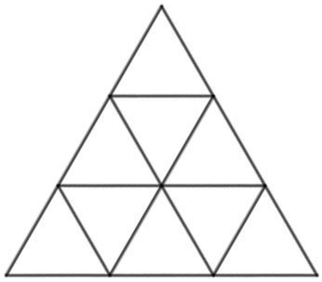
Atklātā matemātikas olimpiāde

Uzdevumi un atrisinājumi

5. klase

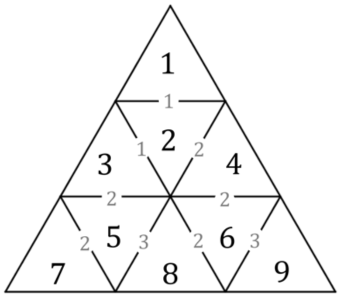
5.1. Skaitļus no 1 līdz 9 ieraksti 1. att. redzamajos mazajos trijstūros (katrā trijstūrī citu naturālo skaitli) tā, lai blakus trijstūros ierakstītie skaitļi neatšķiras vairāk kā par 3.

Piezīme. Par blakus trijstūriem sauksim trijstūrus, kam ir kopīga mala.



1. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 2. att., kur pelēkā krāsā norādītas atbilstošās starpības.



2. att.

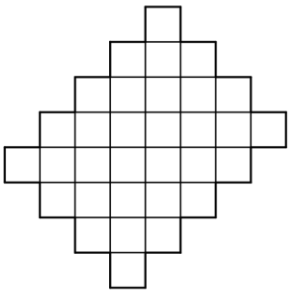
5.2. Doti divi skaitļi. Zināms, ka viens no tiem ir tieši septiņas reizes lielāks nekā otrs un katram no tiem ir vismaz divi cipari. Vai var gadīties, ka abu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari: **a)** 3; 4; 6 un 7; **b)** 1; 2 un 3?

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 3, 4, 6 vai 7, tad septiņas reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 1; 8; 2 vai 9, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā.

b) Jā, var, piemēram, der skaitļi 33 un 231, jo $33 \cdot 7 = 231$.

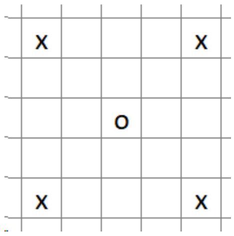
5.3. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1, uzzīmē daudzstūri, kuram gan perimetra, gan laukuma vērtība ir tāda pati kā malu skaits!

Atrisinājums. Piemēram, skat. 3. att., kur uzzīmēts 32-stūris, kura laukuma un perimetra vērtība ir 32.



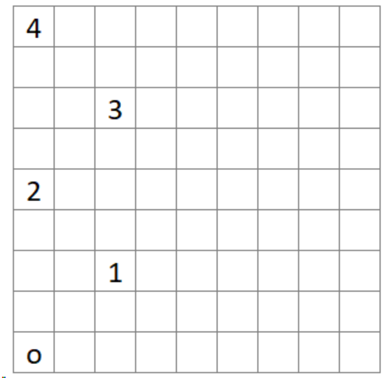
3. att.

5.4. Dots kvadrāts ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas. Vienā gājienā kauliņu var pārlikt tieši 2 rūtiņas uz priekšu pa jebkuru no diagonālēm, kas iziet no tā lauciņa, kurā atrodas kauliņš (skat. 4. att., kur kauliņš apzīmēts ar o un ar x atzīmētas tās rūtiņas, uz kurām to drīkst pārvietot). Vai, veicot vairākus gājienus, kauliņu no kreisās apakšējās rūtiņas var pārvietot uz kreiso augšējo rūtiņu, ja kvadrāta izmēri ir: **a)** 9×9; **b)** 10×10; **c)** 11×11?

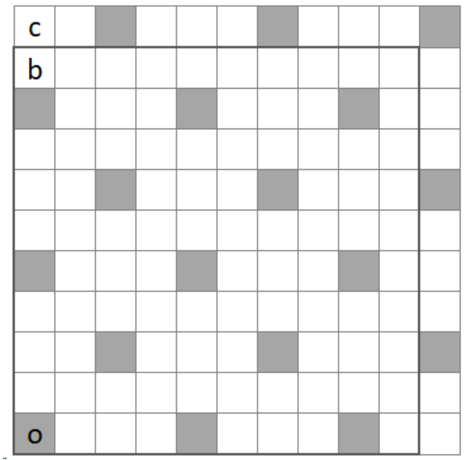


4. att.

Atrisinājums. a) Jā, var, skat., piemēram, 5. att., kur ar skaitļiem parādīti veiktie gājieni.
b) Nē, nevar. **c)** Nē, nevar. Pieņemsim, ka kauliņš sākumā atrodas uz pelēkas rūtiņas. Ievērojot, ka kauliņu var pārlikt izlaižot vienu rūtiņu pa diagonāli, pakāpeniski pelēkā krāsā iekrāsojam rūtiņas, kurās var atrasties kauliņš (skat. 6. att., kur iekrāsotas visas rūtiņas, kurās var atrasties kauliņš). Tā kā augšējā kreisā stūra rūtiņa ir balta (kvadrātam 10×10 tā atzīmēta ar b, bet kvadrātam 11×11 tā atzīmēta ar c), tad tajā kauliņš nevar nonākt.



5. att.



6. att.

5.5. Gunai bija četru veidu konfektes: 8 “Serenādes”, 14 “Lācīši Ķepainīši”, 20 “Vāverītes” un 26 “Sarkanās magones”. Katru no saviem dzimšanas dienas viesiem viņa uzcienāja ar tieši 3 dažādām konfektēm. Kāds ir lielākais iespējamais viesu skaits, kas bija ieradušies uz Gunas dzimšanas dienas svinībām?
1. atrisinājums. Lielākais iespējamais viesu skaits ir 21. Guna varēja pacienāt 21 viesi šādi:

- 13 viesus pacienāja ar “Lācīšiem Ķepainīšiem”, “Vāverītēm” un “Sarkanajām magonēm”;
- 7 viesus pacienāja ar “Serenādēm”, “Vāverītēm” un “Sarkanajām magonēm”;
- 1 viesi pacienāja ar “Serenādi”, “Lācīti Ķepainīti” un “Sarkano magoni”.

Kopā Guna viesiem būtu iedevusi 8 “Serenādes”, 14 “Lācīšus Ķepainīšus”, 20 “Vāverītes” un 21 “Sarkano magoni”, kas nepārsniedz viņai esošo konfekšu daudzumu.
Pierādīsim, ka vairāk kā 21 viesi Guna pacienāt nevarēs. Katru viesi ir jāpacienā ar vismaz divām dažādām konfektēm no “Serenādēm”, “Lācīšiem Ķepainīšiem” un “Vāverītēm”. Kopā šo konfekšu ir $8 + 14 + 20 = 42$. Ja būtu 22 viesi vai vairāk, tad tiem vajadzētu vismaz $22 \cdot 2 = 44$ šo veidu konfektes. Tātad vairāk par 21 viesi nevar ierasties uz svinībām.

2. atrisinājums. Lielākais iespējamais viesu skaits ir 21. Guna varēja pacienāt 21 viesi šādi:

- 13 viesus pacienāja ar "Lācīšiem Ķepainīšiem", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm";
- 7 viesus pacienāja ar "Serenādēm", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm;
- 1 viesi pacienāja ar "Serenādi", "Lācīti Ķepainīti" un "Sarkano magoni".

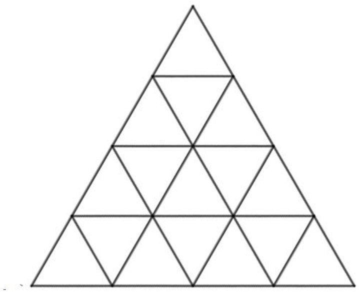
Kopā Guna viesiem būtu iedevusi 8 "Serenādes", 14 "Lācīši Ķepainīši", 20 "Vāverītes" un 21 "Sarkano magoni", kas nepārsniedz viņai esošo konfekšu daudzumu.

Pierādīsim, ka vairāk kā 21 viesi Guna pacienāt nevarēs. Pieņemsim, ka viņa ir pacienājusi 22 viesus. Tātad ir iztērētas $22 \cdot 3 = 66$ konfektes. Tā kā sākumā Gunai bija $8 + 14 + 20 + 26 = 68$ konfektes, tad pāri paliek $68 - 66 = 2$ konfektes. Ievērojam, ka katru viesi var pacienāt ar ne vairāk kā vienu "Sarkano magoni", tātad pāri jāpaliek vismaz $26 - 22 = 4$ "Sarkanajām magonēm". Izveidojas pretruna, tātad pieņēmums ir aplams un 22 viesus Guna pacienāt nevar. Ja viņa nevar pacienāt 22 viesus, tad nevar arī vairāk, un 21 ir lielākais iespējamais viesu skaits.

6. klase

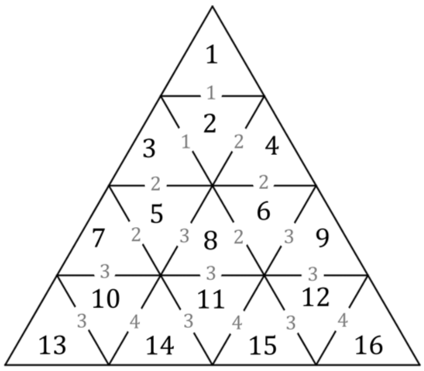
6.1. Skaitļus no 1 līdz 16 ieraksti 7. att. redzamajos mazajos trijstūros (katrā trijstūrī citu naturālo skaitli) tā, lai blakus trijstūros ierakstīties skaitļi neatšķiras vairāk kā par 4.

Piezīme. Par blakus trijstūriem sauksim trijstūrus, kam ir kopīga mala.



7. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 8. att., kur pelēkā krāsā norādītas atbilstošās starpības.



8. att.

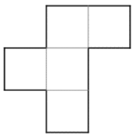
6.2. Doti divi skaitļi, katram no tiem ir vismaz divi cipari. Zināms, ka pirmais skaitlis ir vienāds ar skaitli, kuru iegūst, otro skaitli pareizinot pašu ar sevi. Vai var gadīties, ka abu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari **a)** 2; 3; 7 un 8; **b)** 1; 3; 4; 5 un 6?

Atrisinājums. a) Nē, prasītais nav iespējams. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, 3, 7 vai 8, tad skaitļa, kuru iegūst, skaitli pareizinot pašu ar sevi, pēdējais cipars ir attiecīgi 4, 9, 9 vai 4, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā.

b) Jā, piemēram, der skaitļi 34 un 1156, jo $34 \cdot 34 = 1156$.

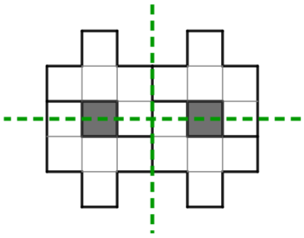
6.3. No četrām tādām figūrām, kāda dota 9. att., uzzīmē figūru, kurai ir tieši: **a)** 2 simetrijas asis; **b)** 4 simetrijas asis!

Piezīme. Figūru, kas dota 9. att., drīkst pagriezt un apmest otrādi. Uzzīmētajai figūrai var būt arī caurumi. Figūrai jābūt saistītai, tas ir, no figūras katras rūtiņas jābūt iespējai aiziet uz jebkuru citu šīs figūras rūtiņu, ejot tikai pa šīs figūras rūtiņām, katru reizi pārejot no attiecīgās rūtiņas uz blakus rūtiņu, ar ko tai ir kopīga mala.

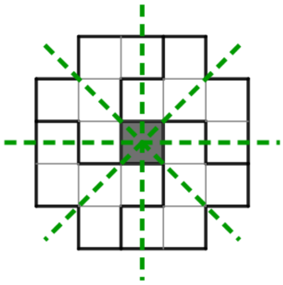


9. att.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 10. att. **b)** Skat., piemēram, 11. att.



10. att.



11. att.

6.4. Pie galda sēž zaļie bruņinieki un sarkanie bruņinieki, pavisam kopā 10 bruņinieku. Zaļie bruņinieki vienmēr saka patiesību, sarkanie bruņinieki vienmēr melo. Katrs bruņinieks izteicās:

- pirmais bruņinieks teica: "starp mums nav neviena zaļā bruņinieka";
- otrais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā viens zaļais bruņinieks";
- trešais teica: "starp mums ir ne vairāk kā divi zaļie bruņinieki";
- ceturtais teica: "starp mums ir ne vairāk kā trīs zaļie bruņinieki",
- un tā tālāk, līdz desmitais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā deviņi zaļie bruņinieki".

Cik zaļo un cik sarkano bruņinieku sēž pie galda?

1. atrisinājums. Pie galda sēž 5 zaļie un 5 sarkanie bruņinieki. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja. Pieņemsim pretējo, ka pie galda sēž vairāk vai mazāk nekā pieci zaļie bruņinieki.

- Ja pie galda sēž 6 vai vairāk zaļie bruņinieki, tad pirmie 6 bruņinieki ir melojuši, jo viņi teica, ka pie galda ir ne vairāk kā pieci zaļie bruņinieki vai vēl mazāk. Tātad vismaz pirmie seši bruņinieki ir sarkanie un kopā ir vismaz 12 bruņinieki. Tas ir pretrunā nosacījumam, ka kopā ir 10 bruņinieki, tātad pieņēmums, ka var būt vairāk nekā 5 zaļi bruņinieki, ir aplams.
- Ja pie galda sēž 4 vai mazāk zaļie bruņinieki. Tad pēdējie seši bruņinieki teica patiesību, jo viņi teica, ka pie galda ir ne vairāk kā 4 zaļie bruņinieki vai vēl mazāk. Tātad visi šie seši bruņinieki ir zaļie. Rodas pretruna, jo aplūkojām gadījumu, ja zaļo bruņinieku ir mazāk nekā 5, tātad pieņēmums ir aplams.

Iegūstam, ka ir tieši pieci zaļie bruņinieki. Ja pirmie pieci bruņinieki ir sarkanie un pēdējie pieci ir zaļie, tad uzdevuma nosacījumi izpildās.

2. atrisinājums. Pie galda sēž 5 zaļie un 5 sarkanie bruņinieki. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja.
Apzīmēsim zaļo bruņinieku skaitu ar x un sarkano bruņinieku skaitu ar $10 - x$. No bruņinieku izteikumiem izriet, ka pirmie x bruņinieki melo un ir sarkanie, bet pārējie saka patiesību. Tātad $x = 10 - x$ jeb $x = 5$.
Ja pirmie pieci bruņinieki ir sarkanie un pēdējie pieci ir zaļie, tad uzdevuma nosacījumi izpildās.

6.5. Latvijā, tāpat kā visās eirozonas valstīs, apgrozībā ir 1; 2; 5; 10; 20 un 50 centu monētas. Pieņemsim, ka ir zināma no šīm monētām izveidotā naudas summa S un izmantoto monētu skaits M.

Daudzos gadījumos, zinot S un M vērtības, var noteikt precīzu izmantoto monētu komplektu. Piemēram, ja $S=7$ un $M=3$, tad ir izmantota viena piecu un divas viena centa monētas un citu variantu nav.

Kāda ir mazākā M vērtība, kurai var atrast tādu S vērtību, ka, zinot S un M vērtības, izmantoto monētu komplektu viennozīmīgi nav iespējams noteikt?

1. atrisinājums. Mazākā M vērtība ir 3, tai atbilst $S=12$ un atšķirīgie monētu komplekti var būt $5+5+2$ un $10+1+1$.

Pierādīsim, ka tā ir mazākā iespējamā M vērtība.

Ja $M=1$, tad viena izmantotā monēta ir nosakāma viennozīmīgi, jo S ir jāsakrīt ar monētas vērtību.

Aplūkosim gadījumu, ja $M=2$, un visas iespējamās divu monētu vērtību summas:

$1+1=2$	$2+2=4$	$5+5=10$	$10+10=20$	$20+20=40$
$1+2=3$	$2+5=7$	$5+7=12$	$10+20=30$	$20+50=70$
$1+5=6$	$2+10=12$	$5+10=15$	$10+50=60$	
$1+10=11$	$2+20=22$	$5+20=25$		$50+50=100$
$1+20=21$	$2+50=52$	$5+50=55$		
$1+50=51$				

Kā redzams, visas iespējamās summas ir dažādas, tātad monētu komplektu, ja $M=2$, iespējams noteikt viennozīmīgi.

2. atrisinājums. Mazākā M vērtība ir 3, tai atbilst $S=12$ un atšķirīgie monētu komplekti var būt $5+5+2$ un $10+1+1$.

Pierādīsim, ka tā ir mazākā iespējamā M vērtība.

Ja $M=1$, tad viena izmantotā monēta ir nosakāma viennozīmīgi, jo S ir jāsakrīt ar monētas vērtību.

Aplūkosim gadījumu, ja $M=2$. Pieņemsim, ka eksistē divi atšķirīgi veidi, kā izteikt doto summu ar divām monētām, tas ir, $S=a_1+a_2=b_1+b_2$.

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka a_1 ir vislielākā vērtība. Ja tā sakrīt ar kādu no vērtībām b_1 vai b_2, tad a_2 jāsakrīt ar attiecīgi b_2 vai b_1, tātad šie monētu komplekti būs vienādi. Tātad b_1 un b_2 vērtības ir mazākas nekā a_1 vērtība. Ievērosim, ka no dotajām monētu vērtībām 1; 2; 5; 10; 20 un 50 katra nākamā vērtība ir vismaz divas reizes lielāka nekā iepriekšējā. Tas nozīmē, ka $a_1 \geq b_1+b_2$. Tātad vienādība $a_1+a_2=b_1+b_2$ nav iespējama, jo vienādības kreisā puse noteikti ir lielāka nekā labā puse, un mūsu pieņēmums ir aplams.

7. klase

7.1. Vai rindā kaut kādā secībā var uzrakstīt naturālus skaitļus **a)** no 1 līdz 23; **b)** no 1 līdz 2023 tā, lai blakus skaitļiem nebūtu vienādu ciparu?

Atrisinājums. a) Var, piemēram, šādā veidā:

1; 2; 10; 3; 11; 4; 12; 5; 13; 22; 14; 7; 15; 8; 16; 20; 17; 9; 18; 23; 19; 6; 21.

b) Nē, nevar. Pierādīsim, ka, lai kā arī šos skaitļus uzrakstītu rindā, vienmēr blakus atradīsies divi skaitļi, kas abi satur ciparu 1.

Ievērosim, ka ir daudz skaitļu, kuros ir cipars 1, to skaits noteikti ir vismaz 1100, jo ir 1000 četrciparu skaitļu, kas sākas ar ciparu 1, un 100 trīsciparu skaitļu, kas sākas ar ciparu 1.

Pieņemsim, ka dotie skaitļi kaut kādā secībā uzrakstīti rindā un sadalīsim tos blakusesošu skaitļu pāros, iegūsim 1012 pārus (pēdējam skaitlim nav pāra, tas savā "pārī" būs vienīgais skaitlis).

Redzam, ka četrciparu un trīsciparu skaitļu, kas satur ciparu 1, ir vairāk nekā pāru, tātad pēc Dirihlē principa kādā pārī atradīsies divi skaitļi, kas abi satur ciparu 1.

7.2. Kāds ir lielākais iespējamais septiņciparu skaitlis, kuram vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

- tas dalās ar 12;
- skaitļa pirmais cipars ir tāds pats kā pēdējais cipars;
- skaitļa 2., 4. un 6. cipars ir vienādi un tie ir divas reizes lielāki nekā pirmais cipars;
- skaitļa trešais cipars ir tāds pats kā piektais cipars?

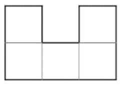
Atrisinājums. Lielākais iespējamais septiņciparu skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 4888884. Pamatosim, ka tas ir lielākais iespējamais skaitlis.

Skaitļa pēdējais cipars nevar būt lielāks kā 4, jo 6. cipars ir divas reizes lielāks nekā pēdējais cipars ($2 \cdot 5 = 10$, kas nav cipars). Tā kā skaitlim jādalās ar 12, tad tam jādalās gan ar 4, gan ar 3. Skaitļa otrais cipars nevar būt 9, jo 94 nedalās ar 4 (dalāmības pazīme ar 4). Tātad skaitlis varētu būt formā $\overline{48a8a84}$. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad $4+8+a+8+a+8+4 = 32+2\cdot a$ jādalās ar 3. Lai septiņciparu skaitlis būtu vislielākais, tad a vērtībai jābūt pēc iespējas lielākai:

- ja $a = 9$, tad $32 + 2 \cdot a = 50$, kas nedalās ar 3;
- ja $a = 8$, tad $32 + 2 \cdot a = 48$, tātad $a = 8$ un meklētais skaitlis ir 4888884.

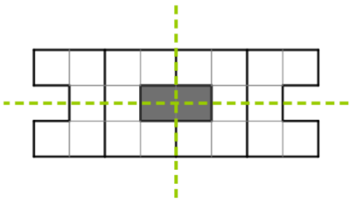
7.3. No četrām tādām figūrām, kāda dota 12. att., uzzīmē figūru, kurai ir tieši: **a)** 2 simetrijas asis; **b)** 4 simetrijas asis!

Piezīme. Figūru, kas dota 12. att., drīkst pagriezt. Uzzīmētajai figūrai var būt arī caurumi. Figūrai jābūt saistītai, tas ir, no figūras katras rūtiņas jābūt iespējai aiziet uz jebkuru citu šīs figūras rūtiņu, ejot tikai pa šīs figūras rūtiņām, katru reizi pārejot no attiecīgās rūtiņas uz blakus rūtiņu, ar ko tai ir kopīga mala.

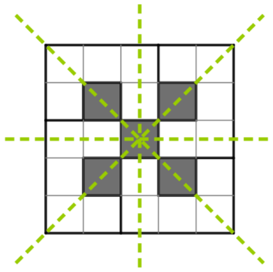


12. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, **a)** 13. att. un **b)** 14. att.



13. att.



14. att.

7.4. Latvijā, tāpat kā visās eirozonas valstīs, apgrozībā ir 1; 2; 5; 10; 20 un 50 centu monētas. Pieņemsim, ka ir zināma no šīm monētām izveidotā naudas summa S un izmantoto monētu skaits M.

Daudzos gadījumos, zinot S un M vērtības, var viennozīmīgi noteikt izmantoto monētu komplektu. Piemēram, ja $S = 7$ un $M = 3$, tad ir izmantota viena piecu un divas viena centa monētas un citu variantu nav.

Kāda ir mazākā S vērtība, kurai var atrast tādu M vērtību, ka, zinot S un M vērtības, izmantoto monētu komplektu viennozīmīgi nav iespējams noteikt?

Atrisinājums. Mazākā S vērtība ir 8, tai atbilst $M = 4$ un atšķirīgie monētu komplekti ir $5 + 1 + 1 + 1$ un $2 + 2 + 2 + 2$.

Pamatosim, ka mazākām S vērtībām šāda M vērtība neeksistē. Ievērosim, ka nevar izveidot summu S, ja monētu skaits M ir lielāks nekā S. Tātad pietiek apskatīt visus gadījumus, kad $M \leq S < 8$.

S \ M	1	2	3	4	5	6	7
1	1	---	---	---	---	---	---
2	2	1+1	---	---	---	---	---
3	nav	2+1	1+1+1	---	---	---	---
4	nav	2+2	2+1+1	1+1+1+1	---	---	---
5	5	nav	2+2+1	2+1+1+1	1+1+1+1+1	---	---
6	nav	5+1	2+2+2	2+2+1+1	2+1+1+1+1	1+1+1+1+1+1	---
7	nav	5+2	5+1+1	2+2+2+1	2+2+1+1+1	2+1+1+1+1+1	1+1+1+1+1+1+1

Visos aplūkotajos gadījumos saderīgos S un M pāros monētu komplektu varēja noteikt viennozīmīgi, tādēļ $S = 8$ ir mazākā iespējamā S vērtība.

7.5. Uz palodzes sēž vairākas bizbizmārītes, katrai no tām uz muguras ir vai nu divi punktiņi, vai septiņi punktiņi. Tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir septiņi punktiņi, vienmēr saka patiesību, bet tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir divi punktiņi, vienmēr melo. Katra bizbizmārīte izteicās:

- pirmā bizbizmārīte teica: "punktiņu skaits uz muguras mums visām ir vienāds";
- otrā teica: "mums visām kopā uz muguras ir 42 punktiņi";
- trešā teica: "nē, mums visām kopā uz muguras ir 32 punktiņi";
- katra no atlikušajām bizbizmārītēm teica: "no pirmajām trijām bizbizmārītēm tieši viena teica patiesību".

Cik bizbizmārītes sēž uz palodzes?

Atrisinājums. Uz palodzes sēž 6 bizbizmārītes. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja.

Aplūkosim pirmās trīs bizbizmārītes.

- Tās visas nerunā patiesību, jo otrās un trešās bizbizmārītes izteikumi ir pretrunīgi.
- Nevar būt arī, ka tās visas melo. Pieņemsim pretējo, ka pirmās trīs bizbizmārītes melo. Tātad melo arī visas pārējās bizbizmārītes, kuras saka, ka no pirmajām trijām ir viena, kura nemelo. Iegūstam, ka melo pilnīgi visas bizbizmārītes, bet tādā gadījumā pirmā bizbizmārīte saka patiesību, ka visām uz muguras ir vienāds punktiņu skaits. Iegūstam pretrunu, jo vienlaicīgi melo visas bizbizmārītes un pirmā saka patiesību, tātad pieņēmums ir aplams.

Tātad no pirmajām trim bizbizmārītēm ir tādas, kas melo, un ir tādas, kas saka patiesību. Iegūstam, ka pirmā bizbizmārīte noteikti melo, jo vienāds punktiņu skaits nozīmē, ka vai nu visas bizbizmārītes melo, vai visas saka patiesību. Tātad patiesību saka vai nu otrā, vai trešā bizbizmārīte, jo viņu izteikumi ir pretrunīgi. Tādā gadījumā tieši viena no pirmajām trim bizbizmārītēm saka patiesību, tātad visas pārējās saka patiesību un katrai no tām ir 7 punktiņi.

Pirmajām trim bizbizmārītēm kopā uz muguras ir $7 + 2 + 2 = 11$ punktiņi. Ja otrā bizbizmārīte teiktu patiesību, tad atlikušajām kopā uz muguras būtu $42 - 11 = 31$ punktiņš, kas nav iespējams, jo 31 nedalās ar 7. Tātad patiesību saka trešā bizbizmārīte un atlikušajām kopā ir $32 - 11 = 21$ punktiņš un bez pirmajām trim bizbizmārītēm ir vēl $21 : 7 = 3$ bizbizmārītes. Tātad kopā uz palodzes sēž 6 bizbizmārītes.

8. klase

8.1. Vai burtu vietā var ierakstīt sešus dažādus nenulles ciparus, lai dotā vienādība būtu patiesa un visas daļas būtu nesaīsināmas: $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, $\frac{7}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$. Vienādība ir patiesa, jo $\frac{7}{3}+\frac{1}{6}=\frac{14+1}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

8.2. Trīsciparu skaitļa x ciparu summa ir 12. Ja šim skaitlim nodzēš pēdējo ciparu, tad atlikušais divciparu skaitlis dalās ar 9. Zināms, ka skaitlis x ir par 99 lielāks nekā trīsciparu skaitlis, ko iegūst, uzrakstot tā ciparus pretējā secībā. Kāds var būt skaitlis x?

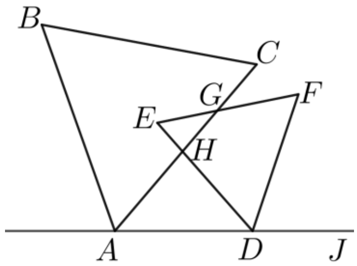
Atrisinājums. Vienīgais derīgais skaitlis x ir 453. Pamatosim, ka citu derīgu skaitļu nav. Apzīmējam skaitli x ar $\overline{abc}$. Tā kā, nodzēšot pēdējo ciparu, iegūst skaitli $\overline{ab}$, kas dalās 9, tad šī skaitļa ciparu summa $a+b$ dalās ar 9. Summas vērtība nevar būt 18 vai lielāka, jo visu trīs ciparu summa ir 12. Summas vērtība nevar būt 0, citādi $a=b=0$, bet a ir skaitļa pirmais cipars. Tātad vienīgā iespēja ir, ka $a+b=9$. Tā kā ciparu summa ir 12 jeb $a+b+c=12$, tad iegūstam, ka $c=3$.

Apzīmējam trīsciparu skaitli, kam cipari uzrakstīti pretējā secībā, ar $\overline{cba}$. Iegūstam:

$$\overline{abc}-99=\overline{cba};$$
$$100a+10b+c-99=100c+10b+a;$$
$$99a-99c=99;$$
$$a-c=1.$$

Tā kā $c=3$, tad $a=4$. Tā kā $a+b=9$, tad $b=5$.

8.3. Divi vienādmalu trijstūri novietoti plaknē kā parādīts 15. att. Zināms, ka $\sphericalangle CAD=\alpha$ un $\sphericalangle FDJ=\beta$. Izsaki leņķi CGF ar α un β.

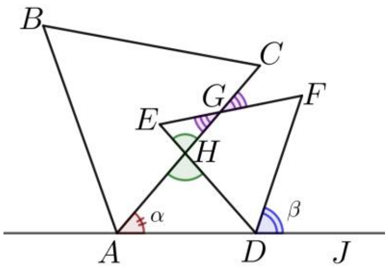


15. att.

Atrisinājums. Tā kā regulāra trijstūra visi leņķi ir 60°, tad $\sphericalangle HDA=180°-\sphericalangle FDJ-\sphericalangle EDF=$ $=180°-\beta-60°=120°-\beta$ (skat. 16. att.). Izmantojot krustleņķu īpašību un trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam:

- $\sphericalangle EHG=\sphericalangle AHD=180°-\alpha-(120°-\beta)=60°-\alpha+\beta$;
- $\sphericalangle CGF=\sphericalangle EGH=180°-60°-(60°-\alpha+\beta)=60°+\alpha-\beta$.

Tātad $\sphericalangle CGF=\sphericalangle EGH=60°+\alpha-\beta$.



16. att.

8.4. Četru bērnu – Almas, Bruno, Cēzara un Dorotejas – tēvs mēdz bērniem iedot sīknaudu. Tā reiz tēvs saviem bērniem iedeva sīknaudu šādi:

- Almai kādu naudas summu viena centa monētās;
- Bruno mazāko naudas summu divu centu monētās, kas ir lielāka nekā Almai iedotā naudas summa;
- Cēzaram mazāko naudas summu piecu centu monētās, kas ir lielāka nekā Bruno iedotā naudas summa;
- Dorotejai mazāko naudas summu desmit centu monētās, kas ir lielāka nekā Cēzaram iedotā naudas summa.

Kāda ir **a)** lielākā, **b)** mazākā iespējamā starpība starp Dorotejai un Almai iedotajām naudas summām?

Atrisinājums. a) Lielākā iespējamā starpības starp naudas summām ir 16 centi.

b) Mazākā iespējamā starpība starp naudas summām ir 7 centi.

Pamatosim, kāpēc citu iespēju nav. Tā kā skaitļu 1; 2; 5 un 10 mazākais kopīgais dalāmais ir 10, tad 10 centus var izteikt ar 1; 2; 5 un 10 centu monētām. Tātad no visām naudas summām varam atņemt 10 centus tik daudz reižu, līdz Almai paliek mazāk nekā 10 centi. Tā kā no visām summām ir atņemts vienāds naudas daudzums, tad starpība starp Dorotejai un Almai iedotajām naudas summām nemainās un visas iespējas ir aplūkotas tabulā.

Alma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bruno	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10
Cēzars	5	5	5	5	10	10	10	10	15	15
Doroteja	10	10	10	10	20	20	20	20	20	20
Starpība “Doroteja - Alma”	10	9	8	**7**	**16**	15	14	13	12	11

Kā redzams, lielākā iespējamā starpība ir 16, bet mazākā starpība ir 7 centi.

8.5. Uz palodzes sēž vairākas bizbizmārītes, katrai no tām uz muguras ir vai nu trīs punktiņi, vai astoņi punktiņi. Tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir astoņi punktiņi, vienmēr saka patiesību, bet tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir trīs punktiņi, vienmēr melo. Katra bizbizmārīte izteicās:

- pirmā bizbizmārīte teica: "punktiņu skaits uz muguras mums visām ir vienāds";
- otrā teica: "mums visām kopā uz muguras ir 38 punktiņi";
- trešā teica: "nē, mums visām kopā uz muguras ir 48 punktiņi";
- katra no atlikušajām bizbizmārītēm teica: "no pirmajām trijām bizbizmārītēm tieši viena teica patiesību".

Cik bizbizmārītes sēž uz palodzes?

Atrisinājums. Uz palodzes sēž 6 bizbizmārītes. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja.

Aplūkojam pirmās trīs bizbizmārītes.

- Tās visas nerunā patiesību, jo otrās un trešās bizbizmārītes izteikumi ir pretrunīgi.
- Nevar būt arī, ka tās visas melo. Pieņemsim pretējo, ka pirmās trīs bizbizmārītes melo. Tātad melo arī visas pārējās bizbizmārītes, kuras saka, ka no pirmajām trijām ir viena, kura nemelo. Iegūstam, ka melo pilnīgi visas bizbizmārītes, bet tādā gadījumā pirmā bizbizmārīte saka patiesību, ka visām uz muguras ir vienāds punktiņu skaits. Iegūstam pretrunu, jo vienlaicīgi melo visas bizbizmārītes un pirmā saka patiesību, tātad pieņēmums ir aplams.

Tātad no pirmajām trim bizbizmārītēm ir tādas, kas melo, un ir tādas, kas saka patiesību. Iegūstam, ka pirmā bizbizmārīte noteikti melo, jo vienāds punktiņu skaits nozīmē, ka vai nu visas bizbizmārītes melo, vai visas saka patiesību. Tātad patiesību saka vai nu otrā, vai trešā bizbizmārīte, bet ne abas, jo viņu izteikumi ir pretrunīgi. Tas nozīmē, ka tieši viena no pirmajām trim bizbizmārītēm saka patiesību, tātad visas pārējās saka patiesību un katrai no tām ir 8 punktiņi.

Pirmajām trim bizbizmārītēm kopā uz muguras ir $8+3+3=14$ punktiņi. Ja trešā bizbizmārīte teiktu patiesību, tad atlikušajām kopā uz muguras būtu $48-14=34$ punktiņi, kas nav iespējams, jo 34 nedalās ar 8. Tātad patiesību saka otrā bizbizmārīte un atlikušajām kopā ir $38 - 14 = 24$ punktiņi un bez pirmajām trim bizbizmārītēm ir vēl $24 : 8 = 3$ bizbizmārītes. Tātad kopā uz palodzes sēž 6 bizbizmārītes.

9. klase

9.1. Uz tāfeles uzrakstīta daļa $\frac{10}{2023}$. Katrā gājienā var izvēlēties patvaļīgu naturālu skaitli un vai nu pieskaitīt to gan daļas skaitītājam, gan saucējam, vai arī to reizināt ar daļas skaitītāju un saucēju. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt daļu, kuras vērtība ir: **a)** $\frac{1}{10}$; **b)** 1?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, šādi:

$$\frac{10}{2023} \quad \rightarrow \quad \frac{10 \cdot 9}{2023 \cdot 9} = \frac{90}{18207} \quad \rightarrow \quad \frac{90 + 1923}{18207 + 1923} = \frac{2013}{20130} = \frac{1}{10}.$$

b) Nē, nevar. Ievērosim, ka sākumā daļas skaitītājs ir mazāks nekā saucējs. Pēc katra atļautā gājiena šī īpašība saglabāsies. Tātad daļas vērtība nevar kļūt vienāda ar 1 (tā vienmēr būs mazāka nekā viens, jo tās skaitītājs vienmēr būs mazāks nekā saucējs).

9.2. Ja divciparu skaitlim $\overline{ab}$ galā pieraksta divciparu skaitli $\overline{cd}$, tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar 13. Zināms, ka $12a + 9b$ dalās ar 13. Kāds var būt skaitlis $\overline{cd}$?

Atrisinājums. Skaitlis $\overline{cd}$ var būt 13; 26; 39; 52; 65; 78 vai 91. Apzīmējam iegūto četrciparu skaitli ar $\overline{abcd}$. Ekvivalenti pārveidojam šo skaitli:

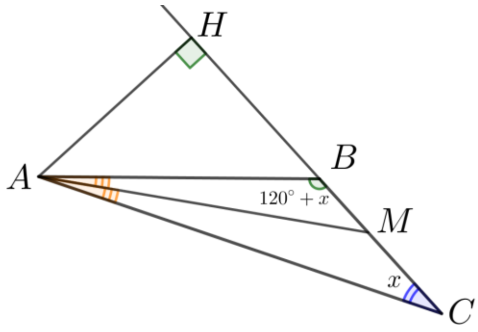
$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (12a + 9b) + (10c + d) + 988a + 91b =$$
$$= (12a + 9b) + (10c + d) + 13 \cdot 76a + 13 \cdot 7b.$$

Tā kā saskaitāmie $13 \cdot 76a$ un $13 \cdot 7b$ dalās ar 13 un no dotā $12a + 9b$ dalās ar 13, tad, lai viss skaitlis dalītos ar 13, arī $10c + d = \overline{cd}$ jādalās ar 13. Tātad skaitlis $\overline{cd}$ var būt jebkurš skaitļa 13 daudzkārtnis, tas ir, 13; 26; 39; 52; 65; 78 vai 91.

9.3. Trijstūrī viens leņķis ir par $120°$ lielāks nekā otrs. Pierādīt, ka bisektrise, kas vilkta no trešā leņķa virsotnes, ir divas reizes garāka nekā augstums no tās pašas virsotnes!

Atrisinājums. Apzīmējam trijstūra virsotnes ar A, B, C un pieņemsim, ka $\sphericalangle B = \sphericalangle C + 120°$ (skat. 17. att.). Apzīmējam $\sphericalangle C = x$, tad $\sphericalangle B = 120° + x$ un $\sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle C = 60° - 2x$.

No virsotnes A novelkam augstumu AH un bisektrisi AM. Tā kā AM ir bisektrise, tad $\sphericalangle MAC = \frac{1}{2}\sphericalangle A = 30° - x$. Leņķis $\sphericalangle AMH$ ir trijstūra MCA ārējais leņķis, tātad $\sphericalangle AMH = \sphericalangle MAC + \sphericalangle MCA = 30° - x + x = 30°$. Tas nozīmē, ka taisnleņķa trijstūrī AHM katete AH atrodas pret $30°$ leņķi, tātad tā ir vienāda ar pusi no hipotenūzas AM jeb $AM = 2AH$.



17. att.

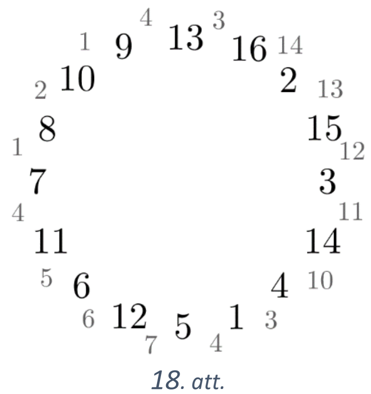
9.4. Uz katras no 36 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa četrām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt četrās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.
Vai vienmēr visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?
Atrisinājums. Nē, ne vienmēr. Aplūkosim 4×9 rūtiņas lielu tabulu.

1	1	1	9	1	1	1	9	3
1	1	9	1	1	1	9	1	3
1	9	1	1	1	9	1	1	3
9	1	1	1	9	1	1	1	3

Varam uzskatīt, ka katra rūtiņa atbilst vienai kartītei un tajā ierakstītais skaitlis atbilst uz kartītes uzrakstītajam.
Tabulas sadalīšana pa rindām atbilst sadalīšanai četrās grupās pa deviņām kartītēm katrā, bet pa kolonnām – deviņās grupās pa četrām kartītēm katrā. Abos gadījumos skaitļu summa visās grupās ir vienāda – attiecīgi 27 un 12.
Pieņemsim, ka šos skaitļus var sadalīt sešās grupās pa sešām kartītēm katrā tā, lai skaitļu summa visās grupās būtu vienāda. Tad skaitļu summai katrā grupā jābūt 18. Tā kā pavisam ir astoņas kartītes ar skaitli 9, tad pēc Dirihlē principa vismaz vienā grupā būs vairāk nekā viena kartīte ar skaitli 9. Ja grupā ir divas kartītes ar 9, tad jau uz šīm divām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa ir 18 un uz atlikušajām četrām kartītēm uzrakstīto skaitļu summai jābūt 0, kas nav iespējams, jo mazākā iespējamā četru kartīšu summa ir $4 \cdot 1 = 4$. Esam ieguvuši pretrunu, ko izraisīja pieņēmums, ka kartītes sešās grupās pa sešām katrā ar vienādu skaitļu kopsummu sadalīt ir iespējams.

9.5. Pirmie sešpadsmit naturālie skaitļi patvaļīgā secībā izvietoti pa apli, katriem diviem blakus skaitļiem aprēķināta to starpība (no lielākā skaitļa atņemot mazāko), un pēc tam aprēķināta visu šo 16 starpību summa S. Vai var gadīties, ka: **a)** $S = 100$; **b)** $S = 123$?
Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 18. att., kur ar pelēkā krāsā ir blakus skaitļu starpība. Tādā gadījumā

$$S = 3 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 3 + 4 + 7 + 6 + 5 + 4 + 1 + 2 + 1 + 4 = 100.$$



18. att.

b) Pamatosim, ka $S = 123$ nevar iegūt. Šo panāksim pierādot, ka S vienmēr ir jābūt pāra skaitlim. Ja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{16}$ ir patvaļīgi sakārtoti pirmie 16 naturālie skaitļi, tad summu S varam izteikt kā

$$S = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \cdots + |x_{15} - x_{16}| + |x_{16} - x_1|.$$

Ievērosim, ka S būtu 0, ja, rēķinot starpību, nebūtu vienmēr no lielākā skaitļa jāatņem mazākais, tas ir, starpības varētu pieļaut negatīvas vērtības, jo viss pa pāriem noīsinātos

$$x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{15} - x_{16} + x_{16} - x_1 = 0.$$

Tikko sākam parūpēties par to, lai kāda no negatīvajām starpībām summā būtu pozitīva (no lielāka tiek atņemts mazākais), tad rezultātā iegūstam, ka S pieaug par pāra skaitli. Ja summā ir kāda negatīva starpība $x_i - x_j$, kur $x_j > x_i$, un vēlamies to padarīt par pozitīvu izteiksmi $x_j - x_i$ jeb $|x_i - x_j|$, tad jāpieskaita $2(x_j - x_i)$, kas ir pāra skaitlis, jo $x_j - x_i = (x_i - x_j) + 2(x_j - x_i)$. Ja mēs katru negatīvo starpību pārvērstu par pozitīvu, lai rezultātā iegūtu S, kā tas aprakstīts uzdevuma nosacījumos, tad pie 0 būtu pakāpeniski jāpieskaita pāra skaitļi. Tātad neatkarīgi no tā, kā ir izkārtoti pirmie 16 naturālie skaitļi pa apli, skaitlis S vienmēr būs pāra skaitlis.

10. klase

10.1. Pie galda sēž zaļie bruņinieki un sarkanie bruņinieki, pavisam kopā 10 bruņinieku. Zaļie bruņinieki vienmēr saka patiesību, sarkanie bruņinieki vienmēr melo. Katrs bruņinieks izteicās:

- pirmais bruņinieks teica: "starp mums nav neviena zaļā bruņinieka";
- otrais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā viens zaļais bruņinieks";
- trešais teica: "starp mums ir ne vairāk kā divi zaļie bruņinieki";
- ceturtais teica: "starp mums ir ne vairāk kā trīs zaļie bruņinieki",
- un tā tālāk, līdz desmitais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā deviņi zaļie bruņinieki".

Cik zaļo un cik sarkano bruņinieku sēž pie galda?

1. atrisinājums. Pie galda sēž 5 zaļie un 5 sarkanie bruņinieki. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja. Pieņemsim pretējo, ka pie galda sēž vairāk vai mazāk nekā pieci zaļie bruņinieki.

- Ja pie galda sēž 6 vai vairāk zaļie bruņinieki, tad pirmie 6 bruņinieki ir melojuši, jo viņi teica, ka pie galda ir ne vairāk kā pieci zaļie bruņinieki vai vēl mazāk. Tātad vismaz pirmie seši bruņinieki ir sarkanie un kopā ir vismaz 12 bruņinieki. Tas ir pretrunā nosacījumam, ka kopā ir 10 bruņinieki, tātad pieņēmums, ka var būt vairāk nekā 5 zaļi bruņinieki, ir aplams.
- Ja pie galda sēž 4 vai mazāk zaļie bruņinieki. Tad pēdējie seši bruņinieki teica patiesību, jo viņi teica, ka pie galda ir ne vairāk kā 4 zaļie bruņinieki vai vēl mazāk. Tātad visi šie seši bruņinieki ir zaļie. Rodas pretruna, jo aplūkojām gadījumu, ja zaļo bruņinieku ir mazāk nekā 5, tātad pieņēmums ir aplams.

Iegūstam, ka ir tieši pieci zaļie bruņinieki. Ja pirmie pieci bruņinieki ir sarkanie un pēdējie pieci ir zaļie, tad uzdevuma nosacījumi izpildās.

2. atrisinājums. Pie galda sēž 5 zaļie un 5 sarkanie bruņinieki. Pamatosim, ka tā ir vienīgā iespēja.
Apzīmēsim zaļo bruņinieku skaitu ar x un sarkano bruņinieku skaitu ar $10 - x$. No bruņinieku izteikumiem izriet, ka pirmie x bruņinieki melo un ir sarkanie, bet pārējie saka patiesību. Tātad $x = 10 - x$ jeb $x = 5$.
Ja pirmie pieci bruņinieki ir sarkanie un pēdējie pieci – zaļie, tad izpildās uzdevuma nosacījumi.

10.2. Pierādīt, ka $9x^2 + 5y^2 - 8xy - 4x + 2 > 0$ visām reālām x un y vērtībām!

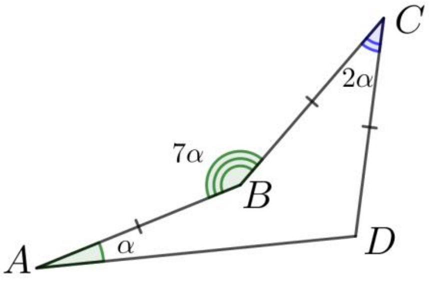
Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(4x^2 - 8xy + 4y^2) + y^2 + (4x^2 - 4x + 1) + x^2 + 1 > 0;$$

$$(2x - 2y)^2 + y^2 + (2x - 1)^2 + x^2 + 1 > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir četri nenegatīvi saskaitāmie un vēl pozitīvs skaitlis 1. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

10.3. Dots ieliekts četrstūris $ABCD$, kuram $AB = BC = CD$. Zināms, ka $\sphericalangle BAD = \alpha$ un $\sphericalangle BCD = 2\alpha$, bet leņķa ABC lielums četrstūra ārpusē ir 7α (skat. 19. att.). Aprēķināt α vērtību!



19. att.

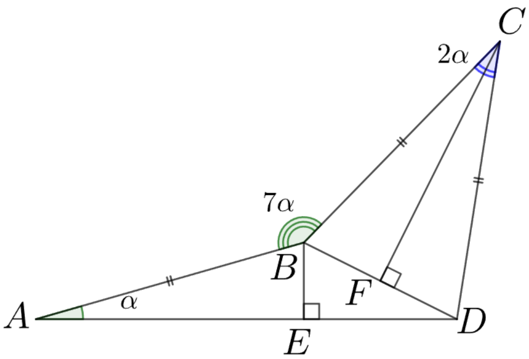
1. atrisinājums. Savienosim B ar D un novilksim augstumu BE no B pret AD un augstumu CF no C pret BD (skat. 20. att.). Tā kā vienādsānu trijstūrī BCD ir novilkts augstums pret pamatu, tad tā ir arī bisektrise un $\sphericalangle BCF = \sphericalangle DCF = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD = \alpha$. Ievērojam, ka trīs taisnleņķa trijstūri ir vienādi $\Delta ABE = \Delta CBF = \Delta CDF$ pēc pazīmes $h\ell$:

- $AB = CB = CD$ pēc dotā;
- $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BCF = \sphericalangle DCF = \alpha$.

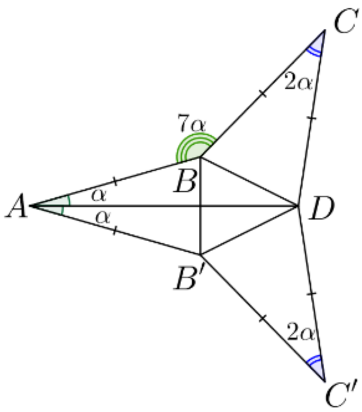
Tādā gadījumā $BE = BF = FD$ kā vienādo trijstūru atbilstošie elementi jeb $BE = \frac{1}{2}BD$, tātad taisnleņķa trijstūrī BED leņķis pret kateti, kas ir divas reizes garāka nekā hipotenūza, ir $30°$ jeb $\sphericalangle BDE = 30°$ un $\sphericalangle EBD = 60°$.

No vienādsānu trijstūra BCD varam izteikt pamata pieleņķi $\sphericalangle DBC = (180° - \sphericalangle BCD) : 2 = 90° - \alpha$.
No taisnleņķa trijstūra ABE varam izteikt $\sphericalangle ABE = 180° - \sphericalangle BAE - \sphericalangle AEB = 90° - \alpha$.
Tā kā $\sphericalangle EBD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ABE = 360°$ (jo veidojas pilns leņķis), tad

$$60° + 90° - \alpha + 7\alpha + 90° - \alpha = 360° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 24°.$$



20. att.



21. att.

2. atrisinājums. Vispirms atliekam punktus B' un C', kas ir attiecīgi punktu B un C simetriskie punkti attiecībā pret taisni AD (skat. 21. att.). Savienojam punktus B un D, kā arī B' un D. Rezultātā izveidosies trīs vienādsānu trijstūri: $\Delta ABB'$, $\Delta B'C'D$ un ΔCBD. Šie trijstūri ir savā starpā vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, jo to virsotnes leņķi $\sphericalangle B'AB = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DC'B'$ un sānu malu garumi ir savstarpēji vienādi. Tātad $\Delta BB'D$ ir vienādmalu trijstūris un $\sphericalangle B'BD = 60°$. Tā kā $\Delta ABB'$ ir vienādsānu, tad tā pamata leņķis $\sphericalangle ABB' = 90° - \alpha$. Līdzīgi varam spriest par ΔCBD pamata leņķi $\sphericalangle CBD = 90° - \alpha$.

Tagad aplūkojam četrstūra $ABCD$ iekšējo leņķi $\sphericalangle ABC$. Izmantojot doto, iegūstam, ka tā lielums ir $\sphericalangle ABC = 360° - 7\alpha$. No otras puses, tas ir vienāds ar

$$\sphericalangle ABB' + \sphericalangle B'BD + \sphericalangle CBD = 90° - \alpha + 60° + 90° - \alpha = 240° - 2\alpha.$$

Tātad

$$360° - 7\alpha = 240° - 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 24°.$$

10.4. Uz katras no 72 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.

Vai vienmēr:

a) visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas;

b) visas kartītes var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

Atrisinājums. Aplūkosim 8×9 lielu rūtiņu tabulu:

1	1	1	1	1	1	1	9	2
1	1	1	1	1	1	9	1	2
1	1	1	1	1	9	1	1	2
1	1	1	1	9	1	1	1	2
1	1	1	9	1	1	1	1	2
1	1	9	1	1	1	1	1	2
1	9	1	1	1	1	1	1	2
9	1	1	1	1	1	1	1	2

Varam uzskatīt, ka katra rūtiņa atbilst vienai kartītei un tajā ierakstītais skaitlis ir uz kartītes uzrakstītais skaitlis.

Tabulas sadalīšana pa rindām atbilst sadalīšanai astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā, bet pa kolonnām – deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā. Abos gadījumos skaitļu summa visās grupās ir vienāda – attiecīgi 18 un 16. Visu skaitļu kopsumma ir 144.

a) Pamatosim, ka aplūkotajam piemēram neizpildās šī prasība. Pieņemsim pretējo, ka šos skaitļus var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, lai skaitļu summa visās grupās būtu vienāda. Tad skaitļu summai katrā grupā jābūt $\frac{144}{6} = 24$. Tā kā kopā ir astoņas kartītes ar skaitli 9, tad pēc Dirihlē principa vismaz vienā grupā būs vairāk nekā viena kartīte ar 9. Ja grupā ir divas kartītes ar 9, tad uz atlikušajām 10 kartītēm uzrakstīto skaitļu summai jābūt $24 - 2 \cdot 9 = 6$, kas nav iespējams, jo mazākā iespējamā summa ir $10 \cdot 1 = 10$. Esam ieguvuši pretrunu, ko izraisīja pieņēmums, ka kartītes sešās grupās pa 12 katrā ar vienādu skaitļu kopsummu sadalīt ir iespējams.

b) Pamatosim, ka aplūkotajam piemēram neizpildās šī prasība. Pieņemsim pretējo, ka šos skaitļus var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, lai skaitļu summa visās grupās būtu vienāda. Tad skaitļu summai katrā grupā jābūt $\frac{144}{12} = 12$. Nevienā grupā nevar būt vairāk kā viena kartīte ar skaitli 9, jo $2 \cdot 9 = 18 > 12$. Ja grupā ir viena kartīte ar 9, tad uz atlikušajām piecām kartītēm uzrakstīto skaitļu summai jābūt $12 - 9 = 3$, kas nav iespējams, jo mazākā iespējamā summa ir $5 \cdot 1 = 5$. Esam ieguvuši pretrunu, ko izraisīja pieņēmums, ka ir iespējams sadalīt kartītes 12 grupās pa sešām katrā ar vienādu skaitļu kopsummu.

10.5. Uz tāfeles uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100 (katrs tieši vienu reizi). Maruta vienu no tiem nodzēsa un izrādījās, ka viens no atlikušajiem skaitļiem tagad ir visu atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais. Kāds varēja būt Marutas nodzēstais skaitlis?

1. atrisinājums. Nodzēstais skaitlis varēja būt 1 vai 100. Ja nodzēš skaitli 1 vai 100, tad nosacījums izpildās, jo atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais pirmajā gadījumā ir $\frac{2+3+\cdots+100}{99} = \frac{100+2}{99\cdot 2} \cdot 99 = 51$, bet otrajā gadījumā ir $\frac{1+2+\cdots+99}{99} = \frac{1+99}{99\cdot 2} \cdot 99 = 50$. Tagad arī redzams, kāpēc neder neviens cits skaitlis – šajā gadījumā atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais atradīsies starp 50 un 51, tātad nebūs vesels skaitlis.

2. atrisinājums. Ievērosim, ka pirmo 100 skaitļu summa ir

$$S=\frac{101\cdot 100}{2}=50\cdot 101=(51-1)(99+2)=51\cdot 99+102-99-2=51\cdot 99+1.$$

Ja nodzēstais skaitlis ir y, tad $(S-y)$ jādalās ar 99. Tātad $(51\cdot 99+1-y)$ jādalās ar 99. Tas nozīmē, ka y var būt tikai 1 vai 100.

11. klase

11.1. Mārim bija četru veidu konfektes: 15 "Serenādes", 25 "Lācīši Ķepainīši", 35 "Vāverītes" un 45 "Sarkanās magones". Katru no saviem dzimšanas dienas viesiem viņš uzcienāja ar tieši 3 dažādām konfektēm. Kāds ir lielākais iespējamais viesu skaits, kas bija ieradušies uz Māra dzimšanas dienas svinībām?

1. atrisinājums. Lielākais iespējamais viesu skaits ir 37. Māris varēja pacienāt 37 viesus šādi:

- 22 viesus pacienāja ar "Lācīšiem Ķepainīšiem", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm";
- 13 viesus pacienāja ar "Serenādēm", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm";
- 2 viesus pacienāja ar "Serenādēm", "Lācīšiem Ķepainīšiem" un "Sarkanajām magonēm".

Kopā Māris viesiem būtu iedevis 15 "Serenādes", 24 "Lācīšus Ķepainīšus", 35 "Vāverītes" un 37 "Sarkanās magones", kas nepārsniedz viņam esošo konfekšu daudzumu.

Pierādīsim, ka vairāk kā 37 viesus Māris pacienāt nevarēs. Katru viesi ir jāpacienā ar vismaz divām dažādām konfektēm no "Serenādēm", "Lācīšiem Ķepainīšiem" un "Vāverītēm". Kopā šo konfekšu ir $15+25+35=75$. Ja būtu 38 viesi, tad tiem vajadzētu vismaz $38\cdot 2=76$ šo veidu konfektes. Tātad vairāk kā 37 viesi nevarēja ierasties uz svinībām.

2. atrisinājums. Lielākais iespējamais viesu skaits ir 37. Māris varēja pacienāt 37 viesus šādi:

- 22 viesus pacienāja ar "Lācīšiem Ķepainīšiem", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm";
- 13 viesus pacienāja ar "Serenādēm", "Vāverītēm" un "Sarkanajām magonēm";
- 2 viesus pacienāja ar "Serenādēm", "Lācīšiem Ķepainīšiem" un "Sarkanajām magonēm".

Kopā Māris viesiem būtu iedevis 15 "Serenādes", 24 "Lācīšus Ķepainīšus", 35 "Vāverītes" un 37 "Sarkanās magones", kas nepārsniedz viņam esošo konfekšu daudzumu.

Pierādīsim, ka vairāk kā 37 viesus Māris pacienāt nevarēs. Pieņemsim, ka viņš ir pacienājis 38 viesus. Tātad viņš ir iztērējis $38\cdot 3=114$ konfektes. Tā kā sākumā viņam bija $15+25+35+45=120$ konfektes, tad pāri paliek $120-114=6$ konfektes. Ievērojam, ka katru viesi var pacienāt ar ne vairāk kā vienu "Sarkano magoni", tātad pāri jāpaliek vismaz $45-37=7$ "Sarkanajām magonēm". Izveidojas pretruna, tātad pieņēmums ir aplams, un Māris nevar pacienāt 38 viesus. Ja viņš nevar pacienāt 38 viesus, tad nevar arī vairāk, un lielākais iespējamais viesu skaits ir 37.

11.2. Pierādīt, ka $a^2c+ac^2-6abc+4b^2c+ab^2\geq 0$ visām pozitīvām reālām a, b un c vērtībām!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$c(a^2-2\cdot a\cdot 2b+4b^2)+a(c^2-2bc+b^2)\geq 0;$$

$$c(a-2b)^2+a(c-b)^2\geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un skaitļi a un c ir pozitīvi, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visām pozitīvām a, b un c vērtībām.

11.3. Dota riņķa līnija, uz tās atlikti punkti A, B un D, bet punkts C atlikts tās iekšpusē tā, ka punkti A un D atrodas dažādās pusēs no taisnes BC. Zināms, ka $AB = 2$, $BC = 5$, $CD = 3$, $AB \perp BC$ un $BC \perp CD$. Aprēķināt riņķa, ko ierobežo dotā riņķa līnija, laukumu!

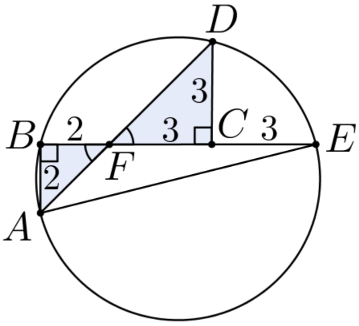
Atrisinājums. Pagarinām nogriezni BC līdz tas krusto riņķa līniju punktā E (skat. 22. att.). Tādā gadījumā AE būs riņķa līnijas diametrs, jo uz tā balstās taisnais leņķis $\sphericalangle ABE$. Papildus novelkam nogriezni AD un tā krustpunktu ar BC apzīmēsim ar F. Trijstūri ΔABF un ΔFCD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo abi ir taisnleņķa un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$. No šī izriet, ka

$$\frac{AB}{BF} = \frac{CD}{CF} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{BF} = \frac{3}{FC} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{BF} = \frac{3}{5 - BF} \quad \Rightarrow \quad BF = 2, CF = 3.$$

Tātad ΔCDF ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo $CF = CD = 3$. Tātad $\sphericalangle CDF = 45°$.
Tā kā ievilktais leņķis $\sphericalangle ADE$ balstās uz diametru AE, tad $\sphericalangle ADE = 90°$. No kā izriet, ka

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle ADE - \sphericalangle CDF = 90° - 45° = 45°.$$

Tātad arī ΔCDE ir taisnleņķa vienādsānu trijstūris, kurā $CD = CE = 3$.
Tātad $BE = BF + CF + CE = 8$ un diametrs $AE = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.
Līdz ar to riņķa laukums $S = \frac{\pi AE^2}{4} = 17\pi$.



22. att.

11.4. Uz katras no 72 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.

Vai vienmēr:

a) visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas;

b) visas kartītes var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

Atrisinājums. Aplūkosim 8×9 lielu rūtiņu tabulu:

1	1	1	1	1	1	1	9	2
1	1	1	1	1	1	9	1	2
1	1	1	1	1	9	1	1	2
1	1	1	1	9	1	1	1	2
1	1	1	9	1	1	1	1	2
1	1	9	1	1	1	1	1	2
1	9	1	1	1	1	1	1	2
9	1	1	1	1	1	1	1	2

Varam uzskatīt, ka katra rūtiņa atbilst vienai kartītei un tajā ierakstītais skaitlis ir uz kartītes uzrakstītais skaitlis.
Tabulas sadalīšana pa rindām atbilst sadalīšanai astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā, bet pa kolonnām – deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā. Abos gadījumos skaitļu summa visās grupās ir vienāda – attiecīgi 18 un 16. Pieminēsim, ka visu skaitļu kopsumma šajā piemērā attiecīgi ir 144.
a) Pamatosim, ka aplūkotajam piemēram neizpildās šī prasība. Pieņemsim pretējo, ka šos skaitļus var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, lai skaitļu summa visās grupās būtu vienāda. Tad skaitļu summai katrā grupā jābūt $\frac{144}{6}=24$. Tā kā kopā ir astoņas kartītes ar skaitli 9, tad pēc Dirihlē principa vismaz vienā grupā būs vairāk nekā viena kartīte ar 9. Ja grupā ir divas kartītes ar 9, tad uz atlikušajām 10 kartītēm uzrakstīto skaitļu summai jābūt $24-2\cdot 9=6$, kas nav iespējams, jo mazākā iespējamā summa ir $10\cdot 1 \ = \ 10$. Esam ieguvuši pretrunu, ko izraisīja pieņēmums, ka kartītes sešās grupās pa 12 katrā ar vienādu skaitļu kopsummu sadalīt ir iespējams.
b) Pamatosim, ka aplūkotajam piemēram neizpildās šī prasība. Pieņemsim pretējo, ka šos skaitļus var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, lai skaitļu summa visās grupās būtu vienāda. Tad skaitļu summai katrā grupā jābūt $\frac{144}{12}=12$. Nevienā grupā nevar būt vairāk par vienu kartīti ar skaitli 9, jo $2\cdot 9=18>12$. Ja grupā ir viena kartīte ar 9, tad uz atlikušajām piecām kartītēm uzrakstīto skaitļu summai jābūt $12-9=3$, kas nav iespējams, jo mazākā iespējamā summa ir $5\cdot 1=5$. Esam ieguvuši pretrunu, ko izraisīja pieņēmums, ka ir iespējams sadalīt kartītes 12 grupās pa sešām katrā ar vienādu skaitļu kopsummu.

11.5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $17a^2-7b^2+c^2=2023$.
Atrisinājums. Pierādīsim, ka šim vienādojumam nav atrisinājuma. Lai to pamatotu, aplūkojam abas vienādojuma puses pēc moduļa 8. Vesela skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 4 (skat. tabulu).

$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\boldsymbol{n^2}$ (mod 8)	0	1	4	1	0	1	4	1

Tātad skaitlis $17a^2$ pēc moduļa 8 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 4 (jo $17a^2=16a^2+a^2$) un līdzīgi arī $-7b^2$ (jo $-7b^2 \ =-8b^2+b^2$) var pieņemt tikai šos trīs atlikumus. Bet skaitlis 2023, dalot ar 8, dod atlikumu 7. Redzams, ka nekādā veidā saskaitot trīs skaitļus no kopas $\{0;\ 1;\ 4\}$ mēs nevaram iegūt skaitli, kas atlikumā, dalot ar 8, dotu 7. Tātad šim vienādojumam nav atrisinājuma.

12. klase

12.1. Vai burtu vietā var ierakstīt 9 dažādus nenulles ciparus, lai vienādība $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}+\frac{E}{F}+\frac{G}{H}=I$ būtu patiesa?
Atrisinājums. Jā, var, piemēram, $\frac{5}{4}+\frac{9}{3}+\frac{6}{8}+\frac{2}{1}=1\frac{1}{4}+3+\frac{3}{4}+2=7$.

12.2. Kāda ir izteiksmes $2x^2-8xy+4x+9y^2-14y+9$ mazākā iespējamā vērtība, ja x un y ir reāli skaitļi?
Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$2x^2-8xy+4x+9y^2-14y+9=2(x^2+4y^2+1-4xy+2x-4y)+y^2-6y+9-2=$$
$$=2(x-2y+1)^2+(y-3)^2-2\geq -2.$$

Tā kā kvadrāti ir nenegatīvi, tad dotās izteiksmes mazākā vērtība ir -2 un to iegūst, ja $y=3$ un $x=5$.

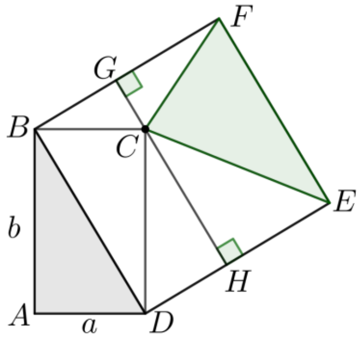
12.3. Taisnstūra $ABCD$ diagonāle BD ir kvadrāta $BDEF$ viena mala. Punkts C atrodas kvadrāta $BDEF$ iekšpusē. Pierādīt, ka $S_{ABD} \leq S_{CEF}$.

Atrisinājums. Apzīmēsim $AD = a$ un $AB = b$. Tādā gadījumā $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, no kā iegūstam, ka $S_{BDEF} = BD^2 = a^2 + b^2$.

Caur punktu C novelkam nogriezni GH, kas ir paralēls kvadrāta malai BD (skat. 23. att.). Taisnstūra diagonāle BD sadala taisnstūra $ABCD$ laukumu divos vienādos trijstūros ABD un BCD, kuru laukumi ir $S_{ABD} = S_{BCD} = \frac{ab}{2}$.

Tā kā trijstūra BCD pamats ir taisnstūra $BDHG$ mala BD, bet trijstūra augstuma garums ir vienāds ar taisnstūra malas BG garumu, tad $S_{BDHG} = 2S_{BCD} = ab$. Līdzīgi iegūstam, ka $S_{CEF} = \frac{1}{2}S_{EFGH}$. Līdz ar to

$$S_{CEF} = \frac{1}{2}S_{EFGH} = \frac{S_{BDEF} - S_{BDHG}}{2} = \frac{(a^2+b^2) - ab}{2} = \frac{(a-b)^2 + ab}{2} \geq \frac{ab}{2} = S_{ABD}.$$



23. att.

12.4. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas iekrāsotas astoņas rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir iekrāsota tieši viena rūtiņa.

a) Pierādīt, ka jebkuram kvadrātam ar šādi iekrāsotām rūtiņām var atrast taisnstūri ar izmēriem 2×4 rūtiņas, kurā nav iekrāsota neviena rūtiņa!

b) Parādīt, ka līdzīgs apgalvojums par taisnstūri ar izmēriem 2×5 rūtiņas nav patiess!

Atrisinājums. a) Mēģināsim panākt pretējo, tas ir, iekrāsot rūtiņas dotajā kvadrātā tā, lai nav taisnstūra ar izmēriem 2×4 rūtiņas bez iekrāsotām rūtiņām.

Visu laukumu sadalām kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas, kurus nosauksim par *šūnām* (skat. 24. att., kur katrā šūnā norādīts tās numurs).

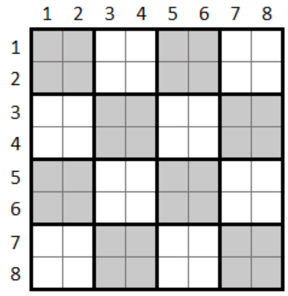
1	2	3	4
16	11	10	5
15	12	9	6
14	13	8	7

24. att.

Tā kā katrā rindā un katrā kolonnā ir iekrāsota tieši viena rūtiņa, tad katrā šūnā var būt iekrāsotas 0, 1 vai 2 rūtiņas. Ja kādā šūnā būs atzīmētas divas rūtiņas, tad attiecīgajā šūnu rindā un šūnu kolonnā pārējās šūnas būs bez iekrāsotām rūtiņām, turklāt vismaz divās blakus šūnās nebūs iekrāsotu rūtiņu, šīs šūnas kopā veidos 2×4 rūtiņu taisnstūri bez iekrāsotām rūtiņām (pretruna ar pieņēmumu). Tātad katrā šūnā drīkst iekrāsot ne vairāk kā 1 rūtiņu. Tā kā kopā ir iekrāsotas tieši 8 rūtiņas, tad astoņās no 16 šūnām jābūt iekrāsotai tieši vienai rūtiņai.

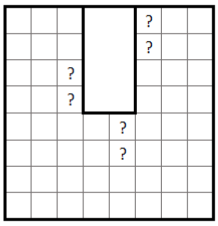
Pamatosim: ja divas šūnas ar iekrāsotu rūtiņu atradīsies blakus, tad kaut kur blakus atradīsies divas šūnas bez iekrāsotām rūtiņām. Ievērojam, ka doto kvadrātu var pagriezt tā, lai šīs divas blakus šūnas ar iekrāsotajām rūtiņām būtu ar secīgiem numuriem (mazākais numurs ir nepāra) kā parādīts 24. att.

Tad atlikušās šūnas secīgi var sadalīt pa pāriem, iegūstot 7 šūnu pārus. Lai nebūtu taisnstūris bez iekrāsotām rūtiņām, tad vismaz katrā otrajā šūnā jāiekrāso rūtiņa. Tas nozīmē, ka nepieciešams pa rūtiņai atzīmēt vismaz 7 šūnās, kas nav iespējams, jo atlikušais iekrāsojamo rūtiņu skaits ir 6.
Tātad šūnām ar iekrāsotajām rūtiņām jābūt izvietotām šaha galdiņa veidā (skat. 25. att.).

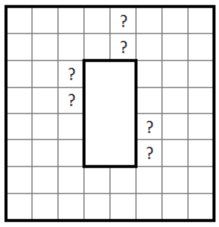


25. att.

Simetrijas dēļ varam pieņemt, ka 1. šūna satur iekrāsotu rūtiņu. Aplūkosim 11. šūnu un pieņemsim, ka tajā iekrāsotā rūtiņa atrodas šūnas kreisajā pusē (tas ir, sākotnējā kvadrāta 3. kolonnā). Vai nu 3. šūnā, vai 9. šūnā iekrāsotajai rūtiņai ir jāatrodas 6. kolonnā (jo kolonnā drīkst būt iekrāsota tikai viena rūtiņa), tad taisnstūris ar izmēriem 2×4 bez iekrāsotām rūtiņām parādīts attiecīgi 26. att. un 27. att.

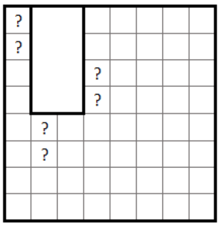


26. att.

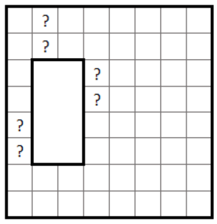


27. att.

Gadījums, kad 11. šūnā iekrāsotā rūtiņa atrodas šūnas labajā pusē, ir simetrisks, tad taisnstūris ar izmēriem 2×4 bez iekrāsotām rūtiņām parādīts 28. att. un 29. att.

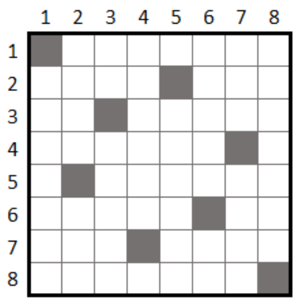


28. att.



29. att.

Līdz ar to jebkurā kvadrātā ar doto iekrāsojumu var atrast taisnstūri ar izmēriem 2×4 rūtiņas, kurā nav iekrāsota neviena rūtiņa.
b) Piemēram, skat. 30. att., kurā nevar atrast 2×5 taisnstūri ar neatzīmētu rūtiņu.



30. att.

12.5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kuram tieši **a)** 25%; **b)** 26% no visiem tā pozitīvajiem dalītājiem dod atlikumu 1, dalot ar 3?

Piezīme. Skaitļa n dalītājs ir arī 1 un pats skaitlis n.

Atrisinājums. a) Jā, ir, piemēram, skaitlis 27. Tam ir četri dalītāji: $1, 3, 9$ un 27. Vienīgais dalītājs, kas, dalot ar 3, atlikumā dod 1, ir atlikums 1, kas sastāda $\frac{1}{4}$ jeb 25% no dalītājiem.

b) Jā, eksistē, piemēram, skaitlis $3 \cdot 2^{24}$.

Pamatosim, ka šim skaitlim izpildās prasītā īpašība. Šim skaitlim kopā ir 50 dalītāji, jo katru pirmskaitli, veidojot dalītāju, vai nu varam izlaist, vai arī ņemt kādā no pakāpēm, kas nepārsniedz skaitlī ieejošo pakāpi. Tātad reizinātājam 3 ir 2 izvēles, un reizinātājiem 2 ir 25 izvēles. Kopā iegūstam $2 \cdot 25 = 50$ izvēles jeb dalītājus. Puse no šiem dalītājiem ir formā $3 \cdot 2^a$ un otra puse ir formā 2^a, kur $a \in \{0; 1; 2; ..; 24\}$. Dalītāji formā $3 \cdot 2^a$ dalās ar 3. Noskaidrosim, kuri no dalītājiem formā 2^a, dalot ar 3, dod atlikumu 1. Apskatām divus gadījumus.

- Ja kāpinātājs a ir pāra skaitlis, tad $a = 2k$ un tādā gadījumā $2^a = 2^{2k} = 4^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$. Tātad visi šie dalītāji, dalot ar 3, dod atlikumu 1. Tā kā no 0 līdz 24 (ieskaitot) ir 13 pāra skaitļi, tad arī šādu dalītāju skaits ir 13.
- Ja kāpinātājs a ir nepāra skaitlis, tad $a = 2k + 1$ un tādā gadījumā $2^a = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv$ $\equiv 2 \cdot 1^k \equiv 2 \pmod 3$. Tātad visi šie dalītāji, dalot ar 3, dod atlikumu 2. To skaits ir 12.

Tā kā skaitlim $3 \cdot 2^{24}$ ir 50 dalītāji, tad $\frac{13}{50} = 26\%$ no tiem atlikumā dod 1, dalot ar 3.