Otrdiena, 2019. gada 16. jūlijs.

1. uzdevums. Apzīmēsim ar $\mathbb{Z}$ visu veselo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kurām visiem veseliem skaitļiem a un b izpildās

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

2. uzdevums. Uz trijstūra ABC malas BC ir izvēlēts punkts A_1 un uz malas AC ir izvēlēts punkts B_1. Uz nogriežņiem AA_1 un BB_1 ir izvēlēti punkti P un Q, attiecīgi, tā, ka PQ un AB ir paralēli. Ar P_1 apzīmēsim tādu punktu uz taisnes PB_1, ka $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$ un B_1 atrodas stingri starp P un P_1. Līdzīgi, Q_1 ir tāds punkts uz taisnes QA_1, ka $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$ un A_1 atrodas stingri starp Q un Q_1.

Pierādīt, ka punkti P, Q, P_1 un Q_1 atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3. uzdevums. Kādā sociālajā tīklā ir 2019 lietotāji, daži pāri no kuriem tajā ir draugi. Ja lietotājs A ir draugos ar lietotāju B, tad arī B ir draugos ar A. Šajā tīklā var atkārtoti notikt sekojoši notikumi, pa vienam reizē:

> Trīs lietotāji A, B un C tādi, ka A ir draugos gan ar B, gan ar C, bet B un C nav draugi, pamaina savu draudzību statusus tā, ka B un C tagad kļūst par draugiem, bet A vairs nav draugos ne ar B, ne ar C. Visu pārējo draudzību statusi nemainās.

Sākotnēji, 1010 no lietotājiem ir tieši pa 1009 draugiem katram un pārējiem 1009 no lietotājiem ir tieši pa 1010 draugiem katram. Pierādīt, ka eksistē tāda šādu notikumu virkne, pēc kuras katrs no lietotājiem ir draugos ar ne vairāk kā vienu citu lietotāju.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem

Trešdiena, 2019. gada 17. jūlijs

4. uzdevums. Atrast visus naturālo skaitļu (k, n) pārus, kuriem izpildās

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

5. uzdevums. Bātas Banka izlaiž monētas ar burtu H vienā pusē un burtu T pretējā pusē. Harijs uzlika n šādas monētas rindā no kreisās puses uz labo. Tad viņš atkārtoti veic sekojošu darbību: ja monētu skaits ar H uz augšu ir tieši vienāds ar $k > 0$, tad viņš apgriež otrādi k-to monētu no kreisās puses; pretējā gadījumā, visas monētas rāda T uz augšu un viņš apstājas. Piemēram, ja $n = 3$ un sākotnējā monētu konfigurācija būtu THT, tad process apstātos pēc 3 darbībām: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$.

(a) Pierādīt, ka Harijs vienmēr apstāsies pēc galīga darbību skaita, neatkarīgi no sākotnējās monētu konfigurācijas.

(b) Katrai sākotnējai konfigurācijai C ar $L(C)$ apzīmēsim darbību skaitu, ko Harijs veic, līdz process apstājas. Piemēram, $L(THT) = 3$ un $L(TTT) = 0$. Noteikt $L(C)$ vidējo vērtību pāri visām 2^n iespējamām sākotnējām konfigurācijām C.

6. uzdevums. Dots šaurleņķa trijstūris ABC, kurā $AB \neq AC$. Tā ievilktās riņķa līnijas ω centrs ir I, un ω pieskaras malām BC, CA un AB punktos D, E un F, attiecīgi. Taisne, kas iet caur D un ir perpendikulāra EF, krusto ω vēlreiz punktā R. Taisne AR krusto ω vēlreiz punktā P. Trijstūru PCE un PBF apvilktās riņķa līnijas krustojas vēlreiz punktā Q.

Pierādīt, ka taišņu DI un PQ krustpunkts atrodas uz taisnes, kas iet caur A un ir perpendikulāra taisnei AI.