Baltijas ceļa atlases 2022 atrisinājumi

1.uzdevums Atrast visus pozitīvu reālu skaitļu trijniekus (x, y, z), kuri apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3. \end{cases}$$

Uzdevuma autori: Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers

Atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $x = \max(x, y, z)$ un $z = \min(x, y, z)$ (citi gadījumi risinās analoģiski). Ievērosim, ka tādā gadījumā:

$$x^3 + x^2 + x \geq x + y^2 + z^3 = 3 \implies x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)((x+1)^2 + 2) \geq 0$$

Tā kā $(x+1)^2 + 2 > 0$, tad secinām, ka $x \geq 1$. Līdzīgi varam spriest, ka:

$$z + z^2 + z^3 \leq x + y^2 + z^3 = 3 \implies (z-1)((z+1)^2 + 2) \leq 0$$

Ņemot vērā to, ka $(z+1)^2 + 2 > 0$, tad secinām, ka $z \leq 1$.

Apskatīsim gadījumu, kad $y \leq 1$. Atņemot otro vienādojumu no pirmā, iegūsim, ka:

$$z^3 - z^2 + y^2 - y = x^3 - x^2$$
$$(\star) \qquad z^2(z-1) + y(y-1) = x^2(x-1)$$

Tā kā $z \leq 1$, $y \leq 1$ un $x \geq 1$, tad izteiksmes $(\star)$ kreisā puse ir ≤ 0, bet labā puse ir ≥ 0. Tādā gadījumā abu pušu vienādība var pastāvēt tad un tikai tad, ja $x = y = z = 1$.

Apskatīsim gadījumu, kad $y \geq 1$. Atņemot pirmo vienādojumu no trešā, iegūsim, ka:

$$x^2 - x + y^3 - y^2 = z^3 - z$$
$$(\star\star) \qquad x(x-1) + y^2(y-1) = z(z+1)(z-1)$$

Tā kā $x \geq 1$, $y \geq 1$ un $z \leq 1$, tad izteiksmes $(\star\star)$ kreisā puse ir ≥ 0, bet labā puse ir ≤ 0. Tādā gadījumā abu pušu vienādība var pastāvēt tad un tikai tad, ja $x = y = z = 1$.

Secinām, ka vienīgais pozitīvo reālu skaitļu trijnieks, kas apmierina doto vienādojumu sistēmu ir, $(1, 1, 1)$.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - pierādīts, ka maksimums no skaitļiem (x, y, z) ir vismaz 1.
- **1 punkts** - pierādīts, ka minimums no skaitļiem (x, y, z) ir ne vairāk kā 1.
- **1 punkts** - ideja par sistēmas vienādojumu atņemšanu. Punkts tiek piešķirts tikai tad, ja tika veikti **abi** iepriekšējie soļi.
- **2 punkti** - risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

2.uzdevums Pierādīt, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c, kuriem izpildās sakarība $abc = 1$, ir patiesa nevienādība:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2+1}{2a} + \frac{b^2+1}{2b} + \frac{c^2+1}{2c}.$$

Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs

Atrisinājums. Pārrakstīsim doto nevienādību sekojošā formā:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq \frac{a^2+1}{2a} + \frac{b^2+1}{2b} + \frac{c^2+1}{2c} \\
2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq \frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b} + \frac{c^2+1}{c} \\
2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c \qquad (\star)
\end{aligned}$$

1. apgalvojums: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$.
Pierādījums: No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = 3a \\
\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} = 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}} = 3b \\
\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}} = 3c
\end{aligned}$$

Summējot trīs iegūtās nevienādības, iegūsim prasīto apgalvojumu.

2. apgalvojums: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Pierādījums: No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{c^3}} = 3 \cdot \frac{1}{c} \\
\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{a^3}} = 3 \cdot \frac{1}{a} \\
\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{ca}{b^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{b^3}} = 3 \cdot \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Summējot trīs iegūtās nevienādības, iegūsim prasīto apgalvojumu.

Viegli redzēt, ka, saskaitot 1. un 2. apgalvojumu, iegūsim nevienādību $(\star)$. Tā kā dotajai nevienādībai ekvivalentā nevienādība ir patiesa, tad secinām, ka arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - izteiksme ir pārveidota līdz formai $(\star)$.
- **2 punkti** - pierādīts 1.apgalvojums **vai** 2.apgalvojums.
- **2 punkti** - risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem x, y ir spēkā vienādība:

$$f(f(x)) + yf(xy+1) = f(x - f(y)) + xf(y)^2.$$

Uzdevuma autori: Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers

Atrisinājums. Ar $P(x;y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Apskatot $P(0;y)$, iegūstam, ka:

$$f(f(0)) + yf(1) = f(-f(y)) \qquad (1)$$

Apskatīsim gadījumu, kad $f(1) \neq 0$. Pieņemsim, ka priekš kaut kādiem reāliem skaitļiem a, b izpildās īpašība, ka $f(a) = f(b)$. Tad:

$$af(1) = f(-f(a)) - f(f(0)) = f(-f(b)) - f(f(0)) = bf(1) \implies a = b$$

Tas nozīmē, ka funkcija f ir injektīva funkcija. Ievietojot $y = 0$ sakarībā (1) un izmantojot pierādīto funkcijas injektivitāti, iegūsim, ka:

$$f(f(0)) = f(-f(0)) \implies f(0) = -f(0) \implies f(0) = 0,$$

Savukārt, apskatot $P(x, 0)$ un izmantojot funkcijas injektivitāti vēlreiz, var secināt, ka:

$$f(f(x)) = f(x) \implies f(x) = x$$

Bet viegli pārbaudīt, ka šāda funkcija neapmierina doto vienādojumu.

Atliek gadījums, kad $f(1) = 0$. Ievērosim, ka no $P(0;1)$ izriet, ka:

$$f(f(0)) = f(-f(1)) = f(0)$$

Savukārt $P(x;0)$ ļauj mums secināt, ka:

$$f(f(x)) = f(x - f(0)) + xf(0)^2 \qquad (2)$$

Ievietojot $x = f(0)$ sakarībā (2), iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} f(f(f(0))) &= f(f(0) - f(0)) + f(0)^3 \\ f(f(0)) &= f(0) + f(0)^3 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Taču tādā gadījumā sakarība (2) kļūst par sakarību $f(f(x)) = f(x)$. Apskatot $P(x;1)$, secinām, ka:

$$f(f(x)) + f(x+1) = f(x) \implies f(x+1) = 0$$

Tā kā $f(x+1) = 0$, tad secinām, ka funkcijas vērtības visiem reāliem skaitļiem ir 0, tas ir, $f(x) = 0$ katram reālam x. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija apmierina doto vienādojumu.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** - pilnībā atrisināts gadījums, kad $f(1) \neq 0$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka funkcija ir injektīva.
  - ⋆ **1 punkts** - risinājums tiek tālāk novests līdz galam.
- **3 punkti** - pilnībā atrisināts gadījums, kad $f(1) \neq 0$.
  - ⋆ **2 punkti** - pierādīts, ka $f(0) = 0$.
  - ⋆ **1 punkts** - risinājums tiek tālāk novests līdz galam.

Dalībniekam tiek atņemts **1 punkts**, ja nav veikta funkcijas pārbaude kādā no gadījumiem.

4.uzdevums Dots polinoms $p(x)$ ar reāliem koeficientiem un naturāls skaitlis n. Pierādīt ka eksistē tāds nenulles polinoms ar reāliem koeficientiem $q(x)$, ka polinomam $p(x)q(x)$ nenulles koeficienti ir tikai pie x pakāpēm, kas ir n daudzkārtņi.

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums. Ievērosim, ka mūsu mērķis ir atrast tādu nenulles polinomu $q(x)$, kuram $p(x) \cdot q(x) = s(x^n)$ kādam reālam polinomam $s(x)$. Ja $p(x)$ ir nulles polinoms, tad $p(x)q(x) = 0$ jebkuram polinomam $q(x)$. Iegūtais nulles polinoms apmierina uzdevuma nosacījumus, tādēļ turpmāk varam pieņemt, ka $p(x) \neq 0$.

Apzīmējam $y = x^n$. Tad y^m ir polinoms ar reāliem koeficientiem jebkuram nenegatīvam veselam m. Katram šādam m ar $r_m(x)$ apzīmēsim atlikumu, kas rodas, ja ar polinomu dalīšanas algoritmu izdala $y^m = (x^n)^m$ ar $p(x)$. Katram $r_m(x)$ tad izpildās, ka $deg(r_m) < deg(p)$.

Aplūkojam polinomus $r_0(x), r_1(x), \dots, r_{deg(p)}$. Mūsu mērķis būtu atrast tādus koeficientus $s_0, s_1, \dots, s_{deg(p)}$, kuriem izpildās

$$s_0 \cdot r_0(x) + s_1 \cdot r_1(x) + \dots + s_{deg(p)} \cdot r_{deg(p)} = 0.$$

Ja šis vienādojums tiek uztverts kā lineāra vienādojumu sistēma pret mainīgajiem $s_0, s_1, \dots, s_{deg(p)}$, kur sistēmas vienādojumi ir attiecīgo koeficientu pie katras x pakāpes vienādība ar 0 (zināms, ka $deg(r_m) < deg(p)$), tad tiks iegūta sistēma ar $deg(p)$ vienādojumiem un $deg(p)+1$ mainīgajiem. Tā kā sistēma ir homogēna un mainīgo ir vairāk nekā vienādojumu, tad sistēmai eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu, starp kuriem arī ir tādi, ka $(s_1, s_2, \dots, s_{deg(p)}) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Izvēlamies sistēmas risinājumu $(s_1, s_2, \dots, s_{deg(p)}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ un aplūkojam polinomu $s(x) = s_0 + s_1 \cdot x + \dots + s_{deg(p)} \cdot x^{deg(p)}$. No risinājuma īpašībām redzams, ka $s(x)$ ir nenulles polinoms. Tā kā $r_m(x)$ ir atlikums, polinomu dalīšanā dalot y^m ar $p(x)$, tad $p(x)$ dala $y^m - r_m(x)$ visām pieļaujamām m vērtībām. Līdz ar to $p(x)$ arī dala

$$\begin{aligned} s_0 \cdot (y^0 - r_0(x)) + s_1 \cdot (y^1 - r_1(x)) + \dots + s_{deg(p)} \cdot (y^{deg(p)} - r_{deg(p)}(x)) &= \\ = s(y) - (s_0 \cdot r_0(x) + s_1 \cdot r_1(x) + \dots + s_{deg(p)} \cdot r_{deg(p)}) &= \\ = s(y). \end{aligned}$$

Tātad $q(x) = s(y)/p(x)$ arī ir polinoms. Tā kā $s(x)$ (un attiecīgi arī $s(y)$) ir nenulles polinoms, tad $q(x)$ arī ir nenulles polinoms. Līdz ar to mēs esam ieguvuši nenulles polinomu $q(x)$, kuram $p(x)q(x) = s(x^n)$, kas dod uzdevumā prasīto.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - aplūkoti polinoma y^m dalīšanas atlikumi, dalot ar $p(x)$.
- **2 punkti** - iegūta izteiksme $s_0 \cdot r_0(x) + s_1 \cdot r_1(x) + \dots + s_{deg(p)} \cdot r_{deg(p)} = 0$ ar nenulles koeficientiem s_i.
  - ⋆ **1 punkts** - aplūko šo izteiksmi.
  - ⋆ **1 punkts** - secina, ka tai eksistē attiecīgais sistēmas risinājums $(s_1, s_2, \dots, s_{deg(p)}) \neq (0, 0, \dots, 0)$.
- **2 punkti** - pierādīts, ka nenulles $s(y)$ dalās ar $p(x)$.
  - ⋆ **1 punkts** - aplūko **nenulles** polinomu $s(x)$ ar iepriekš iegūtajiem koeficientiem.
  - ⋆ **1 punkts** - aplūko izteiksmi ar $s_i \cdot (y^i - r_i(x))$ un izdara secinājumu, ka tā dalās ar $p(x)$.

Dalībniekam tiek atņemts **1 punkts**, ja netiek aplūkots gadījums $p(x) = 0$ **un** risinājumā tiek veikta dalīšana ar $p(x)$.

5.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Rūtiņu kvadrāts ar izmēriem $n \times n$ nokrāsots šahveidā (pamīšus balts un melns). Vienā gājienā atļauts kvadrātā izvēlēties kādu rūtiņu un nomainīt krāsu uz pretējo gan visām rūtiņām, kas atrodas vienā rindā, gan visām rūtiņām, kas atrodas vienā kolonnā ar izvēlēto rūtiņu (arī izvēlētajai rūtiņai tiek mainīta krāsa). Atrast visas n vērtības, kurām ir iespējams panākt, ka pēc galīga gājienu skaita rūtiņu kvadrāts būs vienkrāsains.

Folklora

Atrisinājums. Pierādīsim, ka prasīto var sasniegt tikai gadījumos, ja n ir pāra.

Ja $n = 2k$ ir pāra, tad prasīto var sasniegt, vienu reizi izvēloties katru no rūtiņām, kas sākotnēji bija melnas. Acīmredzami, ka gājienu secība nav svarīga, jo gājieni ir neatkarīgi cits no cita, un svarīgs tikai ir reižu skaits, cik reižu jebkura rūtiņa ir mainījusi krāsu. Tā kā jebkura rūtiņa var mainīt krāsu tikai tajos gadījumos, ja gājiena laikā ir izvēlēta kāda rūtiņa no aplūkotās rūtiņas rindas vai kolonnas, tad reižu skaitu, kuros aplūkotā rūtiņa mainīja krāsu, var noteikt, saskaitot melno rūtiņu kopskaitu aplūkotās rūtiņas rindā un kolonnā.

- Ja rūtiņa sākotnēji bija melna, tad bez šīs rūtiņas vienā rindā ar to bija vēl $k-1$ melna rūtiņa. Analoģiski, vienā kolonnā arī bija $k-1$ melna rūtiņa. Papildus tam pati rūtiņa arī vienu reizi mainīs krāsu. Līdz ar to kopējais reižu skaits, cik šī rūtiņa mainīja krāsu, ir $(k-1)+(k-1)+1 = 2k-1$, kas ir nepāra skaitlis. Līdz ar to procesa beigās katra melnā rūtiņa būs mainījusi krāsu nepāra skaitu reižu un kļuvusi balta.
- Ja rūtiņa sākotnēji bija balta, tad vienā rindā ar to bija k melnas rūtiņas. Analoģiski vienā kolonnā arī bija k melnas rūtiņas. Tātad kopējais reižu skaits, cik šī rūtiņa mainīja krāsu, ir $k + k = 2k$, kas ir pāra skaitlis. Tātad proces beigās katra baltā rūtiņa būs mainījusi krāsu pāra skaitu reižu un palikusi balta.

Redzams, ka pēc šī procesa gan sākotnēji melnās, gan sākotnēji baltās rūtiņas būs visas kļuvušas baltas, tādēļ prasītais tiks sasniegts.

Ja n ir nepāra, tad aplūkosim pirmās divas rindas. Redzams, ka sākotnēji tajās kopumā ir n melnas un n baltas rūtiņas. Viegli arī pamanīt, ka jebkurš gājiens mainīs krāsu tieši 2 vai $n+1$ rūtiņām no pirmajām divām rindām (atkarībā no tā, vai izvēlētā rūtiņa atrodas pirmajās divās rindās). Tātad katrā gājienā no pirmajām divām rindām pāra skaits rūtiņu mainīs krāsu.

Ja mēs šīs rūtiņas sadalām divās daļās: a un b, kur a ir melno rūtiņu skaits pirmajās divās rindās, kam noteikta gājiena laikā krāsa mainās uz balto, un b analoģiski ir balto rūtiņu skaits, kam krāsa mainījās uz melno, tad varam ievērot, ka melno rūtiņu skaits pirmajās divās rindās gājiena laikā mainījās par $b-a$. Tā kā $a+b = 2$ vai $a+b = n+1 = 2x$, tad a, b ir vienlaicīgi vai nu abi pāra, vai arī abi nepāra. Tas nozīmē, ka skaitlis $b-a$ ir pāra.

Līdz ar to katrā gājienā melno rūtiņu skaits pirmajās divās rindās mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnēji tas bija n - nepāra skaitlis, tad nebūs iespējams sasniegt brīdi, kurā tas kļūs par 0 vai $2n$ - pāra skaitļiem. Šie skaitļi būtu jāsasniedz, lai pirmās divas rindas būtu vienkrāsainas, kas pierāda, ka pie nepāra n prasītais nav sasniedzams.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** - sniegta pareiza konstrukcija gadījumam, ja n ir pāra.
- **3 punkti** - pierādīts, ka pie nepāra n prasīto nav iespējams sasniegt.
  - ⋆ **1 punkts** - cenšas iegūt invariantu izteiksmi, aplūkojot kādu izolētu laukuma daļu.
  - ⋆ **2 punkti** - risinājums tiek veiksmīgi novests līdz galam.

6.uzdevums Rindā uzrakstīti skaitļi $1, 2, 3, \ldots, n$. Divi spēlētāji, Māris un Filips, secīgi viens pēc otra izsvītro kādu vēl neizsvītrotu skaitli, līdz rindā paliek tieši 2 neizsvītroti skaitļi; Māris sāk spēli. Ja 2 atlikušie skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi, tad uzvar Māris, citādi uzvar Filips. Katram naturālam $n \geq 4$ noteikt, kurš spēlētājs var garantēti uzvarēt.

Folklora

Atrisinājums. Ja n ir nepāra, tad uzvar Māris. Ja $n = 4; 6; 8$, tad arī uzvar Māris. Ja n ir pāra un $n \geq 10$, tad uzvar Filips. Aplūkosim katru no šiem gadījumiem atsevišķi.

- Ja n ir nepāra, tad Māris pirmajā gājienā izsvītro skaitli n un sadala pārējos skaitļus pāros $(1; 2), (3; 4), \ldots, (n-2; n-1)$. Katram nākamajam Filipa gājienam, kurā viņš izsvītro skaitli a, Māris atbild ar attiecīgi otru skaitli no pāra, kurā atrodas a. Viegli redzams, ka šajā gadījumā pēdējie 2 skaitļi, kas paliks neizsvītroti, būs no viena pāra. Tā kā vienā pārī atrodas divi secīgi naturāli skaitļi, kas vienmēr ir savstarpēji pirmskaitļi, tad Māris būs uzvarējis.

- Ja $n = 8$, tad Māris savos 3 gājienos izsvītro skaitļus $4; 6; 8$ (ja Filips savā gājienā izsvītro kādu no šiem, tad Māris var izvēlēties jebkuru citu no vēl neizsvītrotiem skaitļiem). Tā kā pārējie skaitļi $1; 2; 3; 5; 7$ ir visi pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad neatkarīgi no Filipa gājieniem pēdējie 2 palikušie skaitļi būs savstarpēji pirmskaitļi, kas dos Mārim uzvaru.

  Gadījumā $n = 6$ Mārim pietiek izsvītrot skaitļus $4; 6$, bet gadījumā $n = 4$ - izsvītrot skaitli 4. No analoģiskiem spriedumiem kā iepriekšējā rindkopā redzams, ka Māris uzvarēs neatkarīgi no Filipa izvēlētajiem skaitļiem.

- Ja $n = 2k \geq 10$ ir pāra, tad Filips katrā gājienā (izņemot pēdējo, ko aplūkosim atsevišķi) izsvītro jebkuru vēl neizsvītrotu nepāra skaitli, kas nav 3 vai 9. Aplūkosim divus gadījumus:

  ⋆ Ja kādā no gājieniem Māris izsvītro nepāra skaitli, tad Filips savos turpmākajos gājienos izsvītro visus pārējos nepāra skaitļus, ieskaitot 3 un 9. Ja kādā brīdī nepāra skaitļi beidzas, tad Filips var svītrot atlikušos pāra skaitļus.

  Viegli redzams, ka šajā gadījumā tiks izsvītroti $(k-1) + 1 = k$ nepāra skaitļi, kas arī ir visu nepāra skaitļu skaits rindā. Tātad divi atlikušie skaitļi būs pāra skaitļi, kas nav savstarpēji pirmskaitļi, jo abi dalās ar 2. Līdz ar to Filips būs uzvarējis.

  ⋆ Atliek gadījums, ja Māris visos savos gājienos izsvītro tikai pāra skaitļus. Tādā gadījumā Filips seko sev definētajai stratēģijai, izņemot pēdējo gājienu. Tajā Filips izsvītro pēdējo neizsvītroto pāra skaitli, kā atlikušos divus skaitļus atstājot 3 un 9, kas nav savstarpēji pirmskaitļi, jo abi dalās ar 3. Tātad arī šajā gadījumā Filips ir uzvarējis.

Varam secināt, ka visi iespējamie gadījumi ir izsmelti, tātad uzdevums ir atrisināts.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** - pareizi atrisināts gadījums, kad n ir nepāra.
- **1 punkts** - atrisināts gadījums $n = 4; 6; 8$.
- **2 punkti** - pareizi atrisināts gadījums, kad $n \geq 10$ ir pāra.

7.uzdevums Kādā Karaļvalstī ir 2021 pilsēta. Visas šīs pilsētas ir izvietotas aplī, piedevām no katras pilsētas uz pulksteņrādītāja virzienā esošajām nākamajām 101 pilsētām iziet vienvirziena ceļš (virzienā no šīs pilsētas uz nākamajām 101). Katram no ceļiem bruģis ir vienā noteiktā krāsā. Zināms, ka ceļiem bruģa krāsa ir izvēlēta tā, ka no jebkuras pilsētas uz jebkuru citu var aiziet pa tādu ceļu maršrutu, kurā nekādiem diviem ceļiem nav vienādas krāsas bruģis. Kāds var būt mazākais iespējamais bruģa krāsu skaits šajā Karaļvalstī?

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums. Ieviesīsim virzītu grafu, kurā pilsētas ir virsotnes un vienvirziena ceļi ir virzītas šķautnes, no kurām katra ir nokrāsota kādā krāsā. Pierādīsim, ka mazākais iespējamais krāsu skaits ir 21.

Apzīmēsim virsotnes pulksteņrādītāja secībā kā $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2020}$. Viegli redzams, ka no v_0 īsākā maršruta garums līdz $v_1, v_2, \ldots, v_{101}$ ir 1, līdz $v_{102}, v_{103}, \ldots, v_{202}$ ir 2, utt. Visgarākais īsākā maršruta garums ir no v_0 līdz v_{2020}, kas ir 20.

Vispirms pierādīsim, ka ar 21 krāsu pietiek, lai izpildītu uzdevuma nosacījumus. Katram i, kur $1 \leq i \leq 20$, izveidojam kopu

$$V_i = \{v_{101(i-1)+1}, v_{101(i-1)+2}, \ldots, v_{101i}\}$$

un nokrāsojam visas šķautnes, kuras iziet virzienā ārā no šīs kopas virsotnēm i-tajā krāsā. Visas tās šķautnes, kuras sākas virsotnē v_0, nokrāsojam 21. krāsā. Tā kā starp jebkurām divām virsotnēm eksistē maršruts, kura garums nepārsniedz 20, un šo maršrutu var pielāgot tā, lai visas šķautnes, izņemot pēdējo, būtu 101 vienību garas, tad jebkura šāda maršruta šķautne sāksies V_i, kurā vēl neviena šķautne nebija sākusies, kas acīmredzami dod to, ka visām šķautnēm būs dažādas krāsas.

Pierādīsim, ka ar 20 krāsām nav iespējams sasniegt prasīto (mazāka krāsu skaita pierādījums ir analoģisks). Pieņemsim pretējo, ka uzdevumā prasītais ir sasniegts ar 20 krāsām. Aplūkosim šķautnes, kuras ir 101 vienību garas, t.i., savieno v_i ar v_{i+101}. Ievērosim, ka īsākais maršruts starp v_i un v_{i+2020} ir 20 šķautņu garumā. Tā kā visām šķautnēm ir jābūt dažādās krāsās, varam secināt, ka tās ir visās pieejamajās 20 krāsās.

Ja aplūko maršrutu starp v_i un $v_{i+2020} = v_{i-1}$, kā arī starp v_{i+101} un v_{i+100}, tad redzams, ka šiem maršrutiem pārklājas 19 šķautnes, izņemot šķautnes starp v_i un v_{i+101}, kā arī v_{i-1} un v_{i+100}. Tā kā pārējām 19 šķautnēm ir zināma krāsa un ir tikai 20 krāsas, var secināt, ka šīm šķautnēm ir vienāda krāsa. Atkārtojot šo spriedumu, ir iespējams iegūt, ka visām šķautnēm ar garumu 101 ir viena un tā pati krāsa, kas ir pretruna ar to, ka tās bija nokrāsotas 20 dažādās krāsās.

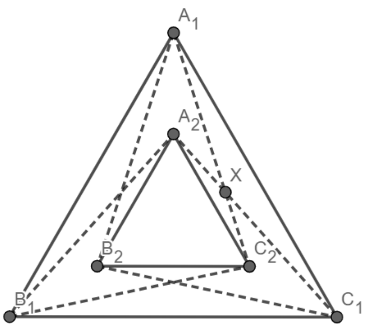
Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** - uzrādīta pareiza konstrukcija 21 krāsai.
- **3 punkti** - pierādīts, ka nevar būt tikai 20 krāsu.
  - ⋆ **1 punkts** - secina, ka maršrutam starp v_i un v_{i+2020} jābūt nokrāsotam visās 20 krāsās.
  - ⋆ **2 punkti** - iegūst, ka visām šķautnēm garumā 101 jābūt vienā krāsā.

8.uzdevums Sauksim divu nogriežņu krustpunktu par *gandrīz ideālu*, ja katram no nogriežņiem attālums starp minēto krustpunktu un nogriežņa viduspunktu ir vismaz 2022 reizes mazāks par nogriežņa garumu. Pierādīt, ka eksistē slēgta lauzta līnija, kurā katrs nogrieznis krustojas ar vismaz vienu citu nogriezni un visi nogriežņu krustpunkti ir *gandrīz ideāli.*

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums. Aplūkojam divus vienādmalu trijstūrus, kam sakrīt apvilkto riņķa līniju centri un attiecīgās malas paralēlas. Apzīmēsim šos trijstūrus ar $\triangle A_1B_1C_1$ un $\triangle A_2B_2C_2$. Tad kā slēgto lauzto līniju izvēlamies $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$, kurai ir 3 nogriežņu krustpunkti. Simetrijas dēļ mums pietiek aplūkot tikai vienu, tādēļ ar X apzīmējam A_1C_2 un A_2C_1 krustpunktu.



Acīmredzami, ka četrstūris $A_1A_2C_2C_1$ ir vienādsānu trapece, tādēļ trijstūri $\triangle A_1XC_1$ un $\triangle C_2XA_2$ ir vienādsānu un līdzīgi. Tādēļ $A_1C_2 = A_2C_1$ un $\frac{A_1X}{XC_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$. Ja $\triangle A_2B_2C_2$ tiek vienmērīgi palielināts un tuvināts $\triangle A_1B_1C_1$ izmēram, tad redzams, ka pie nosacījuma $1 < \frac{A_1C_1}{A_2C_2} < \frac{2023}{2022}$ prasītais tiks sasniegts. Tādā gadījumā nogrieznim attālums starp krustpunktu un viduspunktu būs mazāks par $\frac{1}{2} - \frac{2022}{4045} = \frac{1}{9090}$ no nogriežņa garuma.

Piezīme. Eksistē arī vairākas citas konstrukcijas ar daudzstūru palīdzību, kas balstās risinājumā izmantotajā trapeces idejā.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **4 punkti** - uzdota pareiza konstrukcija, kas izpilda uzdevuma nosacījumus.
- **1 punkts** - paskaidrots, kādēļ krustpunktiem izpildīsies nepieciešamā īpašība.

9.uzdevums Dots četrstūris $ABCD$, kurš ir ievilkts riņķa līnijā Ω. Taisnes AB un CD krustojas punktā P, bet taisnes AD un BC krustojas punktā Q. Trijstūra $\triangle APQ$ apvilktā riņķa līnija krusto Ω punktā $R \neq A$. Pierādīt, ka taisne CR krusto nogriezni PQ tā viduspunktā.

BW 2021 Shortlist

1. atrisinājums. Pieņemsim, ka taisne CR krusto nogriezni PQ punktā M.

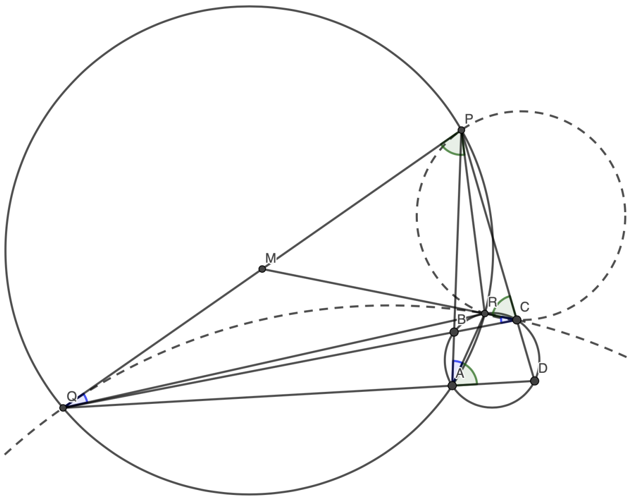
Tā kā ap četrstūri $RPQA$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle RPM = \angle RPQ = \angle RAD$. No otras puses, ap četrstūri $RADC$ arī var apvilkt riņķa līniju, tāpēc secinām, ka $\angle RAD = \angle RCP$. Līdz ar to $\angle RPM = \angle RCP$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka taisne MP ir $\triangle RCP$ apvilktās riņķa līnijas pieskare. Savukārt, no pieskares - sekantes īpašības izriet, ka:

$$MP^2 = MR \cdot MC.$$

Tā kā ap četrstūri $RPQA$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle MQR = \angle PQR = \angle BAR$. No otras puses, ap četrstūri $BACR$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc secinām, ka $\angle BAR = \angle RCB = \angle RCQ$. Līdz ar to $\angle MQR = \angle RCQ$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka taisne MQ ir $\triangle RQC$ apvilktās riņķa līnijas pieskare. Savukārt, no pieskares sekantes īpašības izriet, ka:

$$MQ^2 = MR \cdot MC.$$

Secinām, ka $MQ^2 = MP^2 = MR \cdot MC \implies MP = MQ$. Tas nozīmē, ka punkts M ir nogriežņa PQ viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.



Vērtēšanas kritēriji 1. atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds (punkti nesummējas dažādiem risinājumiem):

- **2 punkti** - pierādīts, ka $MP^2 = MR \cdot MC$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka $\angle MPR = \angle MCP$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādījums tālāk tiek novests līdz galam .
- **2 punkti** - pierādīts, ka $MQ^2 = MR \cdot MC$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka $\angle MQR = \angle MCQ$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādījums tālāk tiek novests līdz galam .
- **1 punkts** - veikts gala secinājums.

2. atrisinājums. Ar E apzīmēsim taisnes CR krustpunktu ar trijstūrim $\triangle APQ$ apvilkto riņķa līniju.

Tā kā piecstūriem $ABCDR$ un $APEQR$ var katram apvilkt riņķa līniju, tad varam secināt, ka

$$\angle CDA = \angle CRA = \angle ERA = \angle EQA.$$

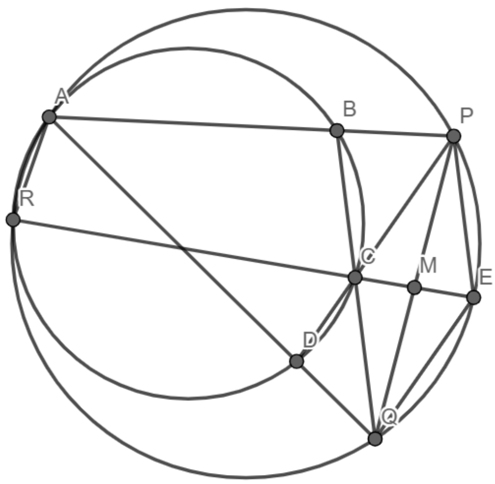
Tā kā $\angle CDA = \angle EQA$, iegūstam, ka $CD \parallel EQ$.

Analoģiski var iegūt, ka

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CRA = 180^\circ - \angle ERA = \angle APE.$$

No $\angle ABC = \angle APE$ var secināt, ka $BC \parallel EP$.

Tā kā D, C, P un B, C, Q ir attiecīgi kolineāri, secinām, ka $CQ \parallel EP$ un $CP \parallel EQ$ jeb četrstūris $CPEQ$ ir paralelograms. $CPEQ$ diagonāle EC, kas ir taisne RC, krusto otru paralelograma diagonāli PQ tās viduspunktā, kas pierāda prasīto.



Vērtēšanas kritēriji 2. atrisinājumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - ievieš punktu E, t.i., taisnes CR un $\triangle APQ$ apvilktās riņķa līnijas krustpunktu.
- **2 punkti** - pierādīts, ka $CD \parallel EQ$ **vai** $BC \parallel EP$.
- **2 punkti** - risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

10.uzdevums Dots trijstūris $\triangle ABC$, kurā $AB < AC$. Uz nogriežņa AC izvēlēts tāds punkts D, ka $AB = AD$. Punkts X ir izvēlēts uz nogriežņa BC tā, ka nogriežņu garumiem izpildās sakarība $BD^2 = BX \cdot BC$. Trijstūru $\triangle XDC$ un $\triangle ABC$ apvilktās riņķa līnijas krustojas punktā $M \neq C$. Pierādīt, ka taisne MD iet caur trijstūra $\triangle ABC$ apvilktās riņķa līnijas loka $\cup BAC$ viduspunktu.

Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers

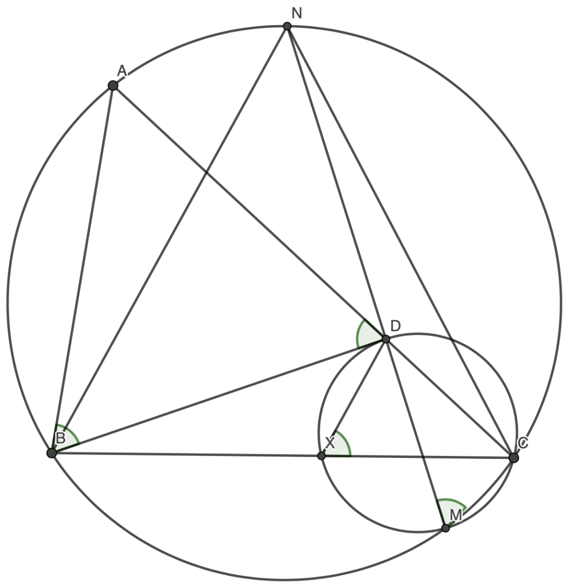
Atrisinājums. Ar N apzīmēsim taisnes MD krustpunktu ar $\triangle ABC$ apvilkto riņķa līniju. Doto garumu sakarību var pārrakstīt sekojoši:

$$BD^2 = BX \cdot BC \implies \frac{BD}{BX} = \frac{BC}{BD}$$

Tā kā trijstūriem $\triangle DBX$ un $\triangle CBD$ ir kopīgs leņķis $\angle CBD$, tad secinām, ka $\triangle DBX \sim \triangle CBD$. Tas nozīmē, ka $\angle BXD = \angle BDC$ kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Ievērosim, ka tad arī $\angle ADB = \angle DXC = \alpha$, jo tie ir atbilstošie blakusleņķi.

Ievērosim, ka, tā kā ap četrstūri $DXMC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle DXC = \angle DMC = \angle NMC = \alpha$. No otras puses, mēs zinām, ka $AD = AB$, tāpēc $\angle ADB = \angle ABD = \alpha$ un $\angle BAD = \angle BAC = 180° - 2\alpha$.

Atzīmēsim arī, ka ap piecstūri $NABMC$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle NMC = \angle NBC = \alpha$ un $\angle BAC = \angle BNC = 180° - 2\alpha$. No tā var secināt, ka $\angle NBC = \angle NCB = \alpha$. Tas nozīmē, ka $NB = NC$, no kurienes seko, ka punkts N ir loka $\cup BAC$ viduspunkts.



Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - pierādīts, ka $\triangle DBX \sim \triangle CBD$.
- **1 punkts** - pierādīts, ka $\angle ADB = \angle DXC$.
- **1 punkts** - pierādīts, ka $\angle NBC = \angle ABD$.
- **2 punkti** - risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

11.uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris $\triangle ABC$. Uz malas BC ir izvēlēts patvaļīgs punkts D. Trijstūra $\triangle ADB$ apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AC punktā M, bet trijstūra $\triangle ADC$ apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AB punktā N. Pierādīt, ka trijstūra $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas pieskares, kas vilktas punktos M un N, krustojas punktā, kurš atrodas uz nogriežņa BC.

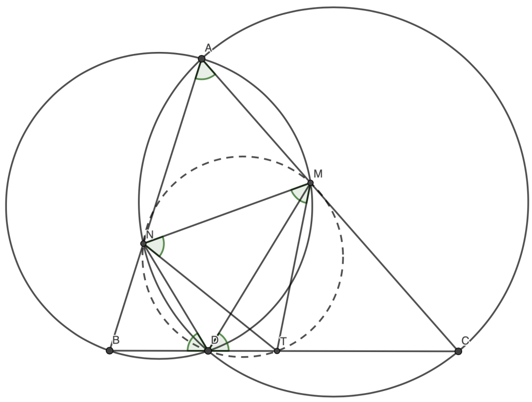
Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $\triangle MND$ apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni BC punktā T.

Tā kā ap četrstūri $ABDM$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BAC = \angle MDC = \angle MDT$. No otras puses, ir zināms, ka ap četrstūri $MNDT$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle MDT = \angle MNT$. Secinām, ka $\angle MNT = \angle BAC$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka TN ir $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas pieskare.

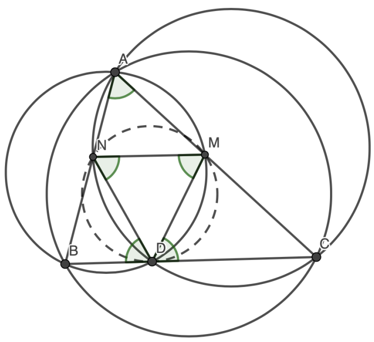
Tā kā ap četrstūri $ANDC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BAC = \angle NDB$. No otras puses, ir zināms, ka ap četstūri $MNDT$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc $\angle NDB = \angle NMT$. Secinām, ka $\angle NMT = \angle BAC$. No apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka MT ir $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Tas nozīmē, ka punkts T ir $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas pieskaru punktos M un N krustpunkts. Tā kā punkts T atrodas uz nogriežņa BC, tad prasītais ir pierādīts.



Apskatīsim gadījumu, kad trijstūra $\triangle MND$ apvilktā riņķa līnija nekrusto nogriezni BC kādā punktā, kas ir atšķirīgs no D. Tādā gadījumā taisne BC ir $\triangle MND$ apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Tā kā ap četrstūriem $AMDB$ un $ANDC$ var apvilkt riņķa līnijas, tad $\angle BAC = \angle MDC = \angle NDB$. Tā kā taisne BC ir $\triangle MND$ apvilktās riņķa līnijas pieskare, tad $\angle MDC = \angle MND = \angle NDB = \angle NMD$. Secinām, ka $\angle BAC = \angle MND = \angle NMD$. Tas nozīmē, ka taisnes DN un DM ir $\triangle AMN$ apvilktās riņķa līnijas pieskares. Tā kā punkts D atrodas uz nogriežņa BC, tad arī šajā gadījumā prasītais ir pierādīts.



Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** - tiek ieviests punkts T, tas ir, $\triangle MND$ apvilktās riņķa līnijas un nogriežņa BC krustpunkts.
- **1 punkts** - pierādīts, ka $\angle NDB = \angle MDC = \angle BAC$.
- **1 punkts** - risinājums tālāk tiek novests līdz beigām.
- **1 punkts** - apskatīts un pierādīts gadījums, kad trijstūra $\triangle MND$ apvilktā riņķa līnija pieskaras nogrieznim BC.

12.uzdevums Dots trijstūris $\triangle ABC$, kura bisektrišu krustpunkts ir I. Tā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AC un AB attiecīgi punktos E un F. Pieņemsim, ka taisnes BI un CI krusto taisni EF attiecīgi punktos Y un Z. Ar M apzīmēsim nogriežņa BC viduspunktu, bet ar punktu N apzīmēsim nogriežņa YZ viduspunktu. Pierādīt, ka $AI \parallel MN$.

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums Risinājums balstās uz sekojošu lemmu.

Lemma: $\angle BYC = 90°$.
Pierādījums: Pieņemsim, ka $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ un $\angle ACB = 2\gamma$. Tādā gadījumā:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180° \implies \alpha + \beta + \gamma = 90°$$

Ievērosim, ka $AF = AE$ kā pieskaru nogriežņi, tāpēc:

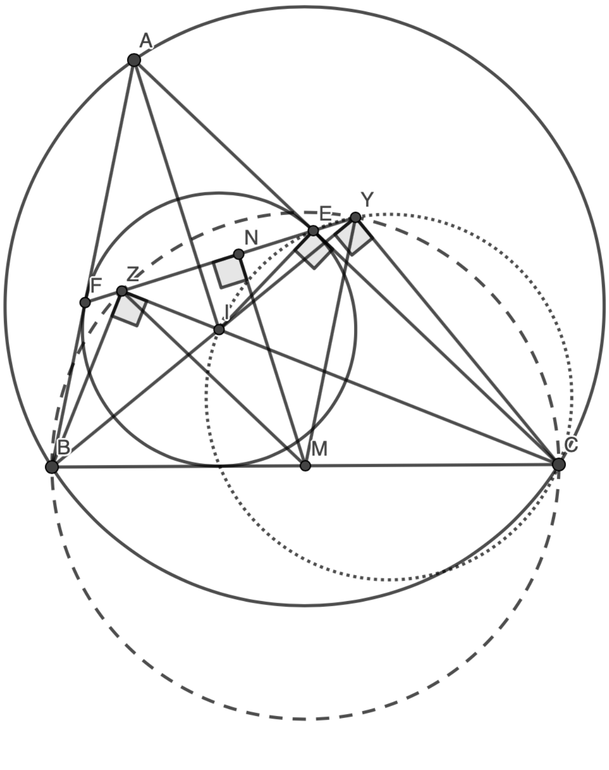
$$\angle AFE = \angle AEF = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle BAC) = 90° - \alpha = \beta + \gamma$$

Atzīmēsim, ka $\angle ABY = \angle FBY = \beta$ un $\angle ECI = \gamma$. Apskatīsim trijstūra $\triangle BFY$ ārējo leņķi:

$$\angle AFY = \angle FBY + \angle EYI \implies \angle EYI = \angle AFY - \angle FBY = \beta + \gamma - \beta = \gamma$$

Tas nozīmē, ka $\angle EYI = \angle ECI = \gamma$, kas ļauj mums secināt, ka ap četrstūri $EYCI$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle IEC = 90°$, jo ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir perpendikulārs pieskarei, tad $\angle IYC = \angle BYC = 90°$, kas arī bija jāpierāda.

Analoģiski var pierādīt, ka $\angle BZC = \angle BYC = 90°$, līdz ar to ap četrstūri $BZYC$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim, ka $BM = MC = MZ = MY$, jo ZM un YM ir mediānas taisnleņķa trijstūros $\triangle BZC$ un $\triangle BYC$. Tas nozīmē, ka $\triangle ZMY$ ir vienādsānu. Tādā gadījumā $MN \perp EF$, jo mediāna vienādsānu trijstūrī ir arī augstums. Ievērosim, ka $AI \perp EF$, jo AI ir leņķa $\angle BAC$ bisektrise vienādsānu trijstūrī $\triangle AFE$. Secinām, ka $(AI \parallel MN) \perp EF$, kas arī bija jāpierāda.



Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** - pierādīta lemma.
  - ⋆ **2 punkti** - pierādīts, ka ap četrstūri $IEYC$ var apvilkt riņķa līniju.
  - ⋆ **1 punkts** - lemmas pierādījums tālāk tiek novests līdz galam.
- **1 punkts** - pierādīts, ka trijstūris $\triangle YMZ$ ir vienādsānu.
- **1 punkts** - risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

13.uzdevums Sauksim naturālu skaitļu pāri (a, b) par *draudzīgu*, ja skaitlis $ab + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Atrast visus naturālus skaitļus n, kuriem skaitļu kopu $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ var sadalīt n *draudzīgu* skaitļu pāros.

Folklora

Atrisinājums. Apskatīsim gadījumu, kad n ir pāra skaitlis. Tādā gadījumā $n = 2k$, kur k ir naturāls skaitlis. Pierādīsim, ka kopu $S = \{1, 2, \ldots, 4k-1, 4k\}$ var sadalīt $2k$ *draudzīgu* skaitļu pāros. Ievērosim, ka naturāliem skaitļiem a un $a+2$ ir spēkā īpašība, ka:

$$a(a+2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

Tas nozīmē, ka kopu $S_i = \{i, i+1, i+2, i+3\}$ var sadalīt 2 *draudzīgos* pāros $(i, i+2)$ un $(i+1, i+3)$. Tā kā

$$S = S_1 \cup S_5 \cup \cdots \cup S_{4k-3},$$

tad esam ieguvuši meklēto sadalījumu $2k$ *draudzīgos* pāros.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad n ir nepāra skaitlis. Tādā gadījumā $n = 2k + 1$, kur k ir naturāls skaitlis, Pierādīsim, ka kopu $S = \{1, 2, \ldots, 4k, 4k+1, 4k+2\}$ nevar sadalīt $2k+1$ *draudzīgu* skaitļu pāros.

Apgalvojums: Skaitlis $a \equiv 2 \pmod 4$ var būt tikai pārī ar skaitli $b \equiv 0 \pmod 4$.
Pierādījums: Apskatīsim patvaļīgu skaitli $a \equiv 2 \pmod 4$ un skaitli b, ar ko tas var būt pārī:

- Ja $b \equiv 1 \pmod 4$, tad $ab+1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3 \pmod 4$. Taču tādā gadījumā skaitlis $ab+1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, jo naturālo skaitļu kvadrāti dod tikai atlikumus 0 vai 1, dalot ar 4.

- Ja $b \equiv 3 \pmod 4$, tad $ab + 1 \equiv 2 \cdot 3 + 1 \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$. Taču tādā gadījumā skaitlis $ab + 1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, jo naturālo skaitļu kvadrāti dod tikai atlikumus 0 vai 1, dalot ar 4.

- Ja $b \equiv 2 \pmod 4$, tad skaitļus a un b mēs varam uzrakstīt formā $a = 4m + 2$ un $b = 4n + 2$, kur m, n ir veseli skaitļi. Tādā gadījumā:

  $$ab + 1 = (4m+2)(4n+2) + 1 = 16mn + 8m + 8n + 5 \equiv 5 \pmod 8$$

  Taču naturāla skaitļa kvadrāti dod tikai atlikumus $0, 1, 4$, dalot ar 8, tāpēc $ab+1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Ievērosim, ka kopā S ir $\lfloor \frac{4k+2}{4} \rfloor = k$ naturāli skaitļi, kuri dalās ar 4, bet $k+1$ naturāli skaitļi, kuri, dod atlikumu 2, dalot ar 4. Tas nozīmē, ka vienam no šiem $k+1$ skaitļiem nebūs attiecīgā skaitļa pārī. Līdz ar to varam secināt, ka gadījumā, kad $n = 2k + 1$, uzdevumā prasīto izdarīt nevarēs, kas arī bija jāpierāda.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - pierādīta konstrukcija priekš gadījuma, kad n ir pāra skaitlis.
- **2 punkti** - pierādīts apgalvojums.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīti gadījumi, kad $b \equiv 1 \pmod 4$ **un** $b \equiv 3 \pmod 4$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts gadījums, kad $b \equiv 2 \pmod 4$.
- **2 punkti** - gala spriedums, kāpēc pie nepāra n skaitļus nevarēs sadalīt vajadzīgajos pāros.

14.uzdevums Doti 20 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 397, apzīmēsim to kopu ar A. Pierādīt, ka jebkuram naturālam n var no kopas A izvēlēties četrus (ne noteikti dažādus) elementus x_1, x_2, x_3, x_4, kuriem $x_1 \neq x_2$ un

$$(x_1 - x_2)n \equiv x_3 - x_4 \pmod{397}.$$

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums. Ievērosim, ka 397 ir pirmskaitlis. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad n ir skaitļa 397 daudzkārtnis. Tādā gadījumā prasīto kongruenci var pārrakstīt sekojoši:

$$x_3 - x_4 \equiv n(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{397}$$

Iegūto kongruenci var apmierināt, ja $x_3 = x_4$. Tādā gadījumā skaitļu x_1, x_2 izvēle ir patvaļīga, izņemot nosacījumu, ka tie nav vienādi. Secinām, ka šajā gadījumā uzdevuma prasīto var izdarīt.

Apskatīsim gadījumu, kad skaitlis n nedalās ar 397. Pārrakstīsim doto kongruenci sekojoši:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)n &\equiv x_3 - x_4 \pmod{397}\\ nx_1 + x_4 &\equiv nx_2 + x_3 \pmod{397}\end{aligned}$$

Ievērosim, ka eksistē $20 \cdot 20 = 400$ dažādu skaitļu pāru (x_i, x_j) ar īpašību, ka abi skaitļi pieder kopai A. Taču pie fiksēta n izteiksme $nx_i + x_j$ var pieņemt tikai 397 vērtības pēc moduļa 397, tas ir vērtības $0, 1, 2, \ldots, 396$. Pēc Dirihlē principa tādā gadījumā izriet, ka eksistē 2 dažādi skaitļu pāri (x_i, x_j) un (x_m, x_n) ar īpašību, ka:

$$nx_i + x_j \equiv nx_m + x_n \pmod{397}$$

Mēs varam paņemt, ka $x_i = x_1, x_m = x_2$ un $x_j = x_4$, $x_n = x_3$. Atliek pierādīt, ka $x_1 \neq x_2$, kam ir jāizpildās pēc uzdevuma nosacījumiem. Pieņemsim pretējo, ka $x_1 = x_2$, tad:

$$\begin{aligned} nx_1 + x_4 &\equiv nx_2 + x_3 \pmod{397}\\ \implies 0 \equiv n(x_1 - x_2) &\equiv x_3 - x_4 \pmod{397}\\ \implies x_3 &\equiv x_4 \pmod{397}\end{aligned}$$

Tā kā $x_3, x_4 \leq 397$, tad secinām, ka $x_3 = x_4$, taču tādā gadījumā atrastie pāri (x_i, x_j) un (x_m, x_n) ir vienādi, kas ir pretrunā ar to, ka tie ir dažādi. Līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams un $x_1 \neq x_2$. Meklētie skaitļi ir atrasti.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** - pierādīts gadījums, kad skaitlis n ir skaitļa 397 daudzkārtnis.
- **4 punkti** - pierādīts gadījums, kad skaitlis n nedalās ar 397.
  - ⋆ **1 punkts** - kongruence pārveidota formā $nx_1 + x_4 \equiv nx_2 + x_3 \pmod{397}$
  - ⋆ **2 punkti** - spriedums par to, ka eksistēs 2 dažādi skaitļu pāri (x_i, x_j) un (x_m, x_n), kuriem ir spēkā īpašība, ka $nx_i + x_j \equiv nx_m + x_n \pmod{397}$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka $x_1 \neq x_2$.

15.uzdevums Katram nenegatīvam veselam skaitlim i ar d_i apzīmēsim skaitļa 2^i pirmo ciparu. Pierādīt, ka ikkatram naturālam skaitlim n eksistē cipars, kas virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ ir sastopams mazāk nekā $\frac{n}{17}$ reizes.

BW 2021 Shortlist

Atrisinājums. Acīmredzami, ka apgalvojums izpildās, ja $n = 1$, tādēļ pieņemsim, ka $n \geq 2$. Ar k apzīmēsim reižu skaitu, cik reizes virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ parādās cipars, kurš sastopams visretāk.

Tādā gadījumā ciparu $5, 6, 7, 8, 9$ kopējais virknē parādīšanās reižu skaits ir vismaz $5k$. Varam ievērot, ka pēc jebkura cipara $5, 6, 7, 8, 9$ nākamais cipars ir 1, tādēļ 1 šajā virknē parādās arī vismaz $5k$ reižu. Vienīgais izņēmums varētu būt, ja kāds no cipariem $5, 6, 7, 8, 9$ ir pēdējais virknes cipars, taču to kompensē tas, ka virkne sākas ar vieninieku.

Papildus tam varam ievērot, ka pēc jebkura cipara 1 nākamais būs vai nu cipars 2, vai 3. Tātad šo ciparu kopējais parādīšanās biežums arī ir vismaz $5k$ reižu. Izņēmums ir tad, ja pēdējais virknes cipars ir 1, taču tādā gadījumā no mūsu iepriekšējās rindkopas sprieduma var secināt, ka cipars 1 virknē parādās vismaz $5k + 1$ reizi, jo jāņem vērā vēl virknes pirmais cipars, kas ir 1.

No šiem spriedumiem varam secināt, ka vienīgā vēl nenosauktā cipara 4 parādīšanās reižu skaits nevar būt lielāks par $n - 15k$. Tā kā cipari 8 un 9 var parādīties tikai pēc cipara 4, šo ciparu kopējais parādīšanās reižu skaits arī nav lielāks par $n - 15k$. Bet abi šie cipari kopā parādās virknē vismaz $2k$ reižu, tādēļ $n - 15k \geq 2k \implies k \leq \frac{n}{17}$.

Lai pierādītu, ka iegūtā nevienādība ir stingra, pieņemsim pretējo, ka eksistē kāda n vērtība, kurai $n = 17k$. Tas nozīmē, ka visos iepriekšējos spriedumos iegūtajām nestingrajām nevienādībām ir jābūt vienādībām. Līdz ar to katrs no cipariem $5, 6, 7, 8, 9$ virknē parādās tieši k reižu un cipars 1 parādās tieši $5k$ reižu. Tā kā $d_3 = d_{13} = d_{23} = 8$, tad cipars 8 parādās vairāk par vienu reizi virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{17-1}$ un vairāk nekā divas reizes virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{17-1}$. Tātad $k \geq 3$.

Pierādīsim, ka ikvienā 17 secīgu virknes locekļu apakšvirknē vismaz 5 reizes parādās cipars 1. Tā kā skaitļiem $2^i, 2^{i+1}, \ldots, 2^{i+16}$ pirmais skaitlis ir tieši 65536 reižu mazāks par pēdējo skaitli, tad pēdējam skaitlim ir vismaz par 4 cipariem vairāk nekā pirmajam skaitlim. Tā kā mazākā divnieka pakāpe, kurai ir noteikts ciparu skaits, noteikti sākas ar ciparu 1, tad starp skaitļiem $2^i, 2^{i+1}, \ldots, 2^{i+16}$ vismaz 4 pirmais cipars ir 1. Ja 2^i pirmais cipars ir 1, tad acīmredzami ir vismaz 5 skaitļi ar pirmo ciparu 1, bet, ja 2^i pirmais cipars ir lielāks par 1, tad pēdējam skaitlim ir vismaz par 5 cipariem vairāk par pirmo, tādēļ tāpat starp skaitļiem ir vismaz 5 ar pirmo ciparu 1.

Atliek ievērot, ka virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{3\cdot17-1}$ cipars 1 parādās vismaz 16 reižu, jo

$$2^{3\cdot17-1} = 2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 > (10^3)^5 = 10^{15},$$

kas nozīmē, ka skaitlim $2^{3\cdot17-1}$ ir vismaz 16 ciparu. Tā kā jebkurā apakšvirknē $d_{17i}, d_{17i+1}, \ldots, d_{17(i+1)-1}$ cipars 1 parādās vismaz 5 reizes, tad virknē $d_0, d_1, \ldots, d_{17k-1}$ cipars 1 parādās vairāk nekā $5k$ reižu, kas ir pretruna ar pieņēmumu un pierāda, ka $k < \frac{n}{17}$.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** - iegūts novērtējums $k \leq \frac{n}{17}$ vai kāds līdzīgs nestingrs novērtējums.
  - ⋆ **1 punkts** - iegūts, ka cipars 1 parādās vismaz $5k$ reižu.
  - ⋆ **1 punkts** - no augšas novērtē ciparu 8 un 9 biežumu.
  - ⋆ **1 punkts** - iegūst novērtējumu.
- **2 punkti** - iegūts stingrs novērtējums (ja uzreiz tiek iegūts stingrs novērtējums, tad summējas klāt iepriekšējie 3 punkti).
  - ⋆ **1 punkts** - iegūst, ka jebkurā apakšvirknē ar garumu 17 ir vismaz pieci cipari 1.
  - ⋆ **1 punkts** - secina, ka nevienādībai jābūt stingrai.

Dalībniekam tiek atņemts **1 punkts**, ja kāds no novērtējumiem nav precīzs (piemēram, nepaskaidro pirmā cipara 1 ņemšanu vērā) **vai** arī uzdevuma otrajā daļā neuzrāda skaitliskās vērtības novērtējumu stingrībai.

16.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, p), kur p ir pirmskaitlis, ar īpašību, ka abi skaitļi $a+b$ un $ab+1$ ir skaitļa p pakāpes ar naturāliem kāpinātājiem (ne obligāti vienādiem)

Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs

Atrisinājums. Apskatīsim gadījumu, kad p ir nepāra skaitlis. Pieņemsim, ka $ab + 1 = p^v$ un $a + b = p^u$. Acīmredzami, ka $v \geq u$. Ievērosim, ka:

$$ab + 1 + a + b = (a + 1)(b + 1) = p^u(p^{v-u} + 1)$$
$$ab + 1 - a - b = (a - 1)(b - 1) = p^u(p^{v-u} - 1)$$

Apgalvojums: Tikai skaitļi $a + 1, b - 1$ vai arī $a - 1, b + 1$ dalās ar p.
Pierādījums: Ievērosim, ka $a+1$ un $a-1$ nevar vienlaicīgi dalīties ar p, jo pretējā gadījumā p dala $a + 1 - (a - 1) = 2$, kas ir pretrunā ar to, ka p ir nepāra pirmskaitlis. Atzīmēsim arī, ka $a + 1$ un $b + 1$ nevar vienlaicīgi dalīties ar p, jo tādā gadījumā to summa $a + b + 2$ arī dalās ar p. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $a + b$ dalās ar p, jo $a + b = p^u$, taču tādā gadījumā 2 dalās ar p, kas ir pretrunā ar to, ka p ir nepāra pirmskaitlis. Analoģisku spriedumu var veikt, lai secinātu, ka skaitļi $a - 1$ un $b - 1$ arī nevar dalīties vienlaicīgi ar p. Secinām, ka tikai skaitļi $a + 1, b - 1$ vai $a - 1, b + 1$ var dalīties ar p, kas arī bija jāpierāda.

Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $a + 1, b - 1$ dalās ar p. Otrs gadījums ir analoģisks. Tādā gadījumā $\nu_p(a + 1) = \nu_p(b - 1) = u$, kur ar $\nu_p(x)$ tiek apzīmēta augstākā pirmskaitļa p pakāpe, ar ko dalās x. Tādā gadījumā:

$$a + 1 = p^u x \quad \text{un} \quad b - 1 = p^u y,$$

kur x, y ir nenegatīvi veseli skaitļi, kas nedalās ar p. Ievietojot to iepriekš iegūtajās sakarībās, iegūsim, ka:

$$p^u x(p^u y + 2) = p^u(p^{v-u} + 1) \implies p^u xy + 2x = p^{v-u} + 1$$
$$p^u y(p^u x - 2) = p^u(p^{v-u} - 1) \implies p^u xy - 2y = p^{v-u} - 1$$

Atņemot savā starpā pēdējos 2 vienādojumus, iegūsim, ka:

$$2x + 2y = 2 \implies x + y = 1$$

Atcerēsimies, ka $a = p^u x - 1$ un $b = p^u y + 1$ ir naturāli skaitļi. Tādā gadījumā sakarība $x + y = 1$ var būt apmierināta tad un tikai tad, ja $x = 1, y = 0$. Tas dod mums trijnieku $(a, b, p) = (p^u - 1, 1, p)$, kur u ir patvaļīgs naturāls skaitlis.
Samainot vietām a, b (ko drīkst darīt, jo sakarības ir simetriskas attiecībā pret a, b), var atrisināt otro gadījumu (kad $a-1$ un $b+1$ dalās ar p) un iegūt trijnieku $(a, b, p) = (1, p^u-1, p)$, kur u ir patvaļīgs naturāls skaitlis.

Atliek atrisināt gadījumu, kad $p = 2$. Pieņemsim, ka $ab + 1 = 2^v$, $a + b = 2^u$. Acīmredzami, ka $v \geq u$ un skaitļi a, b ir nepāra. Ievērosim, ka:

$$ab + 1 + a + b = (a + 1)(b + 1) = 2^u(2^{v-u} + 1)$$
$$ab + 1 - a - b = (a - 1)(b - 1) = 2^u(2^{v-u} - 1)$$

Atzīmēsim, ka viens no skaitļiem $a + 1, a - 1$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4. Ja $u = 1$, tad viegli iegūt, ka $a = b = 1$, tāpēc pieņemsim, ka $u > 1$. Tādā gadījumā viens no skaitļiem $a+1$ un $b+1$ nedalās ar 4, jo pretējā gadījumā skaitlis 4 dala $(a+1)+(b+1) = 2^u+2$, kas acīmredzami ar 4 nedalās. Tas nozīmē, ka:

$$\nu_2(a + 1) = \nu_2(b - 1) = u - 1 \quad \text{vai} \quad \nu_2(a - 1) = \nu_2(b + 1) = u - 1$$

Apskatīsim otro gadījumu, pirmais ir analoģisks. Tādā gadījumā:

$$a - 1 = 2^{u-1}x \quad \text{and} \quad b + 1 = 2^{u-1}y,$$

kur x, y ir nenegatīvi nepāra skaitļi. Ievietojot to iepriekš iegūtajās sakarībās, iegūsim, ka:

$$2^{u-1}y(2^{u-1}x+2) = 2^u(2^{v-u}+1) \implies 2^{u-2}xy + y = 2^{v-u}+1$$
$$2^{u-1}x(2^{u-1}y-2) = 2^u(2^{v-u}-1) \implies 2^{u-2}xy - x = 2^{v-u}-1$$

Atņemot savā starpā pēdējos 2 vienādojumus, iegūsim, ka:

$$x + y = 2$$

Pēdējā sakarība var būt apmierināta tad un tikai tad, ja $x = 0, y = 2$ vai $x = y = 1$. Šie 2 gadījumi dod mums atrisinājumus $(a, b, p) = (1, 2^u, 2)$ un $(a, b, p) = (2^u + 1, 2^u - 1, 2)$, kur u ir patvaļīgs naturāls skaitlis.
Samainot vietām a, b (ko drīkst darīt, jo visas sakarības ir simetriskas attiecībā pret a, b), iegūsim atbildes priekš otrā gadījumā.

Visi gadījumi ir apskatīti un uzdevums ir atrisināts.

Vērtēšanas kritēriji. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** - atrisināts gadījums, kad p ir nepāra pirmskaitlis.
  - ⋆ **1 punkts** - iegūts, ka $(a+1)(b+1) = p^u(p^{v-u}+1)$ **un** $(a-1)(b-1) = p^u(p^{v-u}-1)$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka $\nu_p(a+1) = \nu_p(b-1) = u$ **vai** $\nu_p(a-1) = \nu_p(b+1) = u$.
  - ⋆ **1 punkts** - risinājums tālāk tiek novests līdz beigām.
- **2 punkti** - atrisināts gadījums, kad $p = 2$.
  - ⋆ **1 punkts** - pierādīts, ka $\nu_2(a+1) = \nu_2(b-1) = u-1$ **vai** $\nu_2(a-1) = \nu_2(b+1) = u-1$.
  - ⋆ **1 punkts** - risinājums tālāk tiek novests līdz beigām.

Dalībniekam tiek atņemts **1 punkts**, ja nav uzrādīta/pieminēta kāda no atbildēm.