pirmdiena, 19. jūlijs 2021

1. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geqslant 100$. Ivans uzraksta skaitļus $n, n+1, \ldots, 2n$ uz dažādām kartiņām. Pēc tam viņš šīs $n+1$ kartiņas samaisa un sadala divās kaudzītēs. Pierādiet, ka vienā no kaudzītēm ir atrodamas divas kartiņas, kuru skaitļu summa ir naturāla skaitļa kvadrāts.

2. uzdevums. Pierādiet, ka nevienādība

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

izpildās visiem reāliem skaitļiem $x_1, \ldots, x_n$.

3. uzdevums. Šaurleņķa trijstūra ABC, kuram $AB > AC$, iekšpusē izvēlēts punkts D tā, ka $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Punkts E uz nogriežņa AC izvēlēts tā, ka $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, punkts F uz nogriežņa AB izvēlēts tā, ka $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, un punkts X uz taisnes AC izvēlēts tā, ka $CX = BX$. Apzīmēsim trijstūru ADC un EXD apvilkto riņķa līniju centrus attiecīgi ar punktiem O_1 un O_2. Pierādiet, ka taisnes BC, EF un O_1O_2 krustojas vienā punktā.

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

otrdiena, 20. jūlijs 2021

4. uzdevums. Dota riņķa līnija Γ ar centru I un tāds izliekts četrstūris $ABCD$, ka nogriežņi AB, BC, CD un DA pieskaras Γ. Riņķa līnija Ω ir apvilkta trijstūrim AIC. Malas BA pagarinājums aiz punkta A krusto Ω punktā X, un malas BC pagarinājums aiz punkta C krusto Ω punktā Z. Malu AD un CD pagarinājumi aiz punkta D krusto Ω attiecīgi punktos Y un T. Pierādīt, ka

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

5. uzdevums. Divas vāveres, Krūmiņa un Lecīte, kopā ir savākušas 2021 valriekstu ziemai. Lecīte sanumurēja riekstus ar skaitļiem no 1 līdz 2021 un izraka 2021 bedrītes aplī ap viņu iecienītāko koku. Nākošajā rītā Lecīte pamanīja, ka Krūmiņa ir ielikusi katrā bedrīte pa valriekstam, bet ir pilnībā ignorējusi numerāciju. Neesot mierā ar radušos situāciju, Lecīte izlēma pārkārtot valriekstus, veicot sekojošu 2021 gājienu secību: k-tajā gājienā, Lecīte samaina vietām divus riekstus, kas atrodas blakus riekstam ar numuru k. Pierādiet, ka eksistē tāda k vērtība, ka k-tajā gājienā Lecīte samaina riekstus ar numuriem a un b, kuriem $a < k < b$.

6. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $m \geqslant 2$, galīga veselu (ne obligāti pozitīvu) skaitļu kopa A un kopas A apakškopas $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$. Pieņemsim, ka katram $k = 1, 2, \ldots, m$ apakškopas B_k elementu summa ir m^k. Pierādiet, ka A satur vismaz $m/2$ elementus.

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.