# Baltijas ceļa atlases 2021 atrisinājumi

**P1** Reāliem pozitīviem skaitļiem $a$, $b$ un $c$ ir spēkā sakarība $abc = 1$ . Pierādiet, ka

$$\frac{a}{b(1+c)} + \frac{b}{c(1+a)} + \frac{c}{a(1+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**P1 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** No Titu lemmas izriet, ka:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b(1+c)} + \frac{b}{c(1+a)} + \frac{c}{a(1+b)} &= \\ = \frac{a^2}{ab+abc} + \frac{b^2}{bc+abc} + \frac{c^2}{ca+abc} &\geq \\ \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3abc} & \end{aligned}$$

Līdz ar to ir pietiekami pierādīt, ka:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3abc} \geq \frac{3}{2} \quad (\star)$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3abc} &\geq \frac{3}{2} \\ 2(a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca+3abc) \\ 2(a^2+b^2+c^2) + 4(ab+bc+ca) &\geq 3(ab+bc+ca) + 9abc \\ 2(a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca &\geq 9abc = 9 \\ 2(a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca &\geq 9 \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Savukārt no AM-GM nevienādības izriet, ka:

$$\begin{aligned} 2(a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca &= \\ = a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca &\geq \\ \geq 9\sqrt[9]{a^6b^6c^6} &= \\ = 9\sqrt[9]{1} = 9 & \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka nevienādība $(\star\star)$ ir patiesa. Tā kā šī nevienādība ir ekvivalenta ar $(\star)$, tad varam secināt, ka arī dotā nevienādība ir patiesa, kas arī bija jāpierāda.

**Piezīme:** Titu lemma ir Koši nevienādības speciālgadījums priekš daļveida izteiksmēm. Lemma ir sekojoša. Doti reāli pozitīvi skaitļi $a_1; a_2; \ldots; a_n$ un $b_1; b_2; \ldots; b_n$. Tiem ir patiesa sekojoša nevienādība:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

**P2** Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, kas definētas reāliem skaitļiem, izņemot nulli, pieņem reālas vērtības un kurām visiem reāliem nenulles $x$ ir spēkā nevienādības

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - f(x) \geq x^2 f(x).$$

**P2 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Dotajā sakarībā

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - f(x) \geq x^2 f(x)$$

aizvietojot $x$ ar $\frac{1}{x}$, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) \geq 1 - f\left(\frac{1}{x}\right) &\geq \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} \\ f(x) \geq 1 - f\left(\frac{1}{x}\right) &\geq \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} \\ x^2 f(x) \geq x^2 - x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) &\geq f\left(\frac{1}{x}\right) \\ x^2 f(x) &\geq f\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Izmantojot uzdevumā dotā sakarību, varam secināt, ka:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - f(x) \geq x^2 f(x) \geq f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Tas nozīmē, ka:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - f(x) = x^2 f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Līdz ar to:

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= x^2 f(x) \\ 1 &= (1 + x^2) f(x) \\ f(x) &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Atliek pārliecināties, ka iegūtā funkcija patiešām apmierina uzdevumā doto sakarību:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &\geq 1 - f(x) \geq x^2 f(x) \\ \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} &\geq 1 - \frac{1}{1 + x^2} \geq \frac{x^2}{1 + x^2} \\ \frac{x^2}{x^2 + 1} &\geq \frac{x^2}{x^2 + 1} \geq \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Tātad vienīgā funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus katram reālam nenulles skaitlim $x$, ir $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**P3** Atrast visus reālu skaitļu trijniekus $(x, y, z)$, kas apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^3 + y = z^2 \\ y^3 + z = x^2 \\ z^3 + x = y^2. \end{cases}$$

**P3 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Ievērosim, ka ne vairāk kā 1 skaitlis starp skaitļiem $x, y, z$ ir negatīvs. Patiešām, ja būtu 2 negatīvi skaitļi, teiksim, $x, y$, tad:

$$0 > x^3 + y = z^2 \geq 0$$

kas ir acīmredzama pretruna. Apskatīsim gadījumu, kad kāds no skaitļiem $x, y, z$ ir 0, piemēram, $z = 0$ (sistēma ir cikliska, tādēļ nezaudējam vispārīgumu). Tādā gadījumā dotā vienādojuma sistēma kļūst par:

$$x^3 = -y \quad \text{un} \quad y^3 = x^2 \quad ,\text{un} \quad y^2 = x$$

Kāpinot pirmā vienādojuma abas puses kubā, iegūsim, ka:

$$x^9 = -y^3 = -x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 0, -1$$

Ja $x = -1$, tad $x^3 = -y = -1 \implies y = 1$. Taču tādā gadījumā $y^2 = 1 = x = -1$ - pretruna. Gadījumā, ja $x = 0$, var viegli iegūt, ka $y = 0$. Tādējādi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ir sistēmas atrisinājums.

Līdz ar to starp skaitļiem $x, y, z$ vai nu visi ir pozitīvi, vai arī tieši viens ir negatīvs. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad visi skaitļi $x, y, z$ ir pozitīvi. Tādā gadījumā, saskaitot sistēmas vienādojumus kopā, iegūsim, ka:

$$x^3 + x + y^3 + y + z^3 + z = x^2 + y^2 + z^2$$
$$x\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + y\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + z\left(\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = 0$$

Tā kā skaitļi $x, y, z$ ir pozitīvi, tad viegli ievērot, ka ikkatrs saskaitāmais pēdējās sakarības kreisajā pusē ir lielāks par 0, tāpēc kreisā puse vienmēr ir lielāka par 0 - pretruna. Līdz ar to varam secināt, ka skaitļi $x, y, z$ nevar būt visi vienlaicīgi pozitīvi.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad divi no skaitļiem $x, y, z$ ir pozitīvi un viens ir negatīvs, piemēram, $x, y > 0$ un $z < 0$. Tādā gadījumā:

$$0 > z = x^2 - y^3 \Longrightarrow y^3 > x^2 \quad (1)$$
$$0 > z^3 = y^2 - x \Longrightarrow x > y^2 \quad (2)$$

Tā kā skaitlis $x$ ir pozitīvs, tad nevienādības (2) abas puses var sareizināt ar to un iegūt, ka:

$$y^3 > x^2 > xy^2$$
$$y^3 > xy^2$$
$$y^2(y - x) > 0$$

Tā kā $y^2 > 0$, tad, lai pēdējā nevienādība būtu patiesa, ir jāizpildās sakarībai $y - x > 0 \Longrightarrow \quad y > x$. No otras puses, no sistēmas 1.vienādojuma atņemot sistēmas 3.vienādojumu, iegūsim, ka:

$$x^3 - z^3 + y - x = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) \quad (3)$$

Ievērosim, ka $x^3 > 0$, $-z^3 > 0$ un $y - x > 0$, kas nozīmē, ka sakarības (3) kreisā puse ir pozitīva. Tādā gadījumā šīs sakarības labajai pusei arī jābūt pozitīvai, tas ir, $(z+y)(z-y) > 0$. Ievērosim, ka $z - y < 0$, līdz ar to $z + y < 0 \implies -z > y > x$.

Veiksim sekojošu substitūciju $-z = t$. Tādā gadījumā sistēmas sākotnējos vienādojumus var pārrakstīt šādi:

$$x^3 + y = t^2$$
$$y^3 - t = x^2$$
$$-t^3 + x = y^2$$

Tā kā $t = -z > y > x > 0$, tad $t^3 > y^3$, līdz ar to no pārveidotās sistēmas 2.vienādojuma iegūstam, ka:

$$t^3 - t > y^3 - t = x^2 > 0$$
$$t^3 - t > 0 \quad (4)$$

No otras puses, no sistēmas 3.vienādojuma, izmantojot sakarību $t = -z > y > x > 0$, iegūsim, ka:

$$t - t^3 > -t^3 + x = y^2 > 0$$
$$t - t^3 > 0$$
$$t^3 - t < 0 \quad (5)$$

Līdz ar to no sakarībām (4) un (5) iegūstam, ka:

$$t^3 - t > 0 > t^3 - t$$

kas ir acīmredzama pretruna. Tādēļ sistēmas vienīgais atrisinājums ir $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

**P4** Atrast mazāko naturālo skaitli $k$, kuram izpildās sekojoša īpašība: lai kādus trīs punktus ar veselām koordinātām mēs izvēlētos koordinātu plaknē,

$$L_{max} - L_{min} \geq \frac{1}{\sqrt{k} \cdot L_{max}},$$

kur $L_{max}$ un $L_{min}$ ir attiecīgi lielākais un mazākais attālums starp šiem trīs punktiem.

**P4 atrisinājums (Ilmārs Štolcers)** Veiksim pāris būtiskus novērojumus:

- Abi skaitļi $L_{max}$ un $L_{min}$ ir kaut kādu naturālu skaitļu kvadrātsaknes. Tas izriet no tā, ka šos skaitļus var izteikt formā $\sqrt{x^2+y^2}$, kur $x, y$ ir trijstūru malu projekciju garumi uz attiecīgajām koordinātu asīm (attiecīgi naturāli skaitļi). Pie tam šīs saknes vērtība var būt arī naturāls skaitlis, ja zemsaknes izteiksme ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

- Ievērosim, ka skaitlis $L_{max}$ vienmēr ir stingri lielāks par skaitli $L_{min}$, jo koordinātu plaknē trijstūra laukums, ko veido punkti ar veselām koordinātām, ir vienmēr racionāls (tas redzams, ja apvelk ap trijstūri rūtiņu taisnstūri un no tā laukuma atņem liekos taisnleņķa trijstūrus ar naturāliem katešu garumiem), kamēr vienādmalu trijstūra laukums vienmēr ir iracionāls (no laukuma formulas $S = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, kur $a$ - malas garums).

  Pie tam $a\sqrt{3}$ nevar būt naturāls, jo, pārrakstot $a = \sqrt{x^2+y^2}$, tad būtu jābūt, ka $x^2+y^2$ dalās ar skaitļa 3 nepāra pakāpi. Taču, aplūkojot šo izteiksmi pēc moduļa 3, tā var dalīties ar 3 tikai gadījumos, ja abi $x, y$ dalās ar 3. Bet tad $x^2+y^2 = 3^2(x_1^2+y_1^2)$, un $x_1^2+y_1^2$ $(x_1 < x,\ y_1 < y)$ var pielietot šo pašu argumentu, līdz tiek sasniegts skaitlis, kas nedalās ar 3. Tātad izteiksme dalās ar skaitļa 3 pāra pakāpi. Tādēļ nav iespējams, ka $a\sqrt{3}$ būs naturāls $\Longrightarrow$ tas būs iracionāls.

- Pētot mazākus trijstūrus, var viegli iegūt, ka $k \geq 4$, ko var sasniegt, apskatot trijstūri $A(0;0), B(0;2), C(2;1)$. To var pārbaudīt, novērtējot $\sqrt{5} > 2.23$ un $\sqrt{3} > 1.7$.

Pierādīsim, ka $k = 4$ apmierina uzdevumā minēto nevienādību. Pārrakstīsim doto nevienādību sekjoši:

$$L_{max}^2 - L_{max}L_{min} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Apzīmēsim $L_{max} = \sqrt{a}$, $L_{min} = \sqrt{a-b}$, $b < a$, $a, b \in \mathbb{N}$. Tādā gadījumā mums ir jāpierāda, ka:

$$a - \sqrt{a(a-b)} \geq \frac{1}{2}$$

Taču ievērosim, ka:

$$a - \sqrt{a(a-b)} \geq a - \sqrt{a(a-1)}$$

Līdz ar to ir pietiekami pierādīt, ka:

$$a - \sqrt{a(a-1)} \geq \frac{1}{2}$$

Kāpinot abas nevienādības puses kvadrātā, iegūsim, ka ir jāpierāda:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq a(a-1)$$

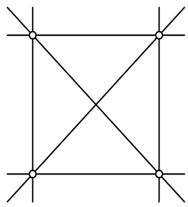
Atverot iekavas, varam secināt, ka:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq a(a-1)$$
$$a^2 - a + \frac{1}{4} \geq a^2 - a$$
$$\frac{1}{4} \geq 0$$

Pēdējā nevienādība acīmredzami ir patiesa. Tā kā dotajai nevienādībai ekvivalentā nevienādība ir patiesa, tad varam secināt, ka arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

**P5** Telpā novilktas sešas taisnes. Noskaidrojiet, kāds ir lielākais iespējamais punktu skaits, kurās krustojas vismaz trīs no tām.

**P5 atrisinājums (Milana Komisarova, Kims Georgs Pavlovs)** Maksimālais punktu skaits, caur kuriem iet vismaz 3 taisnes, ir 4. To var sasniegt, kā parādīts 1.attēlā.



1.att.

Pierādīsim, ka šis ir lielākais šādu punktu skaits. Punktu sauksim par *skaistu*, ja caur to iet vismaz 3 taisnes. Apskatīsim, cik ir tādu pāru $(P; l)$, kur $P$ ir *skaists* punkts, bet $l$ taisne, kas iet caur to. Pieņemsim, ka *skaisto* punktu skaits ir vismaz $n$. Tā kā caur katru *skaisto* punktu iet vismaz 3 taisnes, tad $(P; l) \geq 3n$.

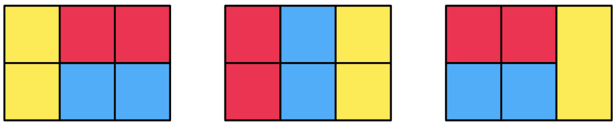
Pierādīsim, ka uz katras taisnes atrodas ne vairāk kā 2 *skaistie* punkti. Patiešām, ja uz kādas taisnes atrastos vismaz 3 *skaistie* punkti, caur katru no tiem ietu vismaz 2 taisnes, kas visas savā starpā būtu dažādas, jo divas nesakrītošas taisnes krustojas ne vairāk kā 1 punktā. Tad būtu nepieciešamas vēl vismaz $2 \cdot 3 = 6$ taisnes, lai tas izpildītos, bet tādā gadījumā kopējais taišņu skaits pārsniegtu $1 + 3 \cdot 2 = 7$ - pretruna. Tas nozīme, ka uz katras no 6 taisnēm ir ne vairāk kā 2 *skaistie* punkti. Šī iemesla dēļ $(P; s) \leq 2 \cdot 6 = 12$. Esam ieguvuši, ka:

$$12 \geq (P; s) \geq 3n \Longrightarrow 4 \geq n$$

Prasītais ir pierādīts.

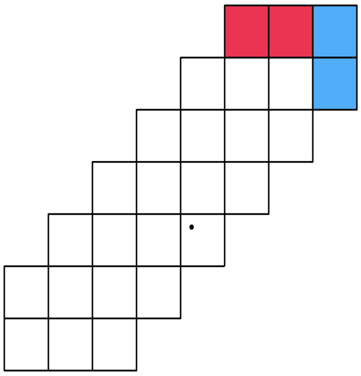
**P6** Par domino sauksim $1 \times 2$ rūtiņu taisnstūri, tas var būt arī pagriezts. Pierādīt, ka rūtiņu lapā eksistē tāds daudzstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var noklāt ar domino tieši 2021 dažādā veidā.

**P6 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Ievērosim, ka taisntūri $2 \times 3$ var sagriezt domino kauliņos 3 dažādos veidos, kā parādīts 1.attēlā.



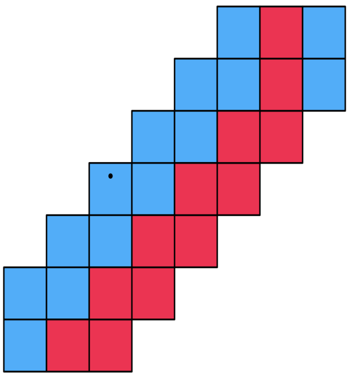
1.att.

Tālāk šim taisnstūrim labajā augšējā stūrī pieliksim apgrieztu $L$ burta figūru (tas sākumā tiek simetriski attēlots pret vertikāli un tad pagriezts par 90° pretēji pulksteņrādītāja virzienam). Jauniegūtajai figūrai atkal labajā augšējā stūrī pieliksim apgrieztu $L$ burta figūru. Šo procesu atkārtosim $n$ reizes. Pieņemsim, ka iegūto figūru var sagriezt domino kauliņos $F_{n+1}$ veidos. Pierādīsim, ka $F_{n+1} = F_n + 2$. Ievērosim, ka, ja tiek veikti pirmie griezieni, kā parādīts 2.attēlā, tad mēs zinām, ka atlikušo figūru var sagriezt $F_n$ veidos.

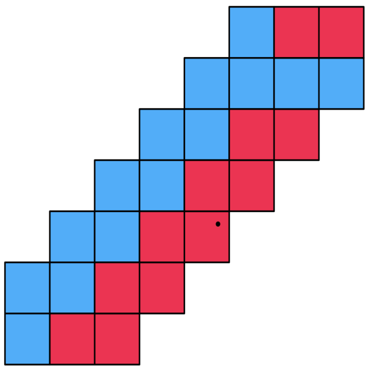


2.att.

Pretējā gadījumā varam viegli ievērot, ka jauniegūto figūru var sagriezt 2 unikālos veidos, kā parādīts 3.attēlā un 4.attēlā (sākot no augšējā labā stūra un secīgi aizpildot figūru - katram jaunam domino kauliņam būs noteikta pozīcija, lai figūrā nepaliktu izolētas rūtiņas).



3.att.



4.att.

Līdz ar to no saskaitīšanas likuma izriet, ka $F_{n+1} = F_n + 2$. Ievērosim, ka $F_1 = 3$. Šī iemesla dēļ $F_{1010} = 3 + 2 \cdot 1009 = 2021$, un uzdevums ir atrisināts.

**P7** Futbola treniņā piedalījās 22 futbolisti, uz katru spēli tos sadalīja vienāda izmēra komandās (11 : 11). Zināms, ka katrs futbolists ar katru vismaz reizi spēlēja pretējās komandās. Kāds ir mazākais iespējamais skaits spēļu, ko viņi izspēlēja šajā treniņā?

**P7 atrisinājums (Artis Vijups)** Mazākais iespējamais treniņā izspēlēto spēļu skaits ir 5.

Pierādīsim, ka ar 4 spēlēm nepietiek. Pieņemsim, ka notika 4 spēles. Pieņemsim arī, ka pēc katra mača spēlētāji saglabā savus kreklus, un katram mačam bija krekli divās krāsās - vienā krāsā vienai komandai, otrā krāsā otrai komandai - pie tam krāsas neatkārtojas vēlākos mačos (attiecīgi treniņā bija 11 krekli pa 8 krāsām ).

Tad ir iespējami $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ varianti, kādi 4 krekli spēlētājam būs pēc rokās pēc treniņa, bet, tā kā ir 22 spēlētāji, tad pēc Dirihlē principa noteikti būs 2 spēlētāji, kam pēc treniņa savstarpēji sakrīt visi krekli, tas ir, tie visos 4 mačos bija viena komandā, kas ir pretruna.

Pierādīsim, ka ar 5 spēlēm pietiek. Spēlētājus apzīmēsim attiecīgi ar skaitļiem $1; 2; 3; \ldots; 22$. Der, piemēram, šādas spēles:

- Pirmajā spēlē $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$ spēlē pret $12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22$
- Otrajā spēlē $1; 2; 3; 4; 5; 12; 13; 14; 15; 16; 17$ spēlē pret $6; 7; 8; 9; 10; 11; 18; 19; 20; 21; 22$
- Trešajā spēlē $1; 2; 3; 12; 13; 14; 6; 7; 8; 18; 19$ spēlē pret $4; 5; 15; 16; 17; 9; 10; 11; 20; 21; 22$
- Ceturtajā spēlē $1; 2; 12; 6; 18; 4; 15; 16; 9; 10; 20$ spēlē pret $3; 13; 14; 7; 8; 19; 5; 17; 11; 21; 22$
- Piektajā spēlē $1; 12; 18; 15; 9; 20; 13; 7; 19; 17; 21$ spēlē pret $2; 5; 7; 16; 10; 3; 14; 8; 5; 11; 22$

Katram spēlētājam uzrakstot virkni no vieniniekiem un divniekiem, atkarībā no komandas katrā spēlē, viegli verificēt, ka šāds sadalījums pa komandām patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

**P8** Sākumā uz tāfeles uzrakstītas astoņas nulles. Vienā gājienā iespējams izvēlēties 4 uzrakstītos skaitļus $a, b, c$ un $d$, tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitļus $a+3, b+3, c+2$ un $d+1$.

- Ar kādu mazāko gājienu skaitu iespējams panākt, ka uz tāfeles uzrakstīti 8 pēc kārtas sekojoši skaitļi?
- Vai ir iespējams panākt, ka uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa kādā brīdī būs 2021?
- Vai ir iespējams panākt, ka uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums kādā brīdī būs 2145?

**P8 atrisinājums (Artis Vijups)** Ievērosim, ka pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa summa palielinās par $\Delta = a+3+b+3+c+2+d+1-(a+b+c+d) = 9$. Tā kā sākotnēji uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir $S = 0$, tad viegli ievērot, ka pēc katra gājiena uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa $S$ dalās ar 9.
a) Ja uz tāfeles būtu uzrakstīti pēc kārtas sekojoši skaitļi no $0-7$, tad to summa būtu vienāda ar $S = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$, kas nedalās ar 9, tāpēc šādus pēc kārtas sekojošus skaitļus iegūt nevar. Pierādīsim, ka var iegūt pēc kārtas esošus skaitļus no 1 līdz 8. To summa ir $S = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$, kas dalās ar 9. Tā kā katrā gājienā skaitļu summa palielinās par 9, tad vajadzēs vismaz $\frac{36}{9} = 4$ gājienus. Tik lielā gājienu skaitā attiecīgos skaitļus var iegūt sekojoši:

$$\begin{array}{c} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 3\ 3 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 6\ 6 \\ 0\ 0\ 0\ 4\ 5\ 3\ 7\ 8 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \end{array}$$

b) Tā kā skaitlis 2021 ar 9 nedalās, tad pēc iepriekš iegūtajiem rezultātiem varam secināt, ka nevarēs panākt, ka skaitļu summa būs 2021.
c) Ievērosim, ka $2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Atzīmēsim, ka acīmredzami, ka uz tāfeles nevar būt vairāk par pieciem vieniniekiem vienlaikus (jo jau pirmajā gājienā rodas $3; 3; 2$). Šķirojam gadījumus:

- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $13; 11; 5; 3; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 36, tāpēc būs vajadzīgi vismaz 4 gājieni, lai sasniegtu šādu skaitļu izkārtojumu. No otras puses lielākais skaitlis, ko var iegūt 4 gājienos ir vienāds ar $3 \cdot 4 = 12$, līdz ar to var secināt, ka šāds izkārtojums nav iespējams.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $143; 5; 3; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 156, kas ar 9 nedalās.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $33; 13; 5; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 56, kas ar 9 nedalās.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $55; 13; 3; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 76, kas ar 9 nedalās.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $39; 11; 5; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 60, kas ar 9 nedalās.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $65; 11; 3; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 84, kas ar 9 nedalās.
- Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $15; 13; 11; 1; 1; 1; 1; 1$. Šo skaitļu summa ir 44, kas ar 9 nedalās.

Visi gadījumi ir apskatīti un varam secināt, ka šādu reizinājumu iegūt nevarēs.

**P9** Riņķa līnijā $\omega$ ievilkts izliekts piecstūris $ABCDE$, kuram $CD \parallel BE$. Taisne, kas pieskaras $\omega$ punktā $B$, krusto taisni $AC$ punktā $F$ tā, ka punkts $A$ atrodas starp punktiem $C$ un $F$. Taisnes $BD$ un $AE$ krustojas punktā $G$. Pierādīt, ka taisne $FG$ ir trijstūrim $ADG$ apvilktās riņķa līnijas pieskare.

**P9 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Pierādīsim, ka ap četrstūri $FGBA$ var apvilkt riņķa līniju. Tas ir ekvivalenti ar to, ka $\angle GBF = \angle GAF$.

No pieskares īpašības izriet, ka $\angle FBA = \angle BEA = \alpha$. Savukārt tā kā ap četrstūri var $ABDE$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle AED = 180° - \angle ABD = 180° - \beta$, kur $\angle ABD = \beta$. Līdz ar to varam secināt, ka $BED = \angle AED - \angle BEA = 180° - \alpha - \beta$. Tā kā taisnes $CD$ un $BE$ ir paralēlas, tad sekojoša leņķu vienādība izpildās:

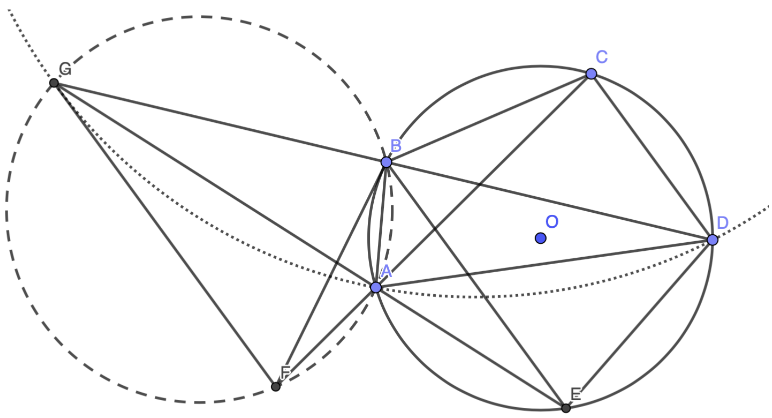
$$\angle BED = \angle EBC = \angle CAE = \angle GAF = 180° - \alpha - \beta$$

No otras puses viegli redzēt, ka $GBF = 180° - \angle FBA - \angle ABD = 180° - \alpha - \beta$. Tas nozīmē, ka $\angle GBF = \angle GAF = 180° - \alpha - \beta$, līdz ar ap četrstūri $FGBA$ var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā ap četrstūri $FGBA$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle FGA = \angle FBA$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. No pieskares īpašības varam rakstīt, ka $\angle FBA = \angle BDA = \angle GDA$. Līdz ar to:

$$\angle FGA = \angle GDA$$

No apgrieztās pieskares īpašības var secināt, ka $FG$ ir ap trijstūri $\triangle ADG$ apvilktās riņķa līnijas pieskare.




1.att.

**P10** Dota riņķa līnija $\omega$ ar centru $M$ un diametru $XY$ . Uz $\omega$ izvēlēts patvaļīgs punkts $A$, kuram $AX < AY$ . Punkti $B$ un $C$ izvēlēti attiecīgi uz nogriežņiem $XM$ un $YM$ tā, ka $BM = CM$. Taisne, kas vilkta caur punktu $C$ paralēli taisnei $AB$, krusto $\omega$ punktā $P$, $P$ atrodas uz mazākā loka $AY$ . Taisne, kas vilkta caur punktu $B$ paralēli taisnei $AC$, krusto $\omega$ punktā $Q$, $Q$ atrodas uz mazākā loka $XA$. Taisnes $PQ$ un $XY$ krustojas punktā $S$. Pierādīt, ka $AS$ ir $\omega$ pieskare.

**P10 atrisinājums (Ilmārs Štolcers)** Taišņu $BQ$ un $CP$ krustpunktu apzīmēsim ar $G$. Viegli ievērot, ka $ABGC$ is paralelograms. Tā kā $M$ ir $CB$ viduspunkts un paralelograma diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tad $MA = MG$, kas nozīmē, ka $G \in \omega$.

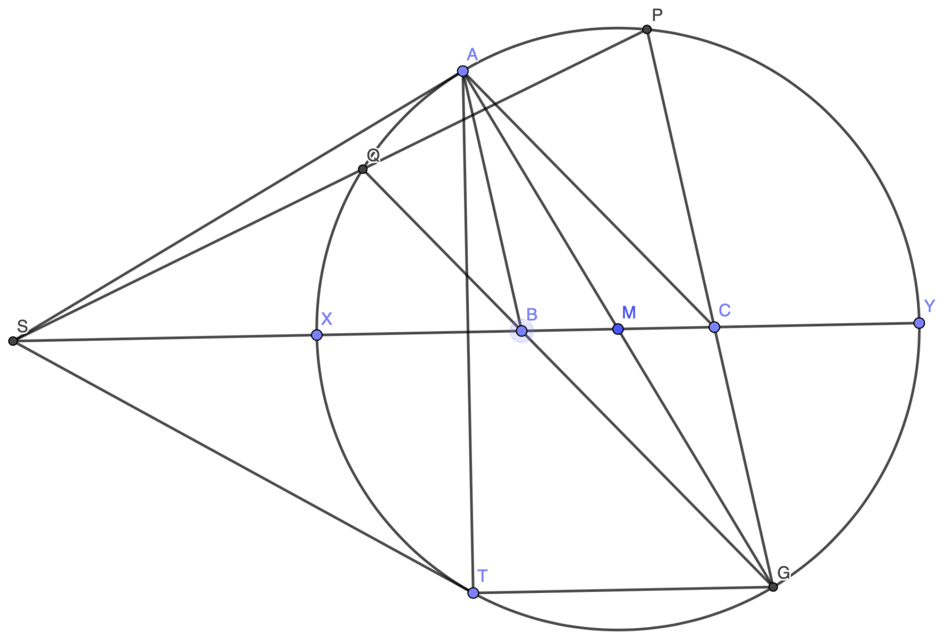
Ar $T$ apzīmēsim punkta $A$ simetrisko attēlojumu pāri taisnei $XY$. Acīmredzami, ka $T \in \omega$ un $GT \parallel XY$, jo $XY$ ir $\triangle AGT$ viduslīnija. Ievērosim, ka:

$$(B, C; M, \infty) = -1$$

Projicējot šo harmonisko punktu četrinieku caur punktu $G$ uz riņķa līniju $\omega$, iegūsim, ka:

$$-1 = (B, C; M, \infty) \stackrel{G}{=} (Q, P; A, T)$$

Tas nozīmē, ka četrstūris $QPAT$ ir harmonisks. No harmonisko četrstūru īpašībām zināms, ka $\omega$ punktos $A$ un $T$ vilkto pieskaru krustpunkts atrodas uz taisnes $PQ$. No otras puses, $\omega$ punktos $A$ un $T$ vilkto pieskaru krustpunkts simetrijas dēļ atrodas arī uz taisnes $XY$. Līdz ar to varam secināt, ka $\omega$ punktos $A$ un $T$ vilkto pieskaru krustpunkts ir $S$ un $AS$ ir pieskare riņķa līnijai $\omega$, ko arī vajadzēja pierādīt.




1.att.

**Piezīme:** Šajā risinājumā tiek izmantoti labi zināmi fakti no projektīvās ģeometrijas. Lasītājam, kurš nav pazīstams ar šo teoriju, ir ieteicams pašam apgūt šo tēmu, *"Google"* meklētājā ierakstot *"Projective geometry for olympiad math"*.

**P11** Trijstūrī $ABC$ ievilkta riņķa līnija, tās centrs ir $I$, un tā pieskaras malām $AC$ un $AB$ attiecīgi punktos $E$ un $F$. Nogriežņa $AI$ vidusperpendikuls krusto malu $AC$ punktā $P$. Uz malas $AB$ izvēlēts punkts $Q$ tā,ka $QI \perp FP$. Pierādīt, ka $EQ \perp AB$.

**P11 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Definēsim punktu $X = IQ \cap FP$. Vispirms veiksim pāris novērojumus:

- $AF \parallel PI$. Patiešām, tā kā $AI$ ir leņķa $\angle BAC$ bisektrise, tad $\angle FAI = \angle EAI = \angle PAI$. No otras puses, punkts $P$ atrodas uz nogriežņa $AI$ vidusperpendikula, tāpēc $AP = PI \implies \angle PAI = \angle PIA$. Secinām, ka $\angle FAI = \angle PIA$, kas nozīmē, ka $AF \parallel PI$.
- Ap četrstūri $IXPE$ var apvilkt riņķa līniju. Patiešām, tā kā $IE \perp AE$ un $IQ \perp FP$, tad $\angle IXP = \angle PEI = 90°$. Līdz ar to $\angle PEI + \angle IXP = 90° + 90° = 180°$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $IXPE$ var apvilkt riņķa līniju.

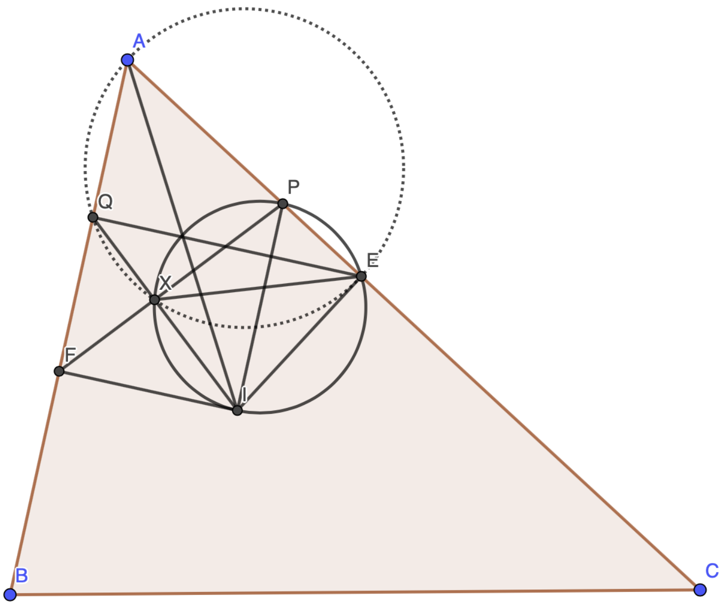
Tā kā $IF \perp AF$, tad $\triangle IFQ$ ir taisnleņķa trijstūris ar augstumu $FX$. Atzīmēsim, ka $IF = IE$ kā ievilktās riņķa līnijas rādiusi. No Eiklīda teorēmas $\triangle IQF$ izriet, ka:

$$IF^2 = IX \cdot IQ = IE^2$$

Tas nozīmē, ka $IE$ ir $\triangle QXE$ apvilktās riņķa līnijas pieskare. No pieskares īpašības izriet, ka $\angle IQE = \angle XQE = \angle XEI$. Tā kā ap četrstūri $XPEI$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XEI = \angle XPI = \angle FPI$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Tā kā $AF \parallel PI$, tad $\angle FPI = \angle PFA = \angle XFQ$. No Eiklīda teorēmas arī izriet, ka $\angle XFQ = \angle QIF$. Līdz ar to esam ieguvuši sekojošu leņķu vienādību:

$$\angle XQE = \angle IQE = \angle XEI = \angle XPI = \angle FPI = \angle PFA = \angle XFQ = \angle QIF$$

Svarīgi ir tas, ka $\angle XQE = \angle QIF$, jo tas nozīmē, ka $QE \parallel IF$. Tā kā $IF \perp AB$, tad $QE \perp AB$, ko arī vajadzēja pierādīt.




1.att.

**P12** Plaknē doti pieci dažādi punkti $A, B, C, P, Q$. Zināms, ka punkti $A$, $B$, $C$ neatrodas uz vienas taisnes, tāpat zināms, ka $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{21}{20}$ un $\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{20}{19}$. Pierādīt, ka taisne $PQ$ iet caur trijstūrim $ABC$ apvilktās riņķa līnijas centru.

**P12 atrisinājums (Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs)** Lai atrisinātu uzdevumu, būs vajadzīgas 2 lemmas. Šajās lemmas lietoto punktu apzīmējumi nekādi nav saistīti ar uzdevumā lietotajiem punktu apzīmējumiem.

**Lemma:** Dots nogrieznis $AB$ un positīvs reāls skaitlis $k \neq 1$. Tad punktu $P$ kopums (ang. *locus*), kas apmierina sakarību $\frac{AP}{BP} = k$, ir riņķa līnija. Šo riņķa līniju literatūrā sauc par Apolonija riņķa līniju attiecībā pret nogriezni $AB$.

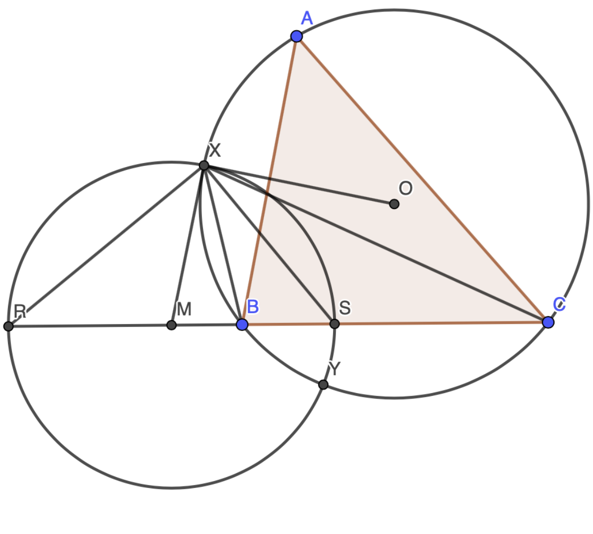
**Pierādījums:** Pieņemsim, ka punkts $S$ ir nogriežņa $AB$ iekšpusē un apmierina sakarību $\frac{AS}{BS} = k$, savukārt punkts $R$ ir nogriežņa $AB$ ārpusē un apmierina sakarību $\frac{AS}{BS} = k$. No harmoniska četrinieka definīcijas izriet, ka $(A, B; S, R) = -1$. Tagad apskatīsim punktu $P$, kas neatrodas uz nogriežņa $AB$ un apmierina sakarību $\frac{AP}{BP} = k = \frac{AS}{BS}$. Tas nozīmē, ka $PS$ ir leņķa $\angle APB$ bisektrise. No harmoniska četrinieka īpašībam izriet, ka $PS \perp PR$, kas nozīmē, ka punkts atrodas uz riņķa līnijas ar diametru $SR$. Līdz ar to punktu $P$ kopums ir riņķa līnija ar diametru $SR$.

**Lemma:** Dots $\triangle ABC$. Apskatīsim patvaļīgu Apolonija riņķa līniju $\omega$ attiecībā pret nogriezni $BC$ un pieņemsim, ka tā krusto $\triangle ABC$ apvilkto riņķa līniju punktos $X$ un $Y$. Ja $O$ ir $\triangle ABC$ apvilktās riņķa līnijas centrs, tad $OX$ un $OY$ ir $\omega$ pieskares.

**Pierādījums:** Punkti $S$ un $R$ tiek definēti analoģiski kā iepriekšējas lemmas pierādījumā. Ievērosim, ka tādā gadījumā $SX$ ir $\angle BXC$ bisektrise un $\angle SXR = 90°$. Ar $M$ apzīmēsim nogriežņa $RS$ viduspunktu. Tādā gadījumā $MR = MS = MX$, kas nozīmē, ka $\angle MXS = \angle MSX = \alpha$. No otras puses, $\angle BXS = \angle CXS = \beta$. Līdz ar to:

$$\angle MXB = \angle MXS - \angle BXS = \alpha - \beta = \angle MSX - \angle SXC = \angle BCX,$$

kur pēdējā vienādība seko no ārējā leņķa $\triangle SXC$. Līdz ar to no apgrieztās pieskares īpašības izriet, ka $MX$ ir $\triangle ABC$ apvilktās riņķa līnijas pieskare. Līdz ar to $\angle MXO = 90°$. Tas no otras puses nozīmē, ka $OX$ ir $\omega$ pieskare, jo $M$ ir šīs riņķa līnijas centrs. Analoģiski pierāda, ka arī $OY$ ir pieskare.




1.att.

Ievērosim, ka no uzdevumā dotā izriet, ka punkti $P, Q$ atrodas uz Apolonija riņķa līnijas attiecībā pret nogriezni $AB$ ($\omega_1$) un attiecībā pret nogriezni $BC$ ($\omega_2$). Tas nozīmē, ka šo divu riņķa līniju krustpunkti ir $P$ un $Q$. Uzdevums ir ekvivalents ar to, ka jāpierāda, ka punkts $O$ atrodas uz $\omega_1$ un $\omega_2$ radikālās ass. Taču atcerēsimies, ka no lemmas izriet, ka $OX, OY$ ir $\omega_1$ pieskares (un analoģiski priekš $\omega_2$), kas nozīmē, ka

$$Pow(\omega_1, O) = Pow(\omega_2, O) = R^2$$

kur $R$ ir $\triangle ABC$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss un $Pow(\omega, O)$ ir punkta $O$ pakāpe pret riņķa līniju $\omega$. Līdz ar to punktam $O$ ir vienāda pakāpe attiecībā pret abām riņķa līnijām, kas nozīmē, ka tas atrodas uz to radikālās ass, un uzdevums ir atrisināts.

**P13** Vai eksistē tāds naturāls skaitlis $a$, ka

a) $\Big((a^2-3)^3+1\Big)^a - 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

b) $\Big((a^2-3)^3+1\Big)^{a+1} - 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

**P13 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** a) Nē, neeksistē.

Pieņemsim, ka $\Big((a^2-3)^3+1\Big)^a - 1 = k^2$ kaut kādam naturālam skaitlim $k$. Ievērosim, ja $a$ ir pāra skaitlis, tad $(a^2-3)^3+1$ būs pāra skaitlis. Tādā gadījumā skaitlis $\Big((a^2-3)^3+1\Big)^a$ noteikti dalās ar 4, līdz ar to $\Big((a^2-3)^3+1\Big)^a - 1 \equiv 3 \pmod 4$. Tas nozīmē, ka $k^2 \equiv 3 \pmod 4$, bet tas nav iespējams, jo skaitļa kvadrāts dod tikai atlikumus 0 un 1, dalot ar 4.

Tas nozīmē, ka skaitlis $a$ ir nepāra. Pārveidosim doto izteiksmi:

$$\begin{aligned}\Big((a^2-3)^3+1\Big)^a - 1 &= k^2\\ \Big((a^2-3)^3+1\Big)^a &= k^2+1\\ \Big((a^2-2)((a^2-2)^2-(a^2-2)+1)\Big)^a &= k^2+1\end{aligned}$$

Ievērosim - tā kā $a$ ir nepāra skaitlis, tad $a^2 \equiv 1 \pmod 4$. Līdz ar to $a^2-2 \equiv 3 \pmod 4$. Tas nozīmē, ka skaitlim $a^2-2$ ir tāds pirmreizinātājs $p$ (izņemot $a=1$, kas acīmredzami uzdevumā neder), ka $p \equiv 3 \pmod 4$. Patiešām, ja visi $a^2-2$ pirmreizinātāji būtu $\equiv 1 \pmod 4$, tad arī $a^2-2 \equiv 1 \pmod 4$, kas acīmredzami nav patiesi.

Varam secināt, ka eksistē pirmskaitlis $p$ ar īpašību, ka $p \mid k^2+1$ un $p \equiv 3 \pmod 4$. Ievērosim, ka $p = 4l+3$, kur $l$ ir kaut kāds nenegatīvs skaitlis un $k^2 \equiv -1 \pmod p$, kas nozīmē, ka $-1$ ir kvadrātisks atlikums. No otras puses, no Gausa teorēmas izriet, ka:

$$1 = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2l+1} = -1$$

Pretruna.

b) Nē, neeksistē. Visi iepriekš minētie spriedumi nekādi nemainās, ja kāpinātājs ir $a+1$, nevis $a$.

**Piezīme:** To, ka naturālam skaitlim $b^2+1$ nav pirmreizinātāju $p$, kuriem $p \equiv 3 \pmod 4$, literatūrā sauc par Fermā Ziemassvētku teorēmu (sīkākai informācijai skatīt vikipēdijas lapu par *Fermat's Christmas theorem).*

**P14** Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu trijnieku $(a, b, c)$, ka skaitļi $a, b, c$ pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi un

$$\left\lfloor \frac{a^2}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{2021} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c^2}{2021} \right\rfloor.$$

(Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmē skaitļa $x$ veselo daļu — lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz $x$.)

**P14 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Aplūkosim šādus skaitļus:

$$a = 3 \cdot 2021k - 4, b = 4 \cdot 2021k + 3, c = 5 \cdot 2021k$$

Pārliecināsimies, ka tie izpilda doto vienādojumu:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{9 \cdot (2021k)^2 - 24 \cdot 2021k + 16}{2021} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16 \cdot (2021k)^2 + 24 \cdot 2021k + 9}{2021} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{25 \cdot (2021k)^2}{2021} \right\rfloor \\ 9 \cdot 2021k^2 - 24 + 16 \cdot 2021k^2 + 24 &= 25 \cdot 2021k^2 \\ 25 \cdot 2021k^2 &= 25 \cdot 2021k^2 \end{aligned}$$

Līdz ar to ir pietiekami vien pārliecināties, ka skaitļi $a, b, c$ pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi. Šķirojam gadījumus:

- Ja eksistē tāds pirmskaitlis $p$, ka $p \mid a$ un $p \mid b$, tad $p \mid 3b - 4a = 25 \implies p = 5$. Līdz ar to mums jāizvēlas tāds $k$, lai neviens no skaitļiem $a = 3 \cdot 2021k - 4,\ b = 4 \cdot 2021k + 3$ nedalītos ar 5. To var izdarīt, piemēram, ja izvēlas $k$, kuram $k \equiv 1 \pmod 5$, jo tad:

$$\begin{aligned} a \equiv 3 \cdot 2021 \cdot 1 - 4 \equiv -1 &\pmod 5 \\ b \equiv 4 \cdot 2021 \cdot 1 + 3 = 2 &\pmod 5 \\ c = 5 \cdot 2021 \equiv 0 &\pmod 5 \end{aligned}$$

- Ja eksistē tāds pirmskaitlis $p$, ka $p \mid b$ un $p \mid c$, tad $p \mid 5b - 4c = 15 \implies p = 3$ vai $p = 5$. No iepriekšējās $k$ izvēles redzams, ka $p \neq 5$. Līdz ar to mums jāizvēlas tādu $k$, lai neviens no skaitļiem $b = 4 \cdot 2021k + 3,\ c = 5 \cdot 2021k$ nedalītos ar 3. To var izdarīt, piemēram, ja izvēlas $k$, kuram $k \equiv 1 \pmod 3$, jo tad:

$$\begin{aligned} a \equiv 3 \cdot 2021 \cdot 1 - 4 \equiv 2 &\pmod 3 \\ b \equiv 4 \cdot 2021 \cdot 1 + 3 \equiv 2 &\pmod 3 \\ c \equiv 5 \cdot 2021 \equiv 1 &\pmod 3 \end{aligned}$$

- Ja eksistē tāds pirmskaitlis $p$, ka $p \mid c$ un $p \mid a$, tad $p \mid 3c - 5a = 20 \implies p = 2$ vai $p = 5$. No iepriekšējās $p$ izvēles redzams, ka $p \neq 5$. Līdz ar to mums ir pietiekami izvēlēties tādu $k$, lai neviens no skaitļiem $c = 5 \cdot 2021k,\ a = 3 \cdot 2021k - 4$ nedalītos ar 2. To var izdarīt, piemēram, ja izvēlas $k$, kuram $k \equiv 1 \pmod 2$, jo tad:

$$\begin{aligned} a \equiv 3 \cdot 2021 \cdot 1 - 4 \equiv 1 &\pmod 2 \\ b \equiv 4 \cdot 2021 \cdot 1 + 3 \equiv 1 &\pmod 2 \\ c \equiv 5 \cdot 2021 \cdot 1 \equiv 1 &\pmod 2 \end{aligned}$$

Līdz ar to, lai skaitļi $a, b, c$ apmierinātu visus uzdevuma nosacījumus, mums ir pietiekami atrast tādas $k$ vērtības, kurām:

$$\begin{aligned} k \equiv 1 &\pmod 2 \\ k \equiv 1 &\pmod 3 \\ k \equiv 1 &\pmod 5 \end{aligned}$$

To var izdarīt, ja izvēlas $k = 30l + 1$, kur $l$ ir kaut kāds naturāls skaitlis. Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

**P15** Ar $s(n)$ apzīmēsim naturāla skaitļa $n$ visu dalītāju, izņemot pašu $n$, summu (piemēram, $s(45) = 1 + 3 + 5 + 9 + 15 = 33$). Vai eksistē tāds naturāls skaitlis $a$, ka vienādojumam

$$s(n) = a + n$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos?

**P15 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Jā, eksistē.

Ja $a = 12$, tad, izvēloties skaitli $n = 6p$, kur $p > 3$ ir pirmskaitlis, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned} s(6p) = 1 + 2 + 3 + 6 + p + 2p + 3p &= 6p + 12 \\ 6p + 12 &= 12 + 6p \end{aligned}$$

Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī attiecīgo skaitļu $n$ būs bezgalīgi daudz un uzdevums ir atrisināts.

**P16** Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definēta naturāliem skaitļiem un pieņem naturālas vērtības. Zināms, ka, ja $a$ un $b$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $f(ab) = f(a)f(b)$. Zināms arī, ka, ja $m$ un $k$ ir pirmskaitļi (ne obligāti dažādi), tad

$$f(m+k-3) = f(m) + f(k) - f(3).$$

Kādas ir $f(11)$ iespējamās vērtības?

**P16 atrisinājums (Kims Georgs Pavlovs)** Ievērosim, ka $f(1)f(1) = f(1) = f(1)^2 \implies f(1) = 1$. Otro sakarību:

$$f(m+k-3) = f(m) + f(k) - f(3)$$

apzīmēsim ar $P(m;k)$. Ievērosim, ka no $P(2;2)$ izriet, ka:

$$1 = f(1) = f(2) + f(2) - f(3) \quad \implies \quad f(3) = 2f(2) - 1$$

Līdzīgi no $P(5;5)$ varam iegūt, ka:

$$f(7) = 2f(5) - f(3) = 2f(5) - 2f(2) + 1$$

Ievērosim, ka no $P(7;7)$ izriet, ka:

$$f(11) = 2f(7) - f(3) = 4f(5) - 4f(2) + 2 - 2f(2) + 1 = 4f(5) - 6f(2) + 3$$

Galu galā no $P(11;2)$ iegūstam, ka:

$$\begin{aligned} f(2)f(5) = f(10) &= f(11) + f(2) - f(3) \\ f(2)f(5) &= 4f(5) - 6f(2) + 3 + f(2) - 2f(2) + 1 \\ f(2)f(5) &= 4f(5) - 7f(2) + 4 \end{aligned}$$

Apzīmēsim, ka $f(5) = x$ un $f(2) = y$, kur $x, y$ ir kaut kādi naturāli skaitļi. Tādā gadījumā pēdējo sakarību var pārrakstīt šādi:

$$\begin{aligned} xy &= 4x - 7y + 4 \\ x(y-4) + 7y &= 4 \\ x(y-4) + 7y - 28 &= -24 \\ x(y-4) + 7(y-4) &= -24 \\ (x+7)(y-4) &= -24 \end{aligned}$$

Ievērosim, ka $x + 7 \geq 8$, tāpēc tas var būt vienāds tikai ar kādu no skaitļiem $8, 12, 24$. Šķirojam gadījumus:

- $x + 7 = 8$, tad $x = 1 = f(5)$. No otras puses tādā gadījumā $y - 4 = -3$, no kurienes izriet, ka $y = 1 = f(2)$. Tādā gadījumā:

  $$f(11) = 4f(5) - 6f(2) + 3 = 4 - 6 + 3 = 1$$

  Funkcijas piemērs, kas šajā gadījumā izpilda uzdevuma nosacījumus, ir $f(n) = 1$ katram naturālam skaitlim $n$.

- $x + 7 = 12$, tad $x = 5 = f(5)$. No otras puses, tādā gadījumā $y - 4 = -2$, no kurienes izriet, ka $y = 2 = f(2)$. Tādā gadījumā:

  $$f(11) = 4f(5) - 6f(2) + 3 = 20 - 12 + 3 = 11$$

  Funkcijas piemērs, kas šajā gadījumā izpilda uzdevuma nosacījumus, ir $f(n) = n$ katram naturālam skaitlim $n$.

- $x + 7 = 24$, tad $x = 17 = f(5)$. No otras puses, tādā gadījumā $y - 4 = -1$, no kurienes izriet, ka $y = 3 = f(2)$. Šajā gadījumā izrēķināsim pāris citas funkcijas vērtības:

  $$\begin{aligned} f(3) &= 2f(2) - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ f(7) &= 2f(5) - 2f(2) + 1 = 2 \cdot 17 - 2 \cdot 3 + 1 = 29 \end{aligned}$$

  Aplūkojot $P(7;2)$ iegūsim, ka:

  $$\begin{aligned} f(2)f(3) = f(6) &= f(7) + f(2) - f(3) \\ 3 \cdot 5 &= 29 + 3 - 5 \\ 15 &= 27 \end{aligned}$$

  Pēdējā sakarība ir acīmredzama pretruna.

Līdz ar to vienīgās iespējamās $f(11)$ vērtības ir 1 un 11.