Risināšanas laiks: 4,5 stundas.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts lietot tikai rakstāmpiederumus un lineālu.

1. Pierādīt, ka visiem nenegatīviem reāliem skaitļiem x,y,z, kuriem $x \geq y$, ir spēkā nevienādība

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x-y)\sqrt{xyz}.$$

2. Dota virkne $\{F_n\}$, kurai $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ visiem $n \geq 2$. Atrast visus naturālu skaitļu pārus (x,y), kuriem

$$5F_x - 3F_y = 1.$$

3. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem $x,y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(xf(y) - y^2) = (y+1)f(x-y).$$

4. Noskaidrojiet, kādiem veseliem skaitļiem n var atrast naturālu skaitli $k \geq 2$ un tādus naturālus skaitļus $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ka

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = n \quad \text{un} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2019.$$

5. Uz tāfeles uzrakstīti $2m$ skaitļi

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 2m(2m+1),$$

kur $m \geq 2$ ir naturāls skaitlis. Vienā *gājienā* var izvēlēties jebkurus trīs skaitļus a, b, c, nodzēst tos un to vietā uzrakstīt skaitli

$$\frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Pēc $m-1$ šādiem gājieniem uz tāfeles būs palikuši divi skaitļi. Pierādīt, ka viens no tiem ir lielāks par 4, ja zināms, ka otrs skaitlis ir $\frac{4}{3}$.

6. Alise un Beāte spēlē sekojošu spēli. Viņas ir uzrakstījuši katru no izteiksmēm $x+y$, $x-y$, x^2+xy+y^2 un x^2-xy+y^2 uz savas kārts. Šīs četras kārtis viņas sajauc un novieto uz galda ar izteiksmēm uz leju. Vienu no šīm kārtīm viņas apgriež, atklājot izteiksmi, pēc kā Alise izvēlas sev jebkuras divas no kārtīm un atlikušās divas dabū Beāte. Tad visas kārtis tiek atklātas. Tagad Alise izvēlas mainīgo x vai y un piešķir tam vērtību. Viņa parāda šo mainīgo un tā vērtību arī Beātei, kura tad piešķir vērtību otram mainīgajam (mainīgo vērtības var būt patvaļīgi reāli skaitļi).

Beigās katra meitene aprēķina savu divu izteiksmju reizinājumu un tad tos salīdzina. Kurai šis reizinājums ir lielāks, tā uzvar. Kurai no spēlētājām ir uzvaroša stratēģija (ja kādai tāda vispār ir)?

7. Atrodiet mazāko naturālo skaitli $k \geq 2$, kuram piemīt sekojoša īpašība: jebkurā kopas $\{2,3,\ldots,k\}$ sadalījumā divās daļās vismaz viena no šīm daļām noteikti saturēs (ne obligāti dažādus) skaitļus a, b un c, kuriem $ab = c$.

8. Baltijceļzemē ir 2019 pilsētas. Dažas no tām ir savienotas ar divvirzienu ceļiem, kuri ārpus pilsētām nekrustojas. Zināms, ka katram pilsētu pārim A un B ir iespējams nokļūt no A uz B braucot pa ne vairāk kā 2 ceļiem. Baltijceļzemē ir 62 žandarmi un viens razbainieks, kuru žandarmi gribētu notvert. Žandarmi un razbainieks jebkurā brīdī zin visu pārējo atrašanās vietu. Katru nakti razbainieks var vai nu palikt tajā pilsētā, kurā viņš ir, vai arī pārvietoties uz blakus pilsētu (kas ar to ir savienota ar ceļu). Katru dienu katram žandarmam ir šīs pašas iespējas un viņi var savas darbības saskaņot. Ja kādā brīdī žandarms un razbainieks atrodas vienā pilsētā, tad razbainieks tiek noķerts. Pierādiet, ka žandarmi, prātīgi rīkojoties, vienmēr varēs noķert razbainieku.

9. Dotam naturālam n aplūkosim visas neaugošās funkcijas $f\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$. Dažām no šīm funkcijām ir nekustīgais punkts (eksistē tāds c, kuram $f(c) = c$), bet citām — nav. Nosakiet, par cik viena veida funkciju ir vairāk nekā otra.

Piebilde. Funkcija f ir *neaugoša*, ja visiem $x \le y$ izpildās $f(x) \ge f(y)$.

10. Plaknē doti 2019 punkti. Bērnelis vēlas uzzīmēt k (slēgtus) riņķus tā, lai katriem diviem no šiem punktiem būtu riņķis, kurš saturētu tieši vienu no tiem. Atrodiet mazāko k, pie kura to ir iespējams izdarīt jebkuram punktu izkārtojumam?

11. Dots trijstūris ABC, kurā $AB = AC$, tā malas BC viduspunkts ir M. Riņķa līnijas, kuru diametri ir AC un BM, krustojas punktos M un P. Taisnes MP un AB krustojas punktā Q. Uz nogriežņa AP izvēlēts punkts R tā, ka $QR \parallel BP$. Pierādīt, ka CP ir leņķa $\sphericalangle RCB$ bisektrise.

12. Trijstūra ABC augstumu krustpunkts ir H. Uz tā malas AC izvēlēts punkts D un no tā novilkts perpendikuls DE pret taisni BC. Pierādīt, ka $EH \perp BD$ tad un tikai tad, ja taisne BD dala nogriezni AE uz pusēm.

13. Dots izliekts sešstūris $ABCDEF$, kurā $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$ un $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFA = 90°$. Pierādīt, ka $AD \perp CE$.

14. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kurā $\sphericalangle ABC = 90°$, pret malu AC novilkts augstums BH. Nogriežņu AH un CH viduspunkti ir attiecīgi M un N. Taisnes BM un BN vēlreiz krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos P un Q. Nogriežņi AQ un CP krustojas punktā R. Pierādīt, ka taisne BR krusto nogriezni MN tā viduspunktā.

15. Dotam naturālam skaitlim $n \ge 4$ aplūkosim (ne noteikti izliektu) daudzstūri $P_1P_2\ldots P_n$ (plaknē). Pieņemsim, ka katrai virsotnei P_k eksistē virsotne $Q_k \ne P_k$, kura atrodas tai tuvāk par visām pārējām virsotnēm. Šādu daudzstūri sauksim par *naidīgu*, ja $Q_k \ne P_{k\pm1}$ visiem k (kur $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$).

(a) Pierādīt, ka naidīgs daudzstūris nevar būt izliekts.
(b) Atrodiet visus $n \ge 4$, kuriem eksistē naidīgs n-stūris.

16. Dotam naturālam skaitlim N ar $f(N)$ apzīmēsim tādu sakārtotu pāru (a,b) skaitu, kuriem skaitlis

$$\frac{ab}{a+b}$$

ir N dalītājs. Pierādīt, ka $f(N)$ ir vesela skaitļa kvadrāts visiem naturāliem N.

17. Dots nepāra pirmskaitlis p. Pierādīt, ka jebkuram veselam skaitlim c var atrast tādu veselu skaitli a, ka

$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod p.$$

18. Doti naturāli nepāra skaitļi a, b, un c, kuriem a nav vesela skaitļa kvadrāts un

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $b^2 + b + 1$ un $c^2 + c + 1$ ir salikts skaitlis.

19. Pierādīt, ka vienādojumam $7^x = 1 + y^2 + z^2$ nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

20. Aplūkosim polinomu $P(x)$ ar veseliem koeficientiem, kuram

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40, \quad \text{un} \quad P(-5) = -156.$$

Kāds ir lielākais iespējamais tādu veselu x skaits, kuriem

$$P\big(P(x)\big) = x^2?$$