Language: **Latvian**

Day: **1**

Ceturtdien, 2020. gada 16. aprīlī.

1. uzdevums. Naturāliem skaitļiem a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} izpildās sakarības:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ , katram } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} dalās ar 2^{2020}.

2. uzdevums. Atrast visus tādus nenegatīvu reālu skaitļu sarakstus $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, kuriem vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) eksistē tāda skaitļu saraksta $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ permutācija $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$, kurai

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Skaitļu saraksta permutācija ir tāda paša garuma skaitļu saraksts, ar tiem pašiem elementiem, kuri var būt sakārtoti jebkādā secībā. Piemēram, $(2, 1, 2)$ ir saraksta $(1, 2, 2)$ permutācija, un tās abas ir saraksta $(2, 2, 1)$ permutācijas. Ievērojiet, ka jebkurš saraksts ir permutācija arī pats sev.

3. uzdevums. Izliektā sešstūrī $ABCDEF$ $\angle A = \angle C = \angle E$ un $\angle B = \angle D = \angle F$. Leņķu $\angle A$, $\angle C$ un $\angle E$ (iekšējās) bisektrises krustojas vienā punktā.

Pierādīt, ka leņķu $\angle B$, $\angle D$ un $\angle F$ (iekšējās) bisektrises arī krustojas vienā punktā.

Piezīme. $\angle A = \angle FAB$ un visi pārējie sešstūra iekšējie leņķi ir apzīmēti līdzīgā veidā.

Language: Latvian

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

Lai nodrošinātu godīgas un patīkamas sacensības, lūdzu, neapspriest un nepieminēt uzdevumus internetā vai sociālajos tīklos līdz svētdienas 19. aprīļa plkst. 01:00 naktī.

Piektdien, 2020. gada 17. aprīlī.

4. uzdevums. Veselu skaitļu 1, 2, ..., m permutāciju sauksim par *svaigu*, ja neeksistē naturāls skaitlis $k < m$ tāds, ka pirmie k skaitļi šajā permutācijā ir skaitļi 1, 2, ..., k jebkādā patvaļīgā secībā. Katram m ar f_m apzīmēsim skaitļu 1, 2, ..., m visu *svaigo* permutāciju skaitu.

Pierādīt, ka katram $n \geq 3$ izpildās nevienādība $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Piemēram, ja $m = 4$, tad permutācija $(3, 1, 4, 2)$ ir svaiga, bet permutācija $(2, 3, 1, 4)$ nav svaiga.

5. uzdevums. Dots platleņķa trijstūris ABC, $\angle BCA > 90°$. Tam apvilktās riņķa līnijas Γ rādiusa garums ir R. Uz nogriežņa AB atrodas punkts P tāds, ka $PB = PC$ un PA garums ir R. Nogriežņa PB vidusperpendikuls krusto Γ punktos D un E.

Pierādīt, ka punkts P ir trijstūra CDE ievilktās riņķa līnijas centrs.

6. uzdevums. Dots vesels skaitlis $m > 1$. Virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir definēta šādi: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ un visiem $n \geq 4$

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Atrast visus tādus m, kuriem katrs virknes loceklis ir kāda vesela skaitļa kvadrāts.

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

Lai nodrošinātu godīgas un patīkamas sacensības, lūdzu, neapspriest un nepieminēt uzdevumus internetā vai sociālajos tīklos līdz svētdienas 19. aprīļa plkst. 01:00 naktī.