Atklātā matemātikas olimpiāde

Uzdevumi un atrisinājumi

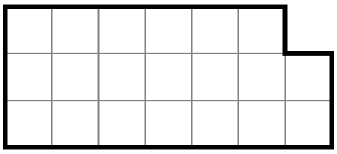
5. klase

5.1. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklētajam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

5.2. Pa rūtiņu līnijām uzzīmē tādu sešstūri, kuram perimetra un laukuma vērtības sakrīt! *Piezīme*. Laukums ir sešstūri veidojošo rūtiņu skaits un perimetrs ir rūtiņu malu, kas pilnībā atrodas uz robežas, skaits.

Atrisinājums. Piemēram, der 1. att. redzamais sešstūris, kuram perimetrs ir 20 un arī laukums ir 20.

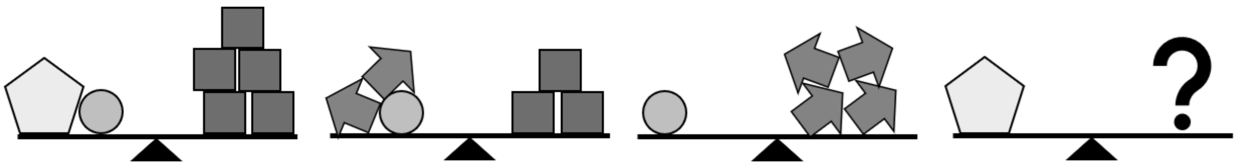


1. att.

5.3. Uz teātra izrādi tika izgatavotas 250 biļetes un vismaz puse no biļetēm tika pārdotas. Zināms, ka tieši trešdaļa no skatītājiem bija skolēni, tieši piektdaļa – studenti un tieši septītdaļa – pensionāri. Cik biļetes tika pārdotas?

Atrisinājums. Lai skatītāju skaitu varētu sadalīt tieši trīs, piecās un septiņās daļās, pārdoto biļešu skaitam jādalās ar 3, 5 un 7. Tātad pārdoto biļešu skaitam jādalās ar $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Tā kā vismaz puse no biļetēm tika pārdotas, tad tika pārdotas $105 \cdot 2 = 210$ biļetes.

5.4. Zināms, ka svari (a), (b) un (c) atrodas līdzsvarā. Cik bultiņu jāliek jautājuma zīmes vietā, lai svari (d) atrastos līdzsvarā? Atbildi pamatot!



(a) (b) (c) (d)

Atrisinājums. Jautājuma zīmes vietā jāliek sešas bultiņas. Izteiksim visu figūru masu bultiņās. No tā, ka svari (c) atrodas līdzsvarā, secinām, ka aplīša masa ir vienāda ar četru bultiņu masu.

Līdz ar to varam uzskatīt, ka svariem (b) kreisajā kausā atrodas sešas bultiņas, kas sver tikpat, cik trīs kvadrāti. Tātad viena kvadrāta masa ir tikpat, cik divu bultiņu masa.

Tālāk apskatām svarus (a). Aizvietojot aplīti ar četrām bultiņām un katru kvadrātu ar divām bultiņām, iegūstam, ka piecstūra un četru bultiņu masa ir tikpat, cik desmit bultiņu masa. Tātad piecstūra masa ir tikpat, cik sešu bultiņu masa.

5.5. Katrai no trīs meitenēm Elīnai, Gunai un Marutai patīk viena no krāsām: zaļa, dzeltena, oranža (katrai cita krāsa), bet abas pārējās krāsas nepatīk. Zināms, ka tieši viens no apgalvojumiem ir patiess:

- Gunai nepatīk oranža krāsa;
- Elīnai nepatīk zaļa krāsa;
- Elīnai nepatīk oranža krāsa.

Kāda krāsa patīk katrai meitenei? Atbildi pamatot!

Atrisinājums. Gunai patīk oranžā, Elīnai – zaļā un Marutai – dzeltenā krāsa.

Skaidrs, ka vismaz viens no diviem pēdējiem apgalvojumiem ir patiess, jo Elīnai nevar patikt gan zaļā, gan oranžā krāsa. Tā kā kopā ir tikai viens patiess apgalvojums, tad pirmais apgalvojums noteikti ir aplams un Gunai patīk oranžā krāsa.

Ja Elīnai patiktu dzeltenā krāsa, tad abi pēdējie apgalvojumi būtu patiesi, kas nav iespējams. Tā kā Gunai patīk oranžā krāsa, tad secinām, ka Elīnai patīk zaļā krāsa. Tātad Marutai patīk dzeltenā krāsa.

6. klase

6.1. Uz papīra lapas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2022 (katrs vienu reizi). Vispirms Amanda ar sarkanu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 3. Tad viņa ar zilu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 5. Un visbeidzot viņa ar zaļu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 7. Cik ir tādu skaitļu, kas ir apvilkti ar vismaz divām dažādām krāsām?

Atrisinājums. Pamatosim, ka 249 skaitļi ir apvilkti ar vismaz divu krāsu zīmuļiem.

Lai kāds skaitlis būtu apvilkts ar vismaz divu krāsu zīmuļiem, nepieciešams aplūkot visus skaitļus, kas dalās vismaz ar diviem no dotajiem skaitļiem 3, 5 vai 7.

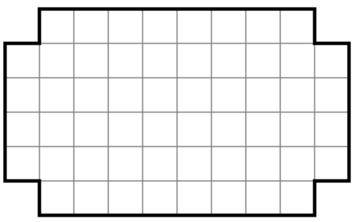
Ja skaitlis dalās ar 3 un 5, tad tas dalās ar 15. Tā kā $2022 = 15 \cdot 134 + 12$, tad ar 15 dalās 134 skaitļi no visiem uzrakstītajiem skaitļiem.

Ja skaitlis dalās ar 3 un 7, tad tas dalās ar 21. Tā kā $2022 = 21 \cdot 96 + 6$, tad ar 21 dalās 96 skaitļi no visiem uzrakstītajiem skaitļiem.

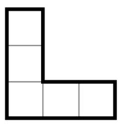
Ja skaitlis dalās ar 5 un 7, tad tas dalās ar 35. Tā kā $2022 = 35 \cdot 57 + 27$, tad ar 35 dalās 57 skaitļi no visiem uzrakstītajiem skaitļiem.

Ievērojam, ka ir vairāki skaitļi, kas vienlaicīgi dalās ar 3, 5 un 7, tātad tie dalās arī ar $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Tā kā $2022 = 105 \cdot 19 + 27$, tad ar 105 dalās 19 skaitļi no visiem uzrakstītajiem skaitļiem. Skaitļi, kas dalās ar 105, tiek ieskaitīti pie skaitļiem, kas dalās ar 15, 21 un 35, tātad tie tiek ieskaitīti trīs reizes. Secinām, ka kopā ir $134 + 96 + 57 - 38 = 249$ skaitļi, kas dalās ar vismaz diviem skaitļiem, tātad tie ir apvilkti ar vismaz divu krāsu zīmuļiem.

6.2. Parādi, kā no 2. att. dotās rūtiņu lapas var izgriezt desmit figūras, kādas dotas 3. att. (iezīmē, kur jāiet griezuma līnijām)! Figūras var būt arī pagrieztas.

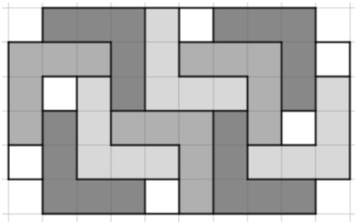


2. att.



3. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 4. att.



4. att.

6.3. Tumšā rudens vakarā Māris izdomāja saskaitīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz n, kur n ir kāds naturāls skaitlis. Vai var gadīties, ka Māris ieguva summu, kuras pēdējais cipars ir **a)** 8, **b)** 9?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, $1+2+3+4+5+6+7=28$.

b) Nē, nevar. Apskatām skaitļu summu S_n dažām n vērtībām:

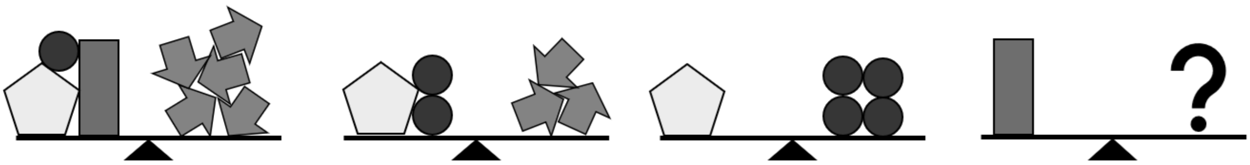
- $S_1 = 1$;
- $S_2 = 1+2 = 3$;
- $S_3 = 1+2+3 = 6$;
- $S_4 = 1+2+3+4 = S_3 + 4 = 6+4 = 10$;
- $S_5 = 1+2+3+4+5 = S_4 + 5 = 10+5 = 15$;
- $S_6 = S_5 + 6 = 15+6 = 21$;
- …

Izveidosim tabulu, kurā rakstīsim skaitļa n pēdējo ciparu un skaitļu summas S_n pēdējo ciparu. Ievērojam, ka summas S_n pēdējo ciparu iegūstam, ja iepriekšējās summas pēdējam ciparam pieskaitām skaitļa n pēdējo ciparu.

Skaitļa n pēdējais cipars	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	**1**
Summas S_n pēdējais cipars	**1**	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0	**1**

Tā kā tabulas pēdējā kolonnā skaitļa n un summas S_n pēdējie cipari ir vienādi, tad tālāk vērtības tabulā sāks periodiski atkārtoties. Cipars 9 nav tabulas otrajā rindā, tāpēc tas nevar būt summas pēdējais cipars.

6.4. Zināms, ka svari (a), (b) un (c) atrodas līdzsvarā. Cik aplīšu jāliek jautājuma zīmes vietā, lai svari (d) atrastos līdzsvarā? Atbildi pamatot!



(a) (b) (c) (d)

Atrisinājums. Jautājuma zīmes vietā jāliek pieci aplīši. Izteiksim visu figūru masu aplīšos. No tā, ka svari (c) atrodas līdzsvarā, secinām, ka piecstūra masa ir vienāda ar četru aplīšu masu.

Tātad varam uzskatīt, ka svariem (b) kreisajā kausā atrodas seši aplīši, kuru masa ir tikpat, cik trīs bultiņu masa. Tātad vienas bultiņas masa ir tikpat, cik divu aplīšu masa.

Tālāk apskatīsim svarus (a). Aizvietojot piecstūri ar četriem aplīšiem un katru bultiņu ar diviem aplīšiem, iegūstam, ka četrstūra un piecu aplīšu masa ir tikpat, cik desmit aplīšu masa. Tātad četrstūra masa ir tikpat, cik piecu aplīšu masa.

6.5. Daži no 273 ciema iedzīvotājiem visu laiku saka patiesību, pārējie visu laiku melo. Katram no ciema iedzīvotājiem ir tieši viena mīļākā nedēļas diena. Aptaujājot iedzīvotājus, viņiem tika lūgts atbildēt uz septiņiem jautājumiem, katrā no tiem izvēloties vienu no dotajām atbildēm:

Vai pirmdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai otrdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai trešdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai ceturtdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai piektdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai sestdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai svētdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē

Uz katru jautājumu saņemto apstiprinošo ("jā") atbilžu skaits bija šāds: pirmdiena – 51, otrdiena – 52, trešdiena – 53, ceturtdiena – 54, piektdiena – 55, sestdiena – 56, svētdiena – 57. Cik ciema iedzīvotāji visu laiku melo?

Atrisinājums. Ciemā ir 21 melis.

Kopā tika saņemtas $51+52+53+54+55+56+57=378$ atbildes "jā". Ievērosim, ka katrs ciema iedzīvotājs, kas saka patiesību, atbildēja "jā" tieši vienu reizi (savai mīļākajai dienai), bet katrs melis – tieši sešas reizes (visām dienām, kas nav viņa mīļākā diena). Tātad, ja mēs vienu iedzīvotāju, kurš saka patiesību, pārvērstu par meli, tad papildus mēs iegūstu piecas "liekas" atbildes jā.

Iesākumā pieņemsim, ka visi ciema iedzīvotāji saka patiesību, tādā gadījumā mums kopā būtu tieši 273 atbildes "jā". Tā kā mums ir 378 atbildes "jā", tad mums "liekas" ir $378-273=105$ atbildes "jā". Tātad par meļiem mums jāpārvērš $105:5=21$ ciema iedzīvotājs.

7. klase

7.1. Uz tāfeles bija uzrakstīts šāds teksts: $A869B$. Katrs no burtiem A un B jāaizstāj ar vienu ciparu (tie var būt arī vienādi) tā, lai iegūtais piecciparu skaitlis dalītos ar 15. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt 6 veidos.

Lai skaitlis $\overline{A869B}$ dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Apskatīsim divus iespējamos gadījumus, kāds cipars var būt ierakstīts B vietā, lai skaitlis dalītos ar 5.

- Ja $B=0$, tad skaitļa ciparu summa ir $A+8+6+9+0=A+23$. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3, tāpēc iespējamās A vērtības ir 1, 4 vai 7.
- Ja $B=5$, tad skaitļa ciparu summa ir $A+8+6+9+5=A+28$. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3, tāpēc iespējamās A vērtības ir 2, 5 vai 8.

Līdz ar to iespējami seši dažādi varianti, kādus ciparus var ierakstīt A un B vietā: $A=1$ un $B=0$; $A=4$ un $B=0$; $A=7$ un $B=0$; $A=2$ un $B=5$; $A=5$ un $B=5$; $A=8$ un $B=5$.

7.2. Vai var atrast **a)** 5; **b)** 15 naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus), kuru summa ir vienāda ar to reizinājumu?

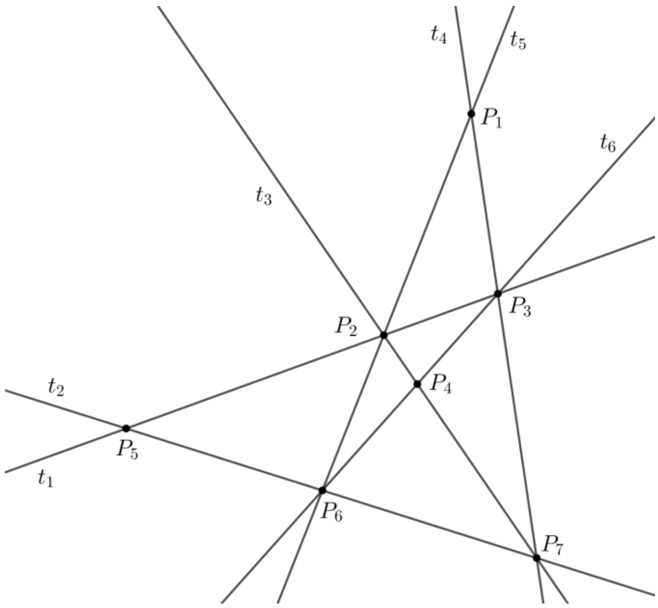
Atrisinājums. **a)** Jā, var, piemēram, der skaitļi 1, 1, 2, 2, 2, jo $1+1+2+2+2=8$ un $1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2=8$.

b) Jā, var, der, piemēram, skaitļi 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 15 (13 vieninieki, 2 un 15), jo $13\cdot1+2+15=30$ un $1\cdot2\cdot15=30$.

Piezīme. a) gadījumā der arī 1, 1, 1, 3, 3 vai 1, 1, 1, 2, 5.

7.3. Parādi, kā plaknē novilkt 6 taisnes un uz tām atzīmēt 7 punktus tā, lai uz katras no taisnēm būtu atzīmēti tieši trīs punkti!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 5. att.



5. att.

7.4. Uz galda ir kaudze ar konfektēm. Karlsons un Brālītis pēc kārtas izdara gājienus, Karlsons sāk spēli. Vienā gājienā spēlētājs var paņemt no kaudzes un apēst vai nu vienu, vai divas konfektes. Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt, ja sākumā kaudzē ir **a)** 6 konfektes; **b)** 2022 konfektes?

Atrisinājums. Abos gadījumos vienmēr var uzvarēt Brālītis. Lai to panāktu, viņš var rīkoties šādi: katrā gājienā, ja Karlsons ēd vienu konfekti, tad Brālītis ēd divas un otrādi, ja Karlsons ēd divas, tad Brālītis – vienu. Šādi spēlējot, pēc katra (abu spēlētāju) gājiena konfekšu skaits kaudzē samazinās tieši par 3. Tā kā sākumā kaudzē konfekšu skaits dalījās ar 3 (gan 6, gan 2022 dalās ar 3), tad arī abos gadījumos pēc kāda Brālīša gājiena tas kļūs vienāds ar 0, tātad Brālītis uzvarēs.

Piezīme. a) gadījumā Brālītis uzvarēs jau pēc otrā gājiena, bet b) gadījumā Brālītis uzvarēs pēc $2022 : 3 = 674$. gājiena.

7.5. Daži no 272 ciema iedzīvotājiem visu laiku saka patiesību, pārējie visu laiku melo. Katram no ciema iedzīvotājiem ir tieši viena mīļākā nedēļas diena. Aptaujājot iedzīvotājus, viņiem tika lūgts atbildēt uz septiņiem jautājumiem, katrā no tiem izvēloties vienu no dotajām atbildēm:

Vai pirmdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai otrdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai trešdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai ceturtdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai piektdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai sestdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai svētdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē

Uz katru jautājumu saņemto apstiprinošo ("jā") atbilžu skaits bija šāds: pirmdiena – 53, otrdiena – 54, trešdiena – 55, ceturtdiena – 56, piektdiena – 57, sestdiena – 58, svētdiena – 59. Cik ciema iedzīvotāji visu laiku melo?

Atrisinājums. Ciemā ir 24 meļi.

Kopā tika saņemtas $53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 = 392$ atbildes "jā". Ievērosim, ka katrs ciema iedzīvotājs, kas saka patiesību, atbildēja "jā" tieši vienu reizi (savai mīļākajai dienai), bet katrs melis – tieši sešas reizes (visām dienām, kas nav viņa mīļākā diena). Tātad, ja mēs vienu iedzīvotāju, kurš saka patiesību, pārvērstu par meli, tad papildus mēs iegūstu piecas "liekas" atbildes jā.

Iesākumā pieņemsim, ka visi ciema iedzīvotāji saka patiesību, tādā gadījumā mums kopā būtu tieši 273 atbildes "jā". Tā kā mums ir 394 atbildes "jā", tad mums "liekas" ir $392 - 272 = 120$ atbildes "jā". Tātad par meļiem mums jāpārvērš $120 : 5 = 24$ ciema iedzīvotāji.

8. klase

8.1. Uz tāfeles bija uzrakstīts šāds teksts: $N597M$. Katrs no burtiem N un M jāaizstāj ar vienu ciparu (tie var būt arī vienādi) tā, lai iegūtais piecciparu skaitlis dalītos ar 12. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt 6 dažādos veidos.

Lai skaitlis $\overline{N597M}$ dalītos ar 12, tam jādalās gan ar 3, gan ar 4. Lai skaitlis dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 4. Apskatīsim divus iespējamos gadījumus, kāds cipars var būt ierakstīts M vietā, lai skaitlis dalītos ar 4.

- Ja $M = 2$, tad skaitļa ciparu summa ir $N + 5 + 9 + 7 + 2 = N + 23$. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3, tāpēc iespējamās N vērtības ir 1, 4 vai 7.
- Ja $M = 6$, tad skaitļa ciparu summa ir $N + 5 + 9 + 7 + 6 = N + 27$. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3, tāpēc iespējamās M vērtības ir 0, 3, 6 vai 9. Tā kā skaitlis nevar sākties ar 0, iespējamās N vērtības ir 3, 6 vai 9.

Līdz ar to iespējami seši dažādi varianti, kādus ciparus var ierakstīt M un N vietā: $N = 1$ un $M = 2$; $N = 4$ un $M = 2$; $N = 7$ un $M = 2$; $N = 3$ un $M = 6$; $N = 6$ un $M = 6$; $N = 9$ un $M = 6$.

8.2. Skolēnam tika uzdots mājas darbs, kurā bija 20 uzdevumi. Par katru pareizi atrisinātu uzdevumu tiek doti 8 punkti, par katru nepareizi atrisinātu uzdevumu tiek atņemti 5 punkti, ja uzdevums nav risināts, tad par to ir 0 punkti. Cik uzdevumus atrisināja skolēns, ja kopā viņš ieguva 13 punktus?

Atrisinājums. Skolēns pareizi atrisināja 6 uzdevumus. Pamatosim, ka tā ir vienīgā derīgā vērtība. Apzīmējam pareizi atrisināto uzdevumu skaitu ar x un nepareizi atrisināto uzdevumu skaitu ar y. Iegūstam vienādojumu

$$8x - 5y = 13.$$

Tā kā $8x$ ir pāra skaitlis, tad $5y$ noteikti ir nepāra skaitlis, jo starpībai jābūt 13. Tātad y ir nepāra skaitlis. No vienādības $8x - 5y = 13$ izsakot x, iegūstam $x = (13 + 5y) : 8$. Ievērojam, ka kopā bija 20 uzdevumi, tātad $x + y \leq 20$ un ir iespējamas tikai 6 dažādas y vērtības, kuras attēlotas tabulā. Ja $y \geq 12$, tad $x > 9$ un $x + y > 20$. Ja aprēķinātā x vērtība ir naturāls skaitlis, tad iegūtās x un y vērtības ir derīgas. Tabulā redzams, ka vienīgās derīgās vērtības ir $x = 6$ un $y = 7$, tātad skolēns pareizi atrisināja 6 uzdevumus, nepareizi atrisināja 7 uzdevumus, bet 7 uzdevumus nerisināja.

$\boldsymbol{y}$	Vai vērtība $\boldsymbol{x = (13 + 5y) : 8}$ ir naturāls skaitlis?
1	Nē
3	Nē
5	Nē
7	Jā, $x = 6$
9	Nē
11	Nē

8.3. Trijstūrī ABC uz malas BC atlikts tāds punkts D, ka $AD = BD$ un $AB = DC = AC$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

Atrisinājums. Tā kā $AD = BD$, tad trijstūris ABD ir vienādsānu trijstūris ar pamatu AB un tā pamata pieleņķi ir vienādi, tātad $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = \alpha$ (skat. 6. att.).

No trijstūra ABD iegūstam, ka $\sphericalangle ADB = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha$.

Ievērojam, ka $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle ADB = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$ kā blakusleņķi. Tā kā $AC = DC$, tad arī trijstūris ACD ir vienādsānu un tā pamata pieleņķi ir vienādi, tātad $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADC = 2\alpha$.

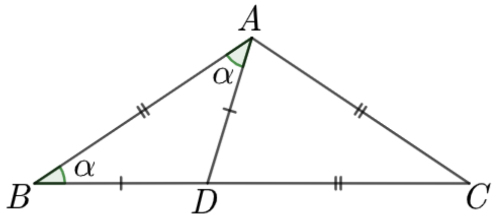
Tā kā $AB = AC$, tad arī trijstūris ABC ir vienādsānu un tā pamata pieleņķi ir vienādi, tātad $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha$. No trijstūra ACD iegūstam, ka

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°.$$

Atrisinot vienādojumu $5\alpha = 180°$, iegūstam, ka $\alpha = 36°$.

Aprēķinām trijstūra ABC leņķu vērtības:

- $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha = 36°$;
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \alpha + 2\alpha = 108°$.



6. att.

8.4. Vai pa apli var uzrakstīt skaitļus

a) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;

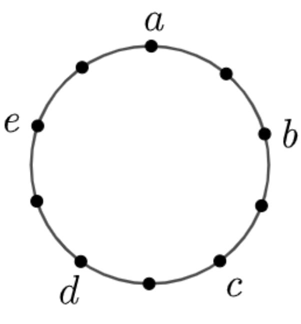
b) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;

tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5?

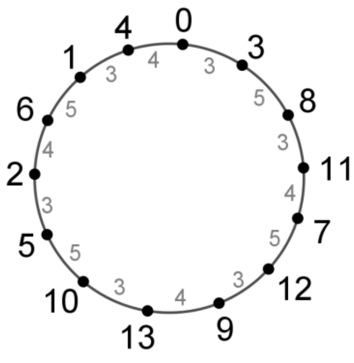
Atrisinājums. a) Pamatosim, ka prasītais nav iespējams.

Ievērosim, ka skaitļi 0; 1; 2; 8 un 9 nevar būt uzrakstīti blakus viens otram, jo katru divu skaitļu starpība nav 3; 4 vai 5. Tātad tos jāraksta, izlaižot vienu pozīciju (skat. 7. att., kur ar burtiem apzīmētas vietas, kurās jāieraksta šie skaitļi). Skaitli 7 var rakstīt blakus tikai skaitlim 2, jo to starpība ir 5, bet to nevar rakstīt blakus pārējiem pa apli uzrakstītajiem skaitļiem 0; 1; 8 vai 9, tātad dotos skaitļus nevar uzrakstīt tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5.

b) Jā, var, piemēram, skat. 8. att., kur riņķa iekšpusē ierakstīts, par cik atšķiras skaitļi.



7. att.



8. att.

8.5. Piecu draugu lokā izvērsās strīds, kurā:

- Elīna saka: "Es vienmēr saku taisnību."
- Guna saka: "Gan Elīna, gan Agnese melo."
- Maruta saka: "Visi saka taisnību."
- Agnese saka: "Elīna melo."
- Emīls saka: "Visi melo."

Cik draugu saka taisnību?

Atrisinājums. Pamatosim, ka tikai viens no draugiem saka taisnību. Ievērojam:

- ja Elīna saka taisnību, tad Agnese melo, tātad viņas abas nevar runāt taisnību;
- ja Agnese melo, tad Elīna saka taisnību, tātad viņas abas nevar melot.

Tātad vai nu Elīna, vai Agnese runā taisnību un otra melo. No tā izriet, ka gan Guna, gan Maruta, gan Emīls melo. Tātad tikai viens no draugiem saka taisnību.

9. klase

9.1. Cik ir tādu četrciparu skaitļu $\overline{ABBA}$, kas dalās ar 99? (Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, dažādiem burtiem var atbilst arī vienādi cipari.)

Atrisinājums. Pamatosim, ka ir 10 skaitļi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem: 1881, 2772, 3663, 4554, 5445, 6336, 7227, 8118, 9009, 9999.

Lai skaitlis dalītos ar 99, tam jādalās gan ar 11, gan ar 9. Ievērojam, ka dotais skaitlis dalās ar 11, jo tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība ir $(A+B)-(B+A)=0$, kas dalās ar 11.

Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Tātad $A+B+B+A=2(A+B)$ jādalās ar 9. Tā kā A un B ir cipari, tad iespējami divi gadījumi: $A+B=9$ vai $A+B=18$.

Ja $A+B=9$, tad iespējami deviņi gadījumi:

$$A+B=1+8=2+7=3+6=4+5=5+4=6+3=7+2=8+1=9+0.$$

Ja $A+B=18$, tad iespējams tikai viens gadījums $A+B=9+9$.

9.2. Vai noteikti $x+\frac{9}{x}>y+\frac{9}{y}$, ja **a)** $x>y>0$; **b)** $x>y>3$?

Atrisinājums. a) Nē, piemēram, ja $x=1$ un $y=0{,}1$, tad $x+\frac{9}{x}=10$ un $y+\frac{9}{y}=90{,}1$, bet $10<90{,}1$.

b) Pamatosim, ka, ja $x>y>3$, tad dotā nevienādība ir patiesa.

Nevienādības $x+\frac{9}{x}>y+\frac{9}{y}$ abas puses reizinot ar pozitīvu izteiksmi xy, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$x^2y+9y>xy^2+9x.$$

Lai pierādītu, ka dotā nevienādība ir patiesa, pietiek pamatot, ka $x^2y+9y-xy^2-9x>0$.

Ievērojam, ka $x-y>0$ un $xy-9>0$, jo pēc dotā $x>y>3$.

Apskatām divu pozitīvu izteiksmju reizinājumu un to ekvivalenti pārveidojam:

$$0<(xy-9)(x-y)=x^2y-xy^2-9x+9y.$$

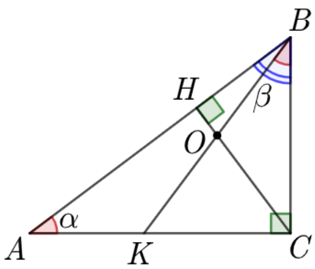
Līdz ar to esam ieguvuši vajadzīgo.

9.3. Taisnleņķa trijstūrī ACB ($\sphericalangle C=90°$) novilkts augstums CH. Uz malas AC atlikts punkts K tā, ka $\sphericalangle CBK=\sphericalangle BAC$. Pierādīt, ka taisne CH dala nogriezni BK divās vienādās daļās!

Atrisinājums. Apzīmējam CH un KB krustpunktu ar O un $\sphericalangle CBK=\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$ (skat. 9. att.). No trijstūra ABC iegūstam, ka $\sphericalangle BAC=180°-\sphericalangle ACB-\sphericalangle ABC$ jeb $\alpha=90°-\beta$. No trijstūra BHC iegūstam, ka $\sphericalangle HCB=180°-\sphericalangle CHB-\sphericalangle HBC=90°-\beta=\alpha$, tātad trijstūris COB ir vienādsānu trijstūris, jo divi tā leņķi ir vienādi $\sphericalangle OBC=\sphericalangle OCB=\alpha$. No tā izriet, ka $BO=OC$ kā vienādsānu trijstūra sānu malas.

No trijstūra KCB iegūstam, ka $\sphericalangle BKC = 180° - \sphericalangle KCB - \sphericalangle KBC = 90° - \alpha = \beta$. Ievērojam, ka $\sphericalangle ACH = \sphericalangle ACB - \sphericalangle HCB = 90° - \alpha = \beta$. Tātad trijstūris KOC ir vienādsānu, jo divi tā leņķi ir vienādi $\sphericalangle OKC = \sphericalangle KCO = \beta$, un tā sānu malas ir vienādas $CO = OK$.

No vienādībām $BO = OC$ un $CO = OK$ iegūstam, ka $BO = OK$, tātad CH dala nogriezni BK divās vienādās daļās.



9. att.

9.4. Vai pa apli var uzrakstīt skaitļus

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;

b) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14;

tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka prasītais nav iespējams.

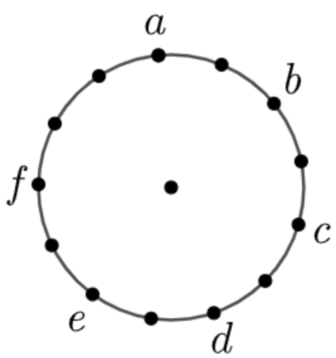
Ievērosim, ka skaitļi 1; 2; 3; 11; 12 un 13 nevar būt uzrakstīti blakus viens otram, jo katru divu skaitļu starpība nav 3; 4 vai 5. Tātad tos jāraksta, izlaižot vienu pozīciju, tādējādi rodas tikai divas blakus vietas, kurās nav ierakstīti skaitļi (skat. 10. att.).

Skaitli 4 var rakstīt blakus tikai skaitlim 1, jo to starpība ir 3, bet to nevar rakstīt blakus pārējiem jau uzrakstītajiem skaitļiem 2; 3; 11; 12 vai 13. Tātad skaitli 4 jāraksta vienā no divām blakus esošajām brīvajām vietām.

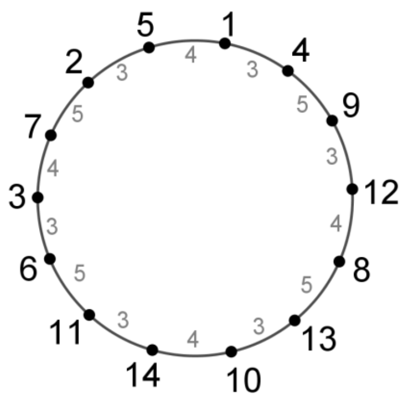
Skaitli 10 var rakstīt blakus tikai skaitlim 13, bet to nevar rakstīt blakus pārējiem pa apli uzrakstītajiem skaitļiem 1; 2; 3; 11 vai 12. Tātad skaitli 10 jāraksta vienā no divām blakus esošajām brīvajām vietām.

No tā izriet, ka skaitļus 4 un 10 jāraksta blakus, bet rodas pretruna ar uzdevuma nosacījumiem, jo to starpība ir 6. Tātad dotos skaitļus nevar uzrakstīt tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5.

b) Jā, var, piemēram, skat. 11. att., kur riņķa iekšpusē ierakstīts, par cik atšķiras skaitļi.



10. att.



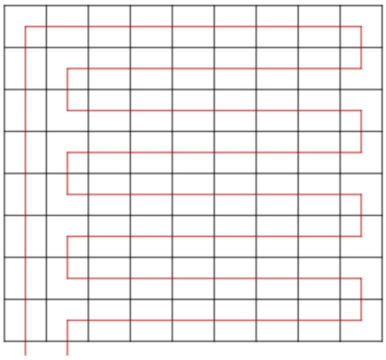
11. att.

9.5. Mākslas muzeja plānojums ir taisnstūris ar izmēriem **a)** 8×9; **b)** 9×11 rūtiņas, kur viena rūtiņa atbilst vienai muzeja telpai. Muzeja vadītājs vēlas izveidot apmeklētāju maršrutu, kuram izpildās šādas īpašības:

- maršruts sākas kādā no rūtiņām (telpām), kas atrodas pie taisnstūra malas;
- apmeklētājs no vienas rūtiņas (telpas) var pāriet uz citu rūtiņu (telpu), ja tām ir kopīga mala;
- apmeklētājs maršruta laikā apmeklē katru rūtiņu (telpu) tieši vienu reizi;
- maršruts beidzas rūtiņā (telpā), kas atrodas pie taisnstūra malas blakus maršruta sākuma rūtiņai (telpai).

Vai muzeja vadītājs var izveidot šādu maršrutu?

Atrisinājums. a) Jā, var, skat., piemēram, 12. att.



12. att.

b) Pierādīsim, ka prasīto maršrutu nav iespējams izveidot. Iekrāsosim taisnstūra rūtiņas šaha galdiņa veidā un ievērosim, ka šādam krāsojumam izpildās īpašība: blakus esošām rūtiņām ir dažādas krāsas.
Pieņemsim pretējo, ka prasītais maršruts eksistē. Tā kā maršruts iziet cauri visām rūtiņām, kuru ir nepāra skaits, tad pāreja no vienas krāsas rūtiņas uz otras krāsas rūtiņu notiek pāra skaitu reižu. Līdz ar to maršruts beigsies tādas pašas krāsas rūtiņā kā maršruta sākuma rūtiņa. Taču tā nevar būt, jo šī rūtiņas atrodas blakus rūtiņai, kurā maršruts sākās. Līdz ar to iegūta pretruna, tāpēc šāds maršruts neeksistē.

10. klase

10.1. Kāds ir skaitļa 2022^{2022} pēdējais cipars?

1. atrisinājums. Skaitļa pēdējo ciparu noskaidrosim, apskatot doto skaitli pēc moduļa 10. Ievērosim, ka $2022^{2022} \equiv 2^{2022} \pmod{10}$. Tātad mums jānoskaidro skaitļa 2^{2022} pēdējais cipars.

Virkne 2^n, $n = 1, 2, \ldots$, ir periodiska pēc moduļa 10, apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

- ja $n = 1$, tad $2^1 \equiv \mathbf{2} \pmod{10}$;
- ja $n = 2$, tad $2^2 \equiv 4 \pmod{10}$;
- ja $n = 3$, tad $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$;
- ja $n = 4$, tad $2^4 \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$;
- ja $n = 5$, tad $2^5 \equiv 32 \equiv \mathbf{2} \pmod{10}$.

Šo informāciju ērti apkopot tabulā:

n	1	2	3	4	5	…
$2^n \pmod{10}$	**2**	4	8	6	**2**	…

Redzam, ka virkne $2^n \pmod{10}$ ir periodiska ar perioda garumu 4. Tā kā $2022 = 4 \cdot 505 + 2$, tad virknes 2022. locekļa pēdējais cipars būs tāds pats kā virknes 2. locekļa pēdējais cipars, tātad pēdējais cipars būs 4. Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitļa 2022^{2022} pēdējais cipars ir 4.

2. atrisinājums. Skaitļa pēdējo ciparu noskaidrosim, apskatot doto skaitli pēc moduļa 10. Ievērojot, ka $2^4 \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$ un $6^n \equiv 6 \pmod{10}$, iegūstam

$$2022^{2022} \equiv 2^{2022} \equiv 2^{2020} \cdot 2^2 \equiv (2^4)^{505} \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitļa 2022^{2022} pēdējais cipars ir 4.

10.2. Apskatām n pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka tos var sadalīt divās grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir pirmskaitlis, ja **a)** $n = 8$, **b)** $n = 10$? Katrā grupā jābūt vismaz 2 skaitļiem.

Atrisinājums. a) Jā, piemēram, skaitļus no 1 līdz 8 var sadalīt šādās divās grupās:

$$1 + 2 + 4 = 7 \text{ un } 3 + 5 + 6 + 7 + 8 = 29.$$

b) Nē, tas nav iespējams. Starp 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir tieši 5 pāra un tieši 5 nepāra skaitļi, tātad visu 10 skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Tāpēc viena no apskatāmo grupu summām ir nepāra skaitlis, bet otra – pāra skaitlis. Tā kā abas summas ir lielākas nekā 2, tad tā summa, kas ir pāra skaitlis, nav pirmskaitlis.

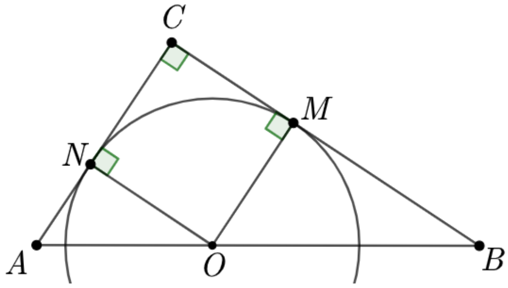
10.3. Uz taisnleņķa trijstūra ACB hipotenūzas AB atlikts punkts O, kas ir centrs riņķa līnijai ar rādiusu 3, kura pieskaras abām katetēm. Aprēķināt trijstūra ACB laukumu, ja $OB = 5$.

Atrisinājums. Punktus, kur riņķa līnijas rādiuss pieskaras katetēm, apzīmēsim ar M un N (skat. 13. att.). Tā kā rādiuss ir perpendikulārs pieskarei, tad trijstūris OMB ir taisnleņķa trijstūris. Pēc Pitagora teorēmas $MB = \sqrt{OB^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm.

Tā kā rādiusi ir perpendikulāri pieskarēm un trijstūris ACB ir taisnleņķa, tad četrstūra $ONCM$ trīs leņķi ir taisni $\sphericalangle NCM = \sphericalangle CNO = \sphericalangle CMO = 90°$. Četrstūra $ONCM$ divas blakusmalas ir vienādas $ON = OM$ kā rādiusi, tāpēc četrstūris $ONCM$ ir kvadrāts un $MC = OM = 3$ cm, $CB = BM + MC = 7$ cm.

Ievērojam, ka $\Delta OMB \sim \Delta ACB$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle B$ ir kopīgs un $\sphericalangle OMB = \sphericalangle ACB = 90°$.

Tad $\frac{AC}{OM} = \frac{CB}{MB}$, no kā iegūstam, ka $AC = \frac{OM \cdot CB}{MB} = \frac{3 \cdot 7}{4} = 5{,}25$ cm. Līdz ar to $S_{ACB} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 18\frac{3}{8}$ cm^2.



13. att.

10.4. Doti reāli skaitļi a, b un c, kuriem $abc = 1$. Pierādīt, ka vienādojumam

$$ax^4 + (2b + a)x^2 - 2cx + b^3c + bc + bc^3 = 0$$

nav reālu sakņu!

Atrisinājums. Abas vienādojuma puses reizinām ar a un veicam ekvivalentus pārveidojumus (izmantojot, ka $abc = 1$):

$$a^2x^4 + (2ab + a^2)x^2 - 2acx + ab^3c + abc + abc^3 = 0;$$
$$a^2x^4 + 2abx^2 + a^2b^2 - 2acx + b^2 + 1 + c^2 = 0;$$
$$(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) + (a^2x^2 - 2acx + c^2) + 1 = 0;$$
$$(ax^2 + b)^2 + (ax - c)^2 + 1 = 0.$$

Tā kā vienādojuma kreisās puses vērtība ir vismaz 1, jo kvadrātu vērtība ir nenegatīva, tad dotajam vienādojumam nav reālu sakņu.

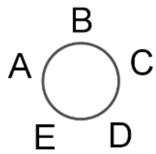
10.5. Restorānā ieradās pieci deputāti un pirms pusdienām daži no viņiem paspieda viens otram roku. Zināms, ka, ja kādi divi deputāti nepaspieda viens otram roku, tad abi kopā viņi izdarīja vismaz piecus rokasspiedienus. Pierādīt, ka deputātus var sasēdināt ap apaļu galdu tā, lai katrs būtu paspiedis roku abiem saviem blakussēdētājiem!

1. atrisinājums. Pirmkārt pamatosim, ka no jebkuriem trīs deputātiem vismaz kādi divi ir paspieduši viens otram roku. Pieņemsim pretējo, ka kādi trīs deputāti nav savā starpā izdarījuši nevienu rokasspiedienu. Paņemsim jebkurus divus no tiem, tad tie kopā ir izdarījuši lielākais četrus rokasspiedienus (katrs ar diviem atlikušajiem deputātiem) – pretruna. (1)

Otrkārt pamatosim, ka katrs deputāts ir izdarījis vismaz divus rokasspiedienus. Pieņemsim pretējo, ka kāds deputāts ir izdarījis tikai vienu (vai nevienu) rokasspiedienu. Apzīmēsim šo deputātu ar X un vienu no deputātiem, kam viņš nepaspieda roku, apzīmēsim ar Y. Deputāts X ir paspiedis roku ne vairāk kā vienu reizi, bet deputāts Y – ne vairāk kā trīs reizes (jo viņš nepaspieda roku deputātam X), tātad abi kopā viņi ir paspieduši roku ne vairāk kā 4 reizes – pretruna. (2)

Treškārt ievērosim, ka, ja kādi divi deputāti nepaspieda viens otram roku, tad vismaz viens no viņiem paspieda roku visiem trim pārējiem (ja abiem būtu kāds "izlaists" rokasspiediens, tad abiem kopā būtu lielākais $2+2=4$ rokasspiedieni). (3)

Pieņemsim, ka kādi divi deputāti nepaspieda viens otram roku (ja visi paspieda, tad tos var sēdināt patvaļīgi) un nosēdināsim tos vietās A un C (skat. 14. att.), vietā C sēdināsim to, kurš paspieda roku visiem pārējiem (no (3) tāds noteikti ir). Turpmāk šos divus deputātus sauksim par A un C.



14. att.

Iespējami divi gadījumi:

- ja arī A ir paspiedis roku visiem trim pārējiem, tad atlikušos nosēdināsim vietās B, D un E tā, lai vietās D un E sēdētu kādi, kas ir paspieduši viens otram roku (no (1) tādi noteikti ir). Ar to prasītais būtu panākts.
- ja A nav paspiedis roku vēl kādam deputātam, tad nosēdināsim to vietā E (un turpmāk sauksim par deputātu E). Deputāts A noteikti ir paspiedis roku abiem atlikušajiem deputātiem (citādi viņš būtu izdarījis tikai vienu rokasspiedienu). Deputāts E noteikti ir paspiedis roku vismaz vienam no atlikušajiem diviem deputātiem (citādi E būtu izdarījis tikai vienu rokasspiedienu), šo deputātu nosēdināsim vietā D. Redzams, ka ar šo prasītais ir panākts.

2. atrisinājums. Uzskatīsim, ka, ja kādi deputāti nepaspieda viens otram roku, tad viņi savstarpēji viens otru ienīst. No dotā izriet, ka, ja kādi divi deputāti viens otru ienīst, tad abi kopā viņi ienīst vēl lielākais vienu citu deputātu. No šī viegli redzēt, ka deputāts var ienīst lielākais divus citus deputātus. Mūsu uzdevums ir sasēdināt tos ap galdu tā, lai blakus nesēdētu divi, kas ienīst viens otru.

Pieņemsim, ka ir kāds deputāts, kas ienīst divus citus deputātus. Nosēdināsim šo deputātu vietā A (skat. 14. att.) un tos, ko viņš ienīst – vietās C un D (tālāk sauksim šos deputātus attiecīgi par A, C un D). Ievērosim, ka visi trīs šie deputāti neienīst nevienu no abiem pārējiem. Patiešām, tā kā A un C ienīst viens otru un A ienīst vēl arī D, tad tie (A un C) nevar ienīst vairs nevienu citu. Tādu pašu spriedumu var izveikt arī par A un D. Tātad abus atlikušos deputātus nosēdinot vietās B un E prasītais ir panākts.

Atliek aplūkot gadījumu, kad katrs deputāts ienīst lielākais vienu citu deputātu. Tad mums ir lielākais divi pāri deputātu, kas viens otru ienīst, nosēdinot tos ne blakus (piemēram, vietās A-C un B-D) prasītais būs panākts.

11. klase

11.1. Vai skaitli 2022 var izteikt kā divu veselu skaitļu kubu summu?

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9:

- ja $n \equiv 0 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-4)^3 \equiv -4^3 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-3)^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 7 \equiv -2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 9$.

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar 0 vai ± 1 pēc moduļa 9. Aplūkosim, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 9.

$b^3 \pmod 9$ \ $a^3 \pmod 9$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitļu summa pēc moduļa 9 var pieņemt jebkuru no vērtībām $-2, -1, 0, 1, 2$, taču nekādas citas. Tā kā $2022 \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$ neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar būt 2022.

11.2. Kādām reālām p vērtībām vienādojuma $x^2 + x + p = 0$ sakņu kvadrātu summa ir 16?

Atrisinājums. Apzīmēsim kvadrātvienādojuma saknes ar x_1 un x_2. Pēc Vjeta teorēmas zinām, ka $x_1 x_2 = p$ un $x_1 + x_2 = -1$. Izmantojot summas kvadrāta formulu, varam aprēķināt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - 2p = 16.$$

Esam ieguvuši, ka $2p = -15$ jeb $p = -7{,}5$.

11.3. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D tā, ka $AD = 8$ un $BD = 1$. Aprēķināt malas BC garumu, ja trijstūra leņķa B lielums ir $120°$.

Atrisinājums. Apzīmējam riņķa līnijas pieskaršanās punktu malai BC ar E un malai AC ar F skat. **Kļūda! Nav atrasts atsauces avots.**). Tā kā trijstūrī ABC ir ievilkta riņķa līnija, tad pieskaru nogriežņi ir vienādi: $BD = BE = 1$,
$AD = AF = 8$ un $CE = CF = x$. Tātad $AB = 9$, $BC = 1 + x$, $AC = 8 + x$. Izmantojot kosinusu teorēmu, iegūstam

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle B$

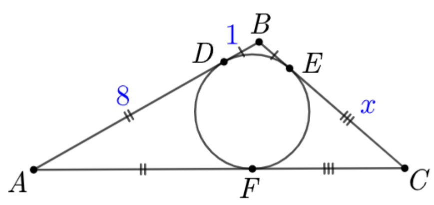
$(8 + x)^2 = 9^2 + (1 + x)^2 - 2 \cdot 9 \cdot (1 + x) \cdot \cos 120°$

$64 + 16x + x^2 = 81 + 1 + 2x + x^2 - 2 \cdot 9(1 + x) \cdot (-0{,}5)$

$5x = 27$

$x = 5{,}4$

Tātad $BC = 1 + x = 6{,}4$.



15. att.

11.4. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas ir lielāks nekā 3, var vienā vienīgā veidā izteikt kā trīs naturālu skaitļu x, y, z ($x \le y \le z$) summu tā, lai skaitļiem x, y, z izpildītos nevienādība

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \le 1.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2 =$$
$$= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \le 2.$$

Tātad $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \le 2$.

No iegūtās nevienādības izriet, ka vienīgie iespējamie skaitļu trijnieki $(x; y; z)$, kas apmierina to, ir $(k; k; k)$, $(k; k; k+1)$ un $(k; k+1; k+1)$. Tas nozīmē, ka ar pirmo trijnieku var izteikt visus skaitļus, kuri ir kongruenti ar skaitli 0 pēc moduļa 3; ar otro trijnieku var izteikt visus skaitļus, kuri ir kongruenti ar skaitli 1 pēc moduļa 3 un ar trešo trijnieku var izteikt visus skaitļus, kuri ir kongruenti ar skaitli 2 pēc moduļa 3. Var redzēt, ka iegūtais sadalījums katru reizi ir unikāls.

11.5. Mākslas muzeja plānojums ir taisnstūris ar izmēriem $m \times n$ ($m \ge 2$, $n \ge 2$) rūtiņas, kur viena rūtiņa atbilst vienai muzeja telpai. Muzeja vadītājs vēlas izveidot apmeklētāju maršrutu, kuram izpildās šādas īpašības:

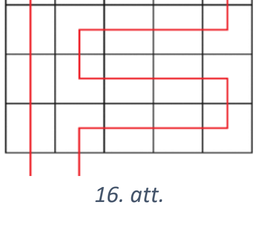
- maršruts sākas kādā no rūtiņām (telpām), kas atrodas pie taisnstūra malas;
- apmeklētājs no vienas rūtiņas (telpas) var pāriet uz citu rūtiņu (telpu), ja tām ir kopīga mala;
- apmeklētājs maršruta laikā apmeklē katru rūtiņu (telpu) tieši vienu reizi;
- maršruts beidzas rūtiņā (telpā), kas atrodas pie taisnstūra malas blakus maršruta sākuma rūtiņai (telpai).

Kādām m un n vērtībām muzeja vadītājs var izveidot šādu maršrutu?

Atrisinājums. Muzeja vadītājs var izveidot aprakstīto maršrutu visām m; $n \ge 2$ vērtībām, kurām vismaz viens no m vai n dalās ar 2. Aplūkojam trīs gadījumus.

1. Ja $m = 2$ un $n \ge 2$, pagriezīsim taisnstūri tā, lai $m = 2$ būtu rindu skaits. Tātad maršruta pirmā daļa ved no apakšējā kreisā stūra uz apakšējo labo stūri (visa apakšējā rinda), tālāk uz augšējo labo stūri un pēc tam augšējo kreiso stūri (visa augšējā rinda). Redzams, ka maršruts apmierina uzdevuma nosacījumus.
2. Ja $m > 2$ dalās ar 2 un $n > 2$, pagriezīsim taisnstūri tā, lai $m = 2k$ ($k \ge 2$) būtu rindu skaits. Lai konstruētu maršrutu, kas apmierina uzdevumu nosacījumus, ieviešam rūtiņu koordinātu sistēmu $(m; n)$, kur m – rindas numurs, n – kolonnas numurs un $(1; 1)$ ir apakšējais kreisais stūris.
   Aplūkojam maršrutu, kas secīgi vienas rindas vai vienas kolonnas ietvaros savieno šādas rūtiņas:
   - $(i;\ 2)$ ar $(i; n)$;
   - $(i;\ n)$ ar $(i+1; n)$;
   - $(i+1; n)$ ar $(i+1;\ 2)$;
   - $(i+1;\ 2)$ ar $(i+2;\ 2)$,

   kur i secīgi vienāds ar $\{1; 3; 5; \dots; m-1 = 2k-1\}$.
   Konstruētais maršruts noslēgsies rūtiņā $(m;\ 2)$. Tālāk vedam maršrutu uz $(m;\ 1)$ un attiecīgi $(1;\ 1)$ pa pirmo kolonnu. Redzams, ka maršruts apmierina uzdevuma nosacījumu. Maršruta piemērs redzams 16. att. ar vērtībām $m = 4$ un $n = 5$.



16. att.

3. Ja gan m, gan n nedalās ar 2 ($m; n \neq 1$), pierādīsim, ka prasīto maršrutu nav iespējams izveidto. Iekrāsosim taisnstūra rūtiņas šaha galdiņa veidā un ievērosim, ka šādam krāsojumam izpildās īpašība: blakus esošām rūtiņām ir dažādas krāsas.
   Pieņemsim pretējo, ka prasītais maršruts eksistē. Tā kā maršruts iziet cauri visām rūtiņām, kuru ir nepāra skaits, tad pārejas no vienas rūtiņas uz otru notiek pāra skaitu reižu. Līdz ar to maršruts beigsies tādas pašas krāsas rūtiņā kā sākuma rūtiņa. Taču tā nevar būt, ja šī rūtiņas atrodas blakus, jo tām būtu jābūt dažādās krāsās. Līdz ar to iegūta pretruna un šāds maršruts neeksistē.

Tā kā mainīgos m un n uzdevumā kontekstā var mainīt vietām, tad ir aplūkoti visi iespējamie gadījumi.

12. klase

12.1. Vai skaitli 2023^2 var izteikt kā trīs veselu skaitļu kubu summu?

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9:

- ja $n \equiv 0 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-4)^3 \equiv -4^3 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-3)^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 7 \equiv -2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 9$.

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar 0 vai ± 1 pēc moduļa 9. Aplūkosim, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 9.

$a^3 \pmod 9$ / $b^3 \pmod 9$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

Tagad aplūkojam, ar ko var būt kongruenta trīs veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 9.

$a^3 + b^3 \pmod 9$ / $c^3 \pmod 9$	-1	0	1	-2	2
-1	-2	-1	0	-3	1
0	-1	0	1	-2	2
1	0	1	2	-1	3

Esam ieguvuši, ka trīs šādu skaitļu summa pēc moduļa 9 var pieņemt jebkuru no vērtībām $-3; -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2; 3$ un nekādas citas. Tā kā $2023^2 \equiv 7^2 \equiv 4 \equiv -5 \pmod 9$ neparādās starp šīm vērtībām, tad trīs veselu skaitļu kubu summa nevar būt 2023^2.

12.2. Kādām reālām p vērtībām vienādojuma $x^2+x+p=0$ sakņu kubu summa ir (-16)?

Atrisinājums. Apzīmēsim kvadrātvienādojuma saknes ar x_1 un x_2. Pēc Vjeta teorēmas zināms, ka $x_1x_2=p$ un $x_1+x_2=-1$. Izmantojot summas kvadrāta formulu, varam aprēķināt, ka

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1-2p.$$

Sakņu kubu summu var izteikt kā

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=\ -1(1-2p-p)=3p-1=-16.$$

Tātad $3p=-15$ un $p=-5$.

12.3. Trijstūrī ABC no virsotnes A vilktā augstuma garums ir 1, no virsotnes C vilktās mediānas garums arī ir 1, bet augstuma no virsotnes B garums ir $\sqrt{3}$. Kāds var būt šī trijstūra laukums?

Atrisinājums. Apzīmēsim AB viduspunktu ar M un novilksim perpendikulus MP un MT attiecīgi pret malām AC un BC. Augstuma pamatus, kas vilkti no virsotnēm A un B, apzīmēsim attiecīgi ar Q un N. Tā kā $MT||AQ$, jo $MT\perp BC$ un $AQ\perp BC$, tad MT ir trijstūra AQB viduslīnija, tātad $MT=\frac{1}{2}AQ=\frac{1}{2}$. Līdzīgi iegūstam, ka $MP=\frac{1}{2}BN=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ievērojam, ka taisnleņķa trijstūrī MTC izpildās, ka $\sin\sphericalangle MCT=\frac{MT}{MC}=\frac{1}{2}$, tātad $\sphericalangle MCT=30°$. Līdzīgi iegūstam, ka taisnleņķa trijstūrī MPC izpildās, ka $\sin\sphericalangle MCP=\frac{MP}{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tātad $\sphericalangle MCP=60°$.

Aplūkojam iespējamās $\sphericalangle MCB$ vērtības:

- ja T atrodas uz BC, tad $\sphericalangle MCB=30°$;
- ja T atrodas uz BC pagarinājuma, tad $\sphericalangle MCB=150°$.

Tā kā $\sphericalangle ACB=\sphericalangle MCA+\sphericalangle MCB$, gadījums, ka $\sphericalangle MCB=150°$, nav iespējams, jo tad pie jebkuras $\sphericalangle MCB$ vērtības $\sphericalangle ACB$ būs vienāds vai lielāks nekā 180°. No tā izriet, ka $\sphericalangle MCB\ =\ 30°$.

Līdzīgi aplūkojam iespējamās $\sphericalangle MCA$ un $\sphericalangle ACB$ vērtības:

- ja P atrodas AC, tad $\sphericalangle MCA=60°$ un $\sphericalangle ACB\ =\ 90°$,
- ja P atrodas uz AC pagarinājuma, tad $\sphericalangle MCA=120°$ un $\sphericalangle ACB\ =\ 150°$.

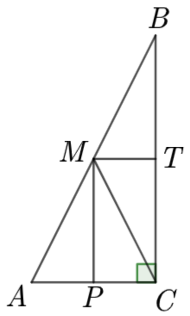
Ja $\sphericalangle ACB\ =\ 90°$ (skat. 17. att.), tad augstumi no virsotnēm A un B sakrīt ar katetēm AC un BC, tātad

$$S_{ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

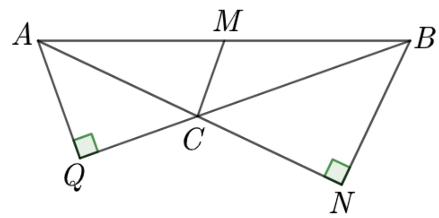
Ja $\sphericalangle ACB\ =\ 150°$ (skat. 18. att.), aplūkojam taisnleņķa trijstūri AQC, kurā $\sphericalangle ACQ=30°$, tātad $\frac{AQ}{AC}=\sin\sphericalangle ACQ=\frac{1}{2}$. No tā izriet, ka $AC=2\cdot AQ=2$ un

$$S_{ABC}=\frac{AC\cdot\ BN}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Tātad trijstūra laukums var būt $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vai $\sqrt{3}$.



17. att.



18. att.

12.4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $3\sin x + 4\cos x = 6$.

1. atrisinājums. Izdalām abas vienādojuma puses ar 5:

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{6}{5}.$$

Izvēlēsimies tādu šauru leņķi α, ka $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Tādā gadījumā $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ un vienādojumu varam pārrakstīt kā

$$\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{6}{5};$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{6}{5}.$$

Tā kā sinusa vērtības nepārsniedz 1, tad šim vienādojumam atrisinājumu nav. Tātad arī dotajam vienādojumam atrisinājuma nav.

2. atrisinājums. Izmantojot divkāršā leņķa formulas un $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$, iegūstam, ka

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 6\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 6\cos^2\frac{x}{2} + 6\sin^2\frac{x}{2}$$

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 10\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

Abas vienādojuma puses dalot ar $2\sin^2\frac{x}{2} \neq 0$, iegūstam, ka

$$\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2} - 3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + 5 = 0.$$

Apzīmējot $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = t$, iegūstam kvadrātvienādojumu $t^2 - 3t + 5 = 0$, kura diskriminants $D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -11 < 0$, tātad kvadrātvienādojumam nav sakņu, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

3. atrisinājums. No abām vienādojuma pusēm atņemot $4\cos x$, iegūstam, ka $3\sin x = 6 - 4\cos x$. Kāpinot abas vienādojuma puses kvadrātā, iegūstam, ka

$$9\sin^2 x = 36 - 48\cos x + 16\cos^2 x.$$

Izmantojot $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, iegūstam, ka

$$9(1-\cos^2 x) = 36 - 48\cos x + 16\cos^2 x\,;$$

$$9 - 9\cos^2 x = 36 - 48\cos x + 16\cos^2 x\,;$$

$$25\cos^2 x - 48\cos x + 27 = 0.$$

Apzīmējot $\cos x = t$, iegūstam kvadrātvienādojumu $25t^2 - 48t + 27 = 0$, kura diskriminants $D = (-48)^2 - 4\cdot 25\cdot 27 = 48\cdot 48 - 50\cdot 54 < 0$, tātad kvadrātvienādojumam nav sakņu, līdz ar to arī dotajam vienādojumam nav sakņu.

4. atrisinājums. Pierādīsim, ka izpildās nevienādība $a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Kāpināsim abas vienādojuma puses kvadrātā un izmantosim, ka $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Iegūstam, ka

$$(a\sin x + b\cos x)^2 \leq (a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$a^2\sin^2 x + 2ab\sin x\cos x + b\cos^2 x \leq a^2\sin^2 x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\,;$$

$$0 \leq a^2\cos^2 x - 2ab\sin x\cos x + b^2\sin^2 x\,;$$

$$(a\cos x - b\sin x)^2 \geq 0.$$

Tā kā nevienādība ir patiesa jebkurai a, b un x vērtībai, tad sākotnējā nevienādība $a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$ ir patiesa. No tā izriet, ka $3\sin x + 4\cos x \leq \sqrt{3^2+4^2} = 5$, tātad dotajam vienādojumam nav sakņu.

12.5. Dota rūtiņu tabula $n \times n$. Ilmārs un Kims spēlē šādu spēli. Viņi pēc kārtas kādā vēl tukšā rūtiņā ieraksta skaitli 1 vai -1. Spēli sāk Ilmārs. Ja pēc kāda spēlētāja gājiena tiek aizpildīta kāda rinda vai kolonna, tad tiek aprēķināts tajā esošo skaitļu reizinājums. Ja tas ir vienāds ar -1, tad spēlētājs, kurš veica pēdējo gājienu, iegūst 1 punktu (ja spēlētājs ar savu gājienu vienlaicīgi pabeidz gan rindu, gan kolonnu un katrā skaitļu reizinājums ir -1, tad viņš iegūst divus punktus). Spēle beidzas, kad tabula ir pilnībā aizpildīta. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst visvairāk punktu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija, ja **a)** $n = 2021$; **b)** $n = 2022$?

Atrisinājums. a) Ja $n = 2021$, uzvar Ilmārs. Pirmajā gājienā viņš centrālajā rūtiņā ieraksta skaitli -1, bet tālākajos gājienos spēlē simetriski attiecībā pret centrālo rūtiņu un Kima gājienu. Tādā gadījumā, ja Kims pēc sava gājiena iegūs kādu punktu, Ilmārs simetriski arī iegūs punktu. Tātad Ilmārs iegūs tieši tikpat punktu, cik Kims. Papildus tam varam ievērot, ka Ilmārs būs tas, kurš aizpildīs vidējo rindu un vidējo kolonnu simetrijas dēļ. Tā kā visi skaitļi tajās būs simetriski, izņemot to, ka pa vidu ir ierakstīts -1, tad varam secināt, ka reizinājums būs -1 un Ilmārs iegūs papildu 2 punktus, kas ļaus viņam uzvarēt.

b) Ja $n = 2022$, uzvar Kims. Viņš katru savu gājienu veic simetriski pret vertikālo tabulas simetrijas asi un Ilmāra gājienu, izņemot tos brīžus, kad viņam ir jāveic gājiens rindā, kurā ir atlikusi tieši viena tukša rūtiņa. Tajos brīžos viņš izvēlas tādu skaitli, lai šīs rindas reizinājums būtu -1. Simetrijas dēļ Kims vienmēr būs tas, kurš aizpilda kādu rindu, un šī stratēģija garantēs viņam 2022 punktus par rindām. Papildus varam ievērot, ka simetrijas dēļ katru reizi, kad Ilmārs aizpildīs kādu kolonnu, tad nākamajā gājienā Kims aizpildīs simetrisko kolonnu. Līdz ar to Ilmārs aizpildīs tieši 1011 kolonnas, kas viņam dod ne vairāk kā 1011 punktus. Tātad Kims uzvarēs.