

pirmdienā, 11. jūlijs 2022

1. uzdevums. Centrālā Norvēģijas Banka tiražē divu tipu monētas: alumīnija (apzīmētas ar A) un bronzas (apzīmētas ar B). Marijai ir n alumīnija monētas un n bronzas monētas, kuras viņa ir novietojusi patvaļīgā virknē. Par *ķēdi* saucsim jebkuru secīgu viena tipa monētu apakšvirknī. Dotam $k \leq 2n$, Marija atkārtoti veic sekojošu darbību: atrod garāko ķēdi, kas satur k -to monētu (skaitot no kreisās puses), un pārvieto visas šīs ķēdes monētas uz virknes kreiso galu. Piemēram, pie $n = 4$ un $k = 4$, un sākotnējās virknes $AABBBABA$ process izskatītos sekojoši

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

Atrodiet visus pārus (n, k) , kur $1 \leq k \leq 2n$, kuriem, neatkarīgi no sākotnējā virknes izkārtojuma, kādā procesa brīdī visas virknes kreisās n monētas būs vienāda tipa.

2. uzdevums. Ar \mathbb{R}^+ apzīmēsim visu pozitīvo reālo skaitļu kopu. Atrodiet visas funkcijas $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, kurām katram $x \in \mathbb{R}^+$ eksistē tieši viens $y \in \mathbb{R}^+$, kuram izpildās

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

3. uzdevums. Dots naturāls skaitlis k un galīga nepāra pirmskaitļu kopa S . Pierādiet, ka ir tikai viens veids (neskaitot rotācijas un spoguļattēlus), kā izvietot S elementus uz riņķa līnijas tā, ka jebkuru divu kaimiņu reizinājums ir izsakāms formā $x^2 + x + k$, kur x ir kāds naturāls skaitlis.

otrdiena, 12. jūlijs 2022

4. uzdevums. Izliktā piecstūrī $ABCDE$ dots, ka $BC = DE$. Zināms, ka punkts T atrodas $ABCDE$ iekšienē un $TB = TD$, $TC = TE$ un $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$. Taisne AB krusto taisnes CD un CT attiecīgi punktus P un Q . Dots, ka punkti P, B, A, Q izkārtoti uz taisnes šādā secībā. Taisne AE krusto taisnes CD un DT attiecīgi punktus R un S . Dots, ka punkti R, E, A, S izkārtoti uz taisnes šādā secībā. Pierādiet, ka punkti P, S, Q, R atrodas uz vienas riņķa līnijas.

5. uzdevums. Atrodiet visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, p) , kuros p ir pirmskaitlis un izpildās

$$a^p = b! + p.$$

6. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n . *Norvēģu kvadrāts* ir $n \times n$ rūtiņu laukums, kurš satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz n^2 tā, ka katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens skaitlis. Rūtiņas ir blakusstāvošas, ja tām ir viena kopēja mala. Rūtiņu, kuras skaitlis ir mazāks par visu blakusstāvošo rūtiņu skaitļiem, sauc par *ieleju*. *Kalnupceļš* ir vienas vai vairāku rūtiņu virkne ar sekojošām īpašībām:

- (i) virknes pirmā rūtiņa ir ieleja,
- (ii) katras virknes kaimiņu rūtiņas ir blakusstāvošas uz laukuma,
- (iii) virknes rūtiņās ierakstītie skaitļi ir augošā secībā.

Atrodiet, izsakot kā funkciju no n , mazāko iespējamo kalnupceļu skaitu patvaļīgā Norvēģu kvadrātā.