pirmdiena, 21. septembris 2020

1. uzdevums. Aplūkosim izliektu četrstūri $ABCD$. Punkts P atrodas četrstūra $ABCD$ iekšpusē. Izpildās sekojošas attiecības:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1 : 2 : 3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Pierādiet, ka šīs trīs taisnes krustojas vienā punktā: leņķu $\sphericalangle ADP$ un $\sphericalangle PCB$ bisektrises un nogriežņa AB vidusperpendikuls.

2. uzdevums. Reāliem skaitļiem a, b, c, d izpildās $a \geq b \geq c \geq d > 0$ un $a + b + c + d = 1$. Pierādiet, ka

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

3. uzdevums. Doti $4n$ akmentiņi, kuru svari ir $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Katrs akmentiņš ir nokrāsots vienā no n krāsām un katrā krāsā nokrāsoti tieši četri akmentiņi. Pierādiet, ka akmentiņus var sadalīt divās kaudzītēs tā, ka izpildās divas īpašības:

- Akmentiņu kopējais svars abās kaudzītēs ir vienāds.
- Katra kaudzīte satur tieši divus katras krāsas akmentiņus.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

otrdiena, 22. septembris 2020

4. uzdevums. Dots naturāls $n > 1$. Uz kalna nogāzes ir n^2 stacijas, visas dažādos augstumos. Divi gaisa tramvaja uzņēmumi A un B apkalpo k funikulierus, katrs no kuriem savieno kādu staciju ar kādu augstāk esošu staciju (bez starppieturām). Uzņēmuma A k funikulieriem ir k dažādi sākuma punkti un k dažādi beigu punkti, un funikulierim, kuram sākuma punkts ir augstāk, arī beigu punkts ir augstāk. Tādi pat nosacījumi izpildās arī uzņēmumam B. Teiksim, ka uzņēmums *savieno* divas stacijas, ja ir iespējams sākt ceļu no zemākās stacijas un pabeigt augstākajā, izmantojot vienu vai vairākus šī uzņēmuma funikulierus (un cita pārvietošanās starp stacijām nav atļauta).

Atrodiet mazāko naturālo k, kuram var garantēt, ka ir divas stacijas, kuras savieno abi uzņēmumi.

5. uzdevums. Mums ir kava ar $n > 1$ kārtīm. Uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis. Kavai piemīt īpašība, ka katra kāršu pāra skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība ir vienāda ar vidējo ģeometrisko vērtību no skaitļiem, kas uzrakstīti uz kādas šīs kavas netukšas apakškopas kārtīm.

Kuriem n no augstāk rakstītā seko, ka skaitļiem uz visām kārtīm jābūt vienādiem?

6. uzdevums. Pierādiet, ka eksistē tāds pozitīvs c, ka izpildās sekojošs apgalvojums:

Apskatam naturālu $n > 1$, un kopu $\mathcal{S}$ kas sastāv no n plaknes punktiem ar īpašību, ka attālums starp katriem diviem kopas $\mathcal{S}$ punktiem ir vismaz 1. No tā seko, ka eksistē taisne ℓ, kura sadala kopu $\mathcal{S}$ tā, ka attālums no katra kopas $\mathcal{S}$ punkta līdz ℓ ir vismaz $cn^{-1/3}$.

(Taisne ℓ *sadala* punktu kopu $\mathcal{S}$, ja nogrieznis, kas novilkts starp kādiem diviem kopas $\mathcal{S}$ punktiem, krusto ℓ.)

Piezīme. Vājāki rezultāti, kur $cn^{-1/3}$ aizstāts ar $cn^{-\alpha}$ var tikt vērtēti ar punktiem, atkarībā no konstantes $\alpha > 1/3$.