_1$. Tā kā $AB_1A_2C_1$ ir paralelograms, tad $A_2B_1 = AC_1$ un $\angle A_2B_1C_1 = \angle AC_1B_1$. Tas nozīmē, ka $IC_1 = AC_1 = A_2B_1$ un $\angle IC_1B_1 = \angle AC_1B_1 = \angle A_2B_1C_1$, no kā acīmredzami, ka punktu I un A_2 attālums līdz B_1C_1 ir vienāds un $IC_1B_1A_2$ ir vienādsānu trapece. Bet vienādsānu trapecē labi zināms, ka tā ir simetriska pret pamatu vidusperpendikulu.

Tātad I un A_2 ir simetriski pret nogriežņa B_1C_1 vidusperpendikulu. Ievērosim, ka B_1C_1 ir horda trijstūrim ABC apvilktajā riņķa līnijā, līdz ar to šī nogriežņa vidusperpendikuls iet caur ABC apvilktās riņķa līnijas centru, ko apzīmēsim ar O. Taču šis vidusperpendikuls ir arī nogriežņa IA_2 vidusperpendikuls iegūtās simetrijas dēļ. Tā kā O uz tā atrodas, tad $OI = OA_2$.

Līdzīgus secinājumus varam veikt arī virsotnēm B un C. To simetriskie attēlojumi pār loku viduspunktus savienojošajiem nogriežņiem pēc lemmas arī būs punkts I, tādēļ iegūsim, ka $OI = OA_2 = OB_2 = OC_2$. Tas nozīmē, ka A_2, B_2, C_2 atrodas uz riņķa līnijas ar centru O un rādiusu OI, kas pierāda prasīto.



2.atrisinājums Izmantosim kompleksos skaitļus attiecībā pret trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju, kura būs vienības riņķa līnija. Pieņemsim, ka $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$, tādā gadījumā $A_1 = -bc$, $B_1 = -ca$ un $C_1 = -ab$. Ja O ir ABC apvilktās riņķa līnijas centrs, tad $O = 0$.

Izrēķināsim punktu A_2, B_2, C_2 koordinātas. Tā kā $AB_1A_2C_1$ ir paralelograms, tad secinām, ka:

$$\begin{gathered} A + A_2 = B_1 + C_1 \\ a^2 + A_2 = -ac - ab \\ A_2 = -a(a+b+c) \end{gathered}$$

Analoģiski varam iegūt, ka $B_2 = -b(a+b+c)$ un $C_2 = -c(a+b+c)$. Izrēķināsim $|OA_2|^2$. Tas ir vienāds ar:

$$\begin{gathered} |OA_2^2|^2 = (O - A_2)(\overline{O} - \overline{A_2}) = \\ = (0 + a(a+b+c))(0 + \overline{a(a+b+c)}) = \\ = (a(a+b+c))\left(\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right) = \\ = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \end{gathered}$$

Analoģiski varam iegūt, ka:

$$|OB_2|^2 = |OC_2|^2 = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Tas nozīmē, ka $OA_2 = OB_2 = OC_2$ kas nozīmē, ka punkts O ir trijstūra $A_2B_2C_2$ apvilktās riņķa līnijas centrs.

11.uzdevums Dažādmalu trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Malu AB un AC vidusperpendikuli krusto augstumu, kas vilkts no virsotnes A pret malu BC, attiecīgi punktos P un Q. Punkts S ir trijstūra OPQ apvilktās riņķa līnijas centrs, savukārt punkts M ir malas BC viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle BAS = \angle CAM$.

1.atrisinājums Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $AB < AC$. Ievērosim, ka $\angle BAP = 90° - \angle ABC$. Tā kā punkts O ir apvilktās riņķa līnijas centrs, tad $AO = OC$ un $\angle AOC = 2\angle ABC$, no kā izriet, ka $\angle OAC = 90° - \angle ABC$. Līdz ar to $\angle BAP = \angle CAO$. Ievērosim, ka:

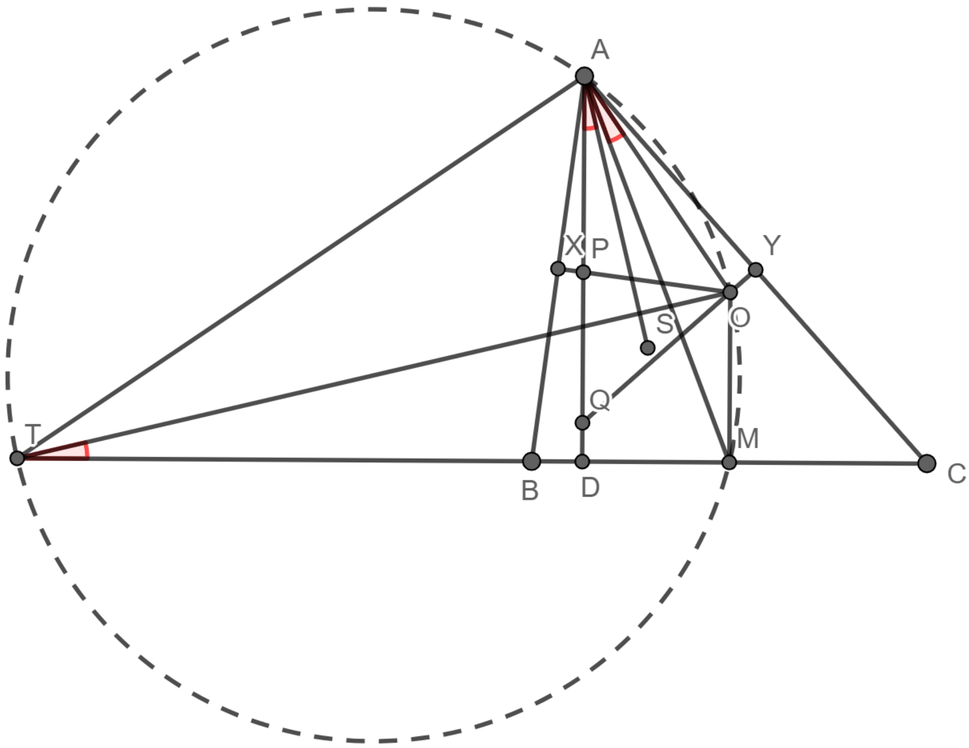
$$\angle BAS = \angle BAP + \angle PAS \quad \text{un} \quad \angle CAM = \angle CAO + \angle OAM$$

Tas nozīmē, ka mums ir pietiekami pierādīt, ka $\angle OAM = \angle PAS$.

Pieņemsim, ka trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā A krusto nogriezni BC punktā T. Tādā gadījumā $\angle OAT = \angle OMT = 90°$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ATMO$ var apvilkt riņķa līniju. Līdz ar to $\angle OAM = \angle OTM$, tāpēc mums ir pietiekami pierādīt, ka $\angle OTM = \angle PAS$.

Ar X un Y apzīmēsim nogriežņu AB un AC viduspunktus, tādā gadījumā $\angle AXO = 90° = \angle AYO = 90°$. Ievērosim, ka $\angle BAP = 90° - \angle ABC$, kas nozīmē, ka $\angle XPA = \angle OPQ = \angle ABC$. Atzīmēsim, ka $\angle QAC = 90° - \angle ACB$, tāpēc $\angle OQP = \angle ACB$. Tas nozīmē, ka $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$ pēc diviem vienādiem leņķiem.

Ievērosim, ka $\angle XOA = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB = \angle OQP$, kas nozīmē, ka OA ir trijstūra OPQ apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā O. Taču tādā gadījumā $\angle PAS = \angle OTM$ kā leņķi starp atbilstošajiem elementiem līdzīgos trijstūros ABC un OPQ. Prasītais ir pierādīts.



2.atrisinājums Līdzīgi kā 1.atrisinājumā ar X un Y apzīmēsim attiecīgi malu AB un AC viduspunktus. Papildus ieviesīsim nogriežņa QP viduspunktu N. No jau 1.risinājumā iegūtā zināms, ka $\angle BAP = \angle CAO = 90° - \angle ABC$. Zināms arī, ka $\angle XPA = \angle OPQ = \angle ABC = 90° - \angle BAD$ un $\angle OQP = \angle ACB = 90° - \angle QAC$, tādēļ $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$ pēc pazīmes *ll*.

Līdzīgos trijstūros leņķi pie atbilstošajiem elementiem ir vienādi, tādēļ $\angle QON = \angle CAM$ un $\angle QOS = \angle CAO$ kā leņķi pie atbilstošajām mediānām un rādiusiem trijstūros OPQ un ABC. Atcerēsimies, ka $\angle BAP = \angle CAO = \angle QOS$. Izsakot leņķus

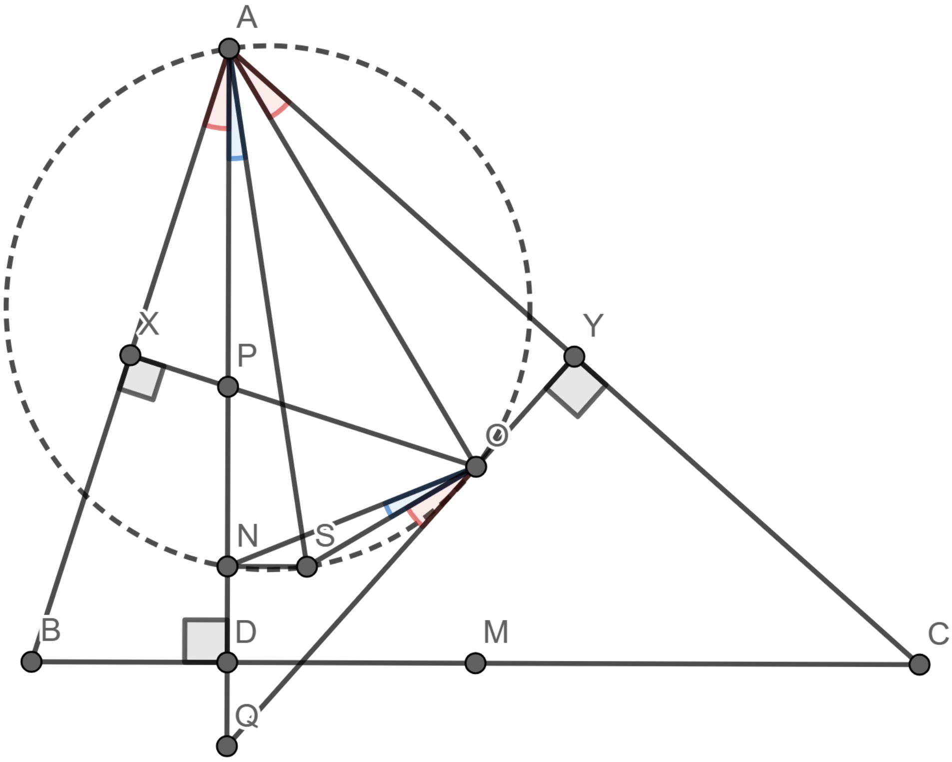
$$\angle CAM = \angle QON = \angle QOS + \angle SON \quad \text{un} \quad \angle BAS = \angle BAP + \angle PAS,$$

redzams, ka atliek pierādīt $\angle SON = \angle PAS$, lai izpildītos prasītā vienādība.

Pierādīsim, ka četrstūrim $AOSN$ var apvilkt riņķa līniju. Trijstūrī OPQ malas QP vidusperpendikuls ir SN no punktu definīcijas, tādēļ $\angle SNP = \angle SNA = 90°$. No $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$ varam iegūt, ka $\angle XAO = \angle BAO = \angle POS$ kā leņķi pie atbilstošajiem rādiusiem. Ievērojam, ka

$$\angle AOS = \angle POS + \angle AOX = \angle XAO + \angle AOX = 90°.$$

Tātad $\angle SNA + \angle AOS = 90° + 90° = 180°$, kas nozīmē, ka A, O, S, N atrodas uz vienas riņķa līnijas. Bet šajā riņķa līnijā $\angle PAS = \angle NAS = \angle SON$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku, tātad esam ieguvuši vēlamo un prasītais ir pierādīts.



12.uzdevums Trijstūra ABC malas BC viduspunkts ir punkts M. Leņķa BAC iekšējā bisektrise krusto malu BC punktā K un trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā $L \neq A$. Ar Ω apzīmēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir BC. Pierādīt, ka, ja leņķa BAC ārējā bisektrise pieskaras Ω, tad trijstūrim KML apvilktā riņķa līnija arī pieskaras Ω.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka leņķa BAC ārējā bisektrise pieskaras riņķa līnijai Ω punktā X. Ar punktu T apzīmēsim taišņu XA un BC krustpunktu. Atcerēsimies, ka blakusleņķu bisektrises ir perpendikulāras, tāpēc $\angle KAX = 90°$. Tā kā $\angle KAX = 90° = \angle TAK$ un $\angle BAK = \angle CAK$, tad secinām, ka $(T, K; B, C) = -1$. Tā kā punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts, no projektīvās ģeometrijas faktiem izriet, ka:

$$TB \cdot TC = TK \cdot TM$$

Tā kā TX ir Ω pieskare, tad secinām, ka:

$$TB \cdot TC = TX^2$$

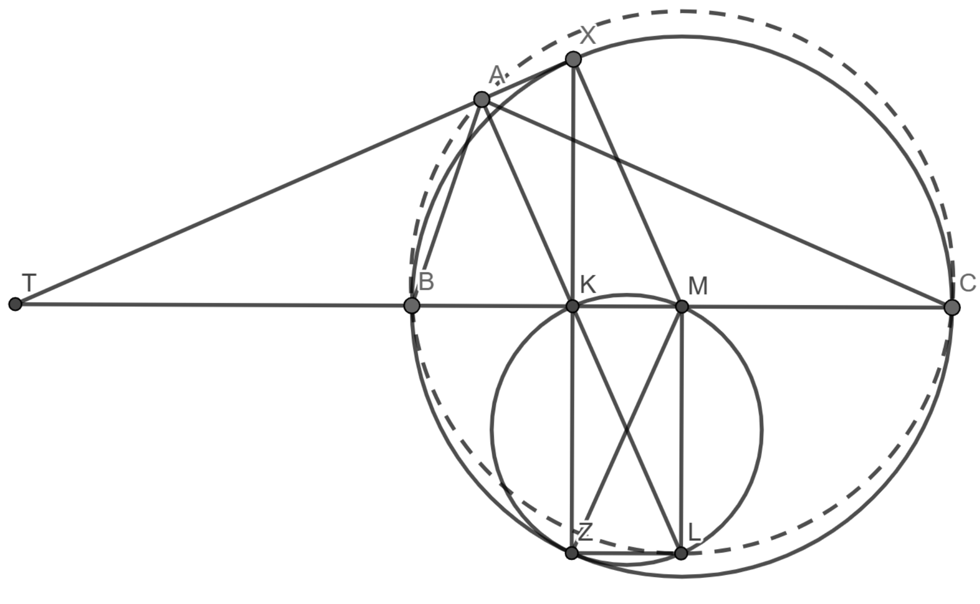
Esam ieguvuši, ka $TX^2 = TK \cdot TM$, kas nozīmē, ka TA ir trijstūra XKM apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā X. Līdz ar to $\angle TXK = \angle TMX$. Ievērosim, ka $MX \perp XT$ kā rādiuss pret pieskari riņķa līnijā Ω (punkts M ir Ω centrs), tāpēc $\angle TXM = 90°$. Tādā gadījumā:

$$\angle TKX = 180° - \angle XTM - \angle TXK = 180° - \angle XTM - \angle TMX = \angle TXM = 90°$$

Secinām, ka $XK \perp BC$. Pieņemsim, ka XK krusto Ω punktā Z. Ievērosim, ka $XK \parallel ML$, jo abas taisnes ir perpendikulāras BC un $KL \parallel XM$, jo abas taisnes ir perpendikulāras AX. Tas nozīmē, ka četrstūris $XKLM$ ir paralelograms, līdz ar to varam iegūt, ka:

$$\angle KXM = \angle KLM = \angle KZM,$$

kur tika izmantots, ka $MX = MZ$ kā rādiusi Ω. Secinām, ka ap četrstūri $KMLZ$ var apvilkt riņķa līniju. Piedevā šim četrstūrim $\angle ZKM = \angle KML = 90°$, kas nozīmē, ka tas ir taisnstūris. No tā varam secināt, ka ap četrstūri $KMLZ$ apvilktās riņķa līnijas centrs ir taišņu KL un ZM krustpunkts. Tādā gadījumā M, Z un šis centrs atrodas uz vienas taisnes, kas nozīmē, ka Ω un trijstūrim KML apvilktajai riņķa līnijai ir kopīga pieskare punktā Z (perpendikulāra MZ), tādēļ šīs riņķa līnijas šajā punktā pieskaras, kas arī bija jāpierāda.



13.uzdevums Ar $P(x)$ apzīmēsim skaitļa x lielāko pirmreizinātāju. Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis $n > 2^{2023}$ ar īpašību, ka visi skaitļi $P(n-1), P(n), P(n+1)$ ir mazāki nekā $\sqrt{n}$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka, ja $n = xy$, tad $P(n) = \max(P(x), P(y))$. Aplūkosim $n = 4a^4$. Acīmredzami, ka $P(4a^4) < 2a^2$.

$$4a^4 - 1 = (2a^2 - 1)(2a^2 + 1)$$
$$4a^4 + 1 = 4a^4 + 1 + 4a^2 - 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 = (2a^2 + 1 - 2a)(2a^2 + 1 + 2a)$$

Acīmredzami, ka skaitļa $2a^2 - 1$ lielākais pirmreizinātājs ir mazāks par $2a^2$. Ja $a \equiv 1 \pmod 3$, tad $2a^2+1 \equiv 2+1 \equiv 0 \pmod 3$, kas nozīmē, ka $3 \mid 2a^2+1$. Tādā gadījumā skaitļa $2a^2+1$ lielākais pirmreizinātājs ir ne lielāks par $\frac{2a^2+1}{3}$. Taču pietiekami lieliem a ir spēkā, ka $\frac{2a^2+1}{3} < 2a^2$, kas nozīmē, ka skaitļa $4a^4 - 1$ lielākais pirmreizinātājs ir mazāks par $2a^2$.

Acīmredzami, ka $2a^2 + 1 - 2a < 2a^2$, līdz ar to šī skaitļa pirmreizinātājs ir mazāks par $2a^2$. Ja $a \equiv 1 \pmod 5$, tad $2a^2+2a+1 \equiv 2+2+1 \equiv 0 \pmod 5$, kas nozīmē, ka $5 \mid 2a^2+2a+1$. Tādā gadījumā skaitļa $2a^2+2a+1$ lielākais pirmreizinātājs ir ne lielāks par $\frac{2a^2+2a+1}{5}$. Taču pietiekami lieliem a ir spēkā, ka $\frac{2a^2+2a+1}{5} < 2a^2$, kas nozīmē, ka skaitļa $4a^4 + 1$ lielākais pirmreizinātājs ir mazāks par $2a^2$.

Līdz ar to pietiekami lieliem a, kuriem izpildās $a \equiv 1 \pmod 3$ un $a \equiv 1 \pmod 5$, izpildās uzdevumā prasītais. Tātad mēs varam paņemt $n = 4a^4$, kur $a \equiv 1 \pmod{15}$ un $a > 2^{2023}$, kas apmierinās uzdevuma nosacījumus.

14.uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka $a > b$. Zināms, ka LKD$(a-b, ab+1) =$ LKD$(a+b, ab-1) = 1$. Pierādīt, ka skaitlis $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ nav vesela skaitļa kvadrāts.

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$(a-b)^2 + (ab+1)^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (a^2+1)(b^2+1)$$

Pierādīsim, ka skaitļu a^2+1 un b^2+1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Pieņemsim, ka tas tā nav, tad eksistē kaut kāds pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid a^2+1$ un $p \mid b^2+1$. Ievērosim, ka tādā gadījumā:

$$p \mid a^2 + 1 - (b^2+1) = (a-b)(a+b)$$

Ja $p \mid a-b$, tad $a \equiv b \pmod{p}$, kas nozīmē, ka $0 \equiv a^2+1 \equiv ab+1 \pmod{p}$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $p \mid a-b$ un $p \mid ab+1$, kas nozīmē, ka skaitļu $a-b$ un $ab+1$ lielākais kopīgais dalītājs nav 1 - pretruna.

Ja $p \mid a+b$, tad $a \equiv -b \pmod{p}$, kas nozīmē $0 \equiv a^2+1 \equiv -ab+1 \pmod{p}$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $p \mid a+b$ un $p \mid ab-1$, kas nozīmē, ka skaitļu $a+b$ un $ab-1$ lielākais kopīgais dalītājs nav 1 - pretruna.

Secinām, ka skaitļu a^2+1 un b^2+1 lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Pieņemsim, ka $(a^2+1)(b^2+1)$ ir vesela skaitļa kvadrāts. Tā kā skaitļi a^2+1 un b^2+1 ir savstarpēji pirmskaitļi un $a, b \geq 1$, tad gan a^2+1, gan b^2+1 ir jābūt naturāla skaitļa kvadrātam. Taču neeksistē 2 naturālu skaitļu kvadrāti, kas viens no otras atšķirtos par 1, tādēļ abi minētie skaitļi nevar būt naturālu skaitļu kvadrāti. Tas nozīmē, ka mūsu pieņēmums ir aplams, tāpēc $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ nav vesela skaitļa kvadrāts.

15.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļus pārus (a, p), kur p ir pirmskaitlis un kam izpildās īpašība — visiem naturāliem skaitļiem m un n, dalot skaitli a^{2^m} ar p^m, iegūst tādu pašu nenulles atlikumu, kā dalot skaitli a^{2^n} ar p^n.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka a^2, dalot ar p, un a^4, dalot ar p^2, dod atlikumu r. Varam rakstīt, ka $a^2 = px + r$ un $a^4 = p^2y + r$, kur x un y ir naturāli skaitļi. Ievērosim, ka:

$$(px + r)^2 = a^4 = p^2y + r$$
$$p^2x^2 + 2prx + r^2 = p^2y + r$$
$$r^2 \equiv r \pmod p$$

Tas nozīmē, ka $r(r-1) \equiv 0 \pmod p$. Ievērosim, ka $r \equiv 0 \pmod p$ nav iespējams no uzdevuma nosacījumiem, tāpēc secinām, ka $r \equiv 1 \pmod p$. Līdz ar to tādā gadījumā esam ieguvuši, ka

$$a^{2^m} \equiv 1 \pmod{p^m} \implies p^m \mid a^{2^m} - 1$$

katram naturālam skaitlim m.

Aplūkosim gadījumu, kad p ir nepāra skaitlis. Ievērosim, ka no LTE lemmas izriet, ka:

$$\nu_p(a^{2^m} - 1) = \nu_p((a^2)^{2^{m-1}} - 1) = \nu_p(a^2 - 1) + \nu_p(2^{m-1}) = \nu_p(a^2 - 1)$$

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\nu_p(a^{2^m} - 1) = \nu_p(a^2 - 1) \geq m$. Tas nozīmē, ka $p^m \mid a^2 - 1$ katram naturālam skaitlm m. Taču mēs varam izvēlēties tādu m, ka $p^m > |a^2 - 1|$, kas nozīmē, ka tādā gadījumā dalāmība var izpildīties tad un tikai tad, ja $a^2 - 1 = 0 \implies a = 1$.

Aplūkosim gadījumu, kad p ir pāra skaitlis jeb 2. Acīmredzami, ka skaitlis a ir nepāra. Tādā gadījumā no LTE lemmas izriet, ka:

$$\nu_2(a^{2^m} - 1) = \nu_2(a - 1) + \nu_2(2^m) + \nu_2(a + 1) - 1 \geq 1 + m + 1 - 1 = m + 1$$

Pēdējā rindiņā mēs izmantojām to, ka $\nu_2(a+1) \geq 1$ un $\nu_2(a-1) \geq 1$. Tas nozīmē, ka jebkuram nepāra naturālam skaitlim a ir spēkā, ka a^{2^m}, dalot ar 2^m, dod atlikumu 1 jebkuram naturālam skaitlim m.

Līdz ar to uzdevuma nosacījumus apmierina šādi pāri — $(1, p)$, kur p ir nepāra pirmskaitlis, un $(a, 2)$, kur a ir nepāra skaitlis.

16.uzdevums Dots pirmskaitlis p, kas lielāks par 2. Māris ikvienam iespējamam skaitļu komplektam $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$, kur σ_k ir 1 vai -1 katram $1 \leqslant k \leqslant p$, aprēķina skaitļa

$$1 \cdot \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2 + \ldots + p \cdot \sigma_p$$

atlikumu, to dalot ar p. Ar N_j apzīmēsim komplektu skaitu, kuriem iegūtais skaitlis dod atlikumu j, kur $0 \leqslant j \leqslant p-1$. Pierādīt, ka starp skaitļiem $N_0, N_1, \ldots, N_{p-1}$ ir ne vairāk kā 2 atšķirīgas vērtības.

Atrisinājums. Ievērosim, ja komplekts ir $(1, 1, \ldots, 1)$, tad iegūst skaitli $\frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod p$ (p ir nepāra), bet, ja komplekts ir $(-1, -1, \ldots, -1)$, tad iegūst skaitli $-\frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod p$.

Aplūkosim patvaļīgu komplektu $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$, kurš nav viens no augstākminētajiem. Sauksim par šī komplekta *saistītajiem* komplektiem tos komplektus, ko iegūst, šo komplektu rotējot, t.i., $(\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p, \sigma_1)$, $(\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_1, \sigma_2)$ utt. Ievērosim, ka rotāciju rezultātā tiek iegūti p dažādi komplekti. Ja tā nebūtu, tad gan pēc $k < p$, gan p rotācijām būtu iegūts tas pats komplekts. Tā kā $\mathrm{LKD}(k, p) = 1$, tad mazākais rotācijas periods varētu būt tikai 1 (tam jādala abi skaitļi), kas acīmredzami nozīmētu, ka skaitļiem komplektā visiem būtu jābūt vienādiem, taču šos gadījumus mēs aplūkojām atsevišķi. Tātad ikviens no aplūkotajiem komplektiem ietilpst grupā no p dažādiem saistītiem komplektiem, kā arī acīmredzami, ka šīm grupām nav kopīgu elementu.

Pierādīsim, ka vienas saistītas grupas komplekti dod visus atlikumus pa vienai reizei. Pieņemsim, ka patvaļīgs komplekts $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$ dod skaitli $1 \cdot \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2 + \ldots + p \cdot \sigma_p$ ar atlikumu $R \pmod p$. Tādā gadījumā komplekts $(\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \ldots, \sigma_i)$, kur $0 \leq i \leq p-1$, dod skaitli

$$\begin{aligned}1 \cdot \sigma_{i+1} + 2 \cdot \sigma_{i+2} + \ldots + p \cdot \sigma_i &\equiv (i+1-i) \cdot \sigma_{i+1} + (i+2-i) \cdot \sigma_{i+2} + \ldots + (i+p-i) \cdot \sigma_i \equiv \\ &\equiv \big((i+1) \cdot \sigma_{i+1} + (i+2) \cdot \sigma_{i+2} + \ldots + i \cdot \sigma_i\big) - i \cdot (\sigma_{i+1} + \sigma_{i+2} + \ldots + \sigma_i) \equiv \\ &\equiv (1 \cdot \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2 + \ldots + p \cdot \sigma_p) - i \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p) \equiv R - i \cdot S \pmod p,\end{aligned}$$

kur $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p \not\equiv 0 \pmod p$, jo ir nepāra skaits saskaitāmo, tātad vai nu -1, vai 1 būs vairāk reižu, un visi p saskaitāmie nav vienādi.

Aplūkosim, kādus atlikumus dod $R - i \cdot S$, kad i mainās no 0 līdz $p-1$. Pieņemsim, ka ir 2 dažādas i vērtības, attiecīgi j un k, kurām ir vienādi šīs izteiksmes atlikumi. Tādā gadījumā

$$R - j \cdot S \equiv R - k \cdot S \implies (k - j) \cdot S \equiv 0 \pmod p.$$

Tā kā $S \not\equiv 0 \pmod p$, tad vienīgais variants ir $k \equiv j \pmod p$. Tā kā šie skaitļi ir robežās no 0 līdz $p-1$, tiem jābūt vienādiem — pretruna. Tātad, i mainoties no 0 līdz $p-1$, arī $R - i \cdot S$ iziet cauri visiem atlikumiem.

Tas nozīmē, ka saistītas grupas komplekti dod katru atlikumu vienu reizi. Tā kā visi komplekti, izņemot $(1, 1, \ldots, 1)$ un $(-1, -1, \ldots, -1)$, sadalās saistītās grupās pa p komplektiem, tad katrs atlikums tiks iegūts tik reižu, cik ir grupu. Vienīgais izņēmums ir atlikums 0, kurš tiks iegūts 2 papildus reizes, taču $N_1 = N_2 = \ldots = N_{p-1}$, kas pierāda prasīto.

1 Vērtēšanas kritēriji

Vērtēšanas kritēriji 1.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – pierādīts, ka $N = \frac{1}{3}$ der.
  - ⋆ **1 punkts** – uzdevums reducēts uz nevienādības $b^2 + ba + bc > 2ac$ pierādīšanu.
  - ⋆ **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam
- **2 punkti** – pierādīts, ka neviena mazāka konstante par $\frac{1}{3}$ neder.
- **1 punkts** – veiksmīgi veikti abi iepriekšēji soļi.

Vērtēšanas kritēriji 2.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – par uzminētu atbildi, kurai tiek veikta pārbaude.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $f(0) = 0$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $-f(-x) \geq f(x)$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $f(x) \geq -f(-1)x$.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 3.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[100]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$.
- **3 punkti** – pierādīta lemma.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 4.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – pierādīta lemma.
  - ⋆ **1 punkts** – pierādīta indukcijas bāze.
  - ⋆ **2 punkti** – veikta induktīvā pāreja.
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 5.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – iegūta atbilde un vismaz daļēji pamatots, ka optimāla ir situācija, kad visiem spēlētājiem ir vienāds uzvaru skaits.
- **2 punkti** – iegūts un formāli pamatots pareizs novērtējums nepārsteidzošu spēļu skaitam vai ekvivalents novērtējums, kas ļauj iegūt pareizu atbildes novērtējumu (summē klāt iepriekšējiem 2 punktiem).
- **1 punkts** – uzrādīta konstrukcija un sniegta pareiza atbilde.

Vērtēšanas kritēriji 6.uzdevumam Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – iegūta rekurentā sakarība.
  - ⋆ **1 punkts** – sakarība redzama darbā, bet nav pamatota.
  - ⋆ **2 punkti** – sakarība pamatota.
- **2 punkti** – veikti tālākie secinājumi un iegūta pareizā atbilde.
- **alternatīvi 5 punkti** – ja ir ar roku izrēķināti visi iespējamie gadījumi. Maksimālais punktu skaits tiek piešķirts, ja patiešām viss ir aplūkots. Ja ir kāds gadījums, kas nav pareizi noteikts, par visu risinājumu **0 punkti**, izņemot gadījumus, kad papildus ir veikti novērojumi no piedāvātā risinājuma.

Vērtēšanas kritēriji 7.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – iegūts, ka n jādalās ar 3.
  - ⋆ **1 punkts** – ja veikti novērtējumi malu skaitam vai virsotņu skaitam pa trijstūru krāsām.
- **2 punkti** – sniegta un pamatota derīga konstrukcija.
  - ⋆ **1 punkts** – sniegta konstrukcija.
  - ⋆ **1 punkts** – skaidri pamatots vai kādā citā acīmredzamā veidā uzrādīts, ka sniegtā konstrukcija apmierina visus nosacījumus.

Vērtēšanas kritēriji 8.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – uzrādīta stratēģija, kā zaglis var garantēt sev labu gājienu katru reizi.
  - ⋆ **1 punkts** – ja ir iegūts, ka grafā virsotnes kaimiņu struktūra sadalās 7 nesaistītās daļās
  - ⋆ tiek noņemts **1 punkts**, ja stratēģijā iztrūkst kāds principiāli atšķirīgs gadījums no pārējiem.
- **2 punkti** – pamatots, ka zaglis vienmēr var atrast labu sākotnējo virsotni.

Vērtēšanas kritēriji 9.uzdevuma 1. atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – definēti punkti X un Y.
- **3 punkti** – pierādīts, ka ap četrstūriem $XHMS$ un $HTYN$ var apvilkt riņķa līnijas.
- **1 punkts** – risinājums tiek tālāk novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 9.uzdevuma 2. atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – definēti punkti X un Y.
- **2 punkti** – pierādīts, ka $\triangle BAH \sim \triangle BHS$.
- **2 punkti** – izdarīts secinājums par leņķiem pie attiecīgajiem elementiem līdzīgos trijstūros un veiksmīgi noslēgts risinājums.

Vērtēšanas kritēriji 10.uzdevuma 1.atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – ieviests punkts I **un** pierādīta lemma.
  - ⋆ **1 punkts** – ja tikai ieviests punkts I vai arī A simetriskais punkts pār B_1C_1.
- **1 punkts** – secināts, ka I un A_2 ir simetriski pret B_1C_1 vidusperpendikulu.
- **1 punkts** – izdarīts gala secinājums par nogriežņu vienādību.

Vērtēšanas kritēriji 10.uzdevuma 2. atrisinājumam. Par pilnībā pareizu atrisinājumu, izmantojot analītiskās ģeometrijas metodes, tiek piešķirti **5 punkti**. Punkti par līdz galam neatrisinātu uzdevumu, pielietojot šīs metodes, netiek piešķirti, izņemot tos gadījumus, kad skolēns ir interpretējis iegūtos algebriskos rezultātus ģeometriski.

Vērtēšanas kritēriji 11.uzdevuma 1.atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$
- **1 punkts** – uzdevums reducēts uz leņķu vienādības $\angle OAM = \angle PAS$ pierādīšanu
- **1 punkts** – definēts punkts T **un** pierādīts, ka ap četrstūri $AOMT$ var apvilkt riņķa līniju.
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 11.uzdevuma 2.atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$
- **1 punkts** – definēts punkts N **un** uzdevums reducēts uz leņķu vienādības $\angle SON = \angle PAS$ pierādīšanu
- **2 punkti** – pierādīts, ka ap četrstūri $AOSN$ var apvilkt riņķa līniju.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 12.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – pierādīts, ka $XK \perp BC$
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 13.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – izvēlēts derīgs n, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi (vai nu vispārīgs, piemēram, $n = 4a^4$, kur $a \equiv 1 \pmod{15}$, vai konkrēts, piemēram, $n = 2^{2034}$)
- **1 punkts** – pamatots, ka $P(n-1) < \sqrt{n}$ **un** $P(n) < \sqrt{n}$
- **3 punkti** – pamatots, ka $P(n+1) < \sqrt{n}$.

Vērtēšanas kritēriji 14.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $(a-b)^2+(ab+1)^2=(a^2+1)(b^2+1)$.
- **3 punkti** – pierādīts, ka skaitļu a^2+1 un b^2+1 lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.
  - ⋆ **1 punkts** – pieņemts pretējais un tiek pierādīts, ka $p \mid (a-b)(a+b)$ kaut kādam pirmskaitlim p.
  - ⋆ **2 punkti** – pierādījums tālāk tiek novests līdz galam.
- **1 punkts** – secināts, ka tādā gadījumā skaitlis $(a^2+1)(b^2+1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Vērtēšanas kritēriji 15.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – pierādīts, ka $p^m \mid a^{2^m}-1$ katram naturālam skaitlim m vai pierādīts, ka $r=1$, kur r ir kopīgais atlikums.
- **2 punkti** – atrisināts gadījums, kad p ir nepāra pirmskaitlis.
  - ⋆ **1 punkts** – pierādīts, ka $p^m \mid a^2-1$ katram naturālam skaitlim m.
  - ⋆ **1 punkts** – secināts, ka tas tā nevar būt, ja paņem pietiekami lielu skaitli m.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $p=2$ gadījumā visi nepāra skaitļi a der.

Vērtēšanas kritēriji 16.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – pamatota stratēģija, kā dalīt komplektus grupās pa p ar dažādiem atlikumiem (vai nu rotācijas ideja, vai kāds cits veids).
  - ⋆ tiek noņemts **1 punkts**, ja nav pamatots, ka nebūs pārklāšanās starp komplektiem vai grupām (ja to prasa risinājums).
  - ⋆ tiek noņemts **1 punkts**, ja nav pamatots, ka tiks iegūti dažādi atlikumi no komplektiem (ja to prasa risinājums).
- **1 punkts** – ņemts vērā, ka $(1,1,\ldots,1)$ un $(-1,-1,\ldots,-1)$ ir īpaši gadījumi (ja risinājums neprasa to aplūkot, tad šis punkts tiek skaitīts klāt iepriekšējiem).
- **1 punkts** – izdarīti noslēdzošie secinājumi.