Atklātā matemātikas olimpiāde

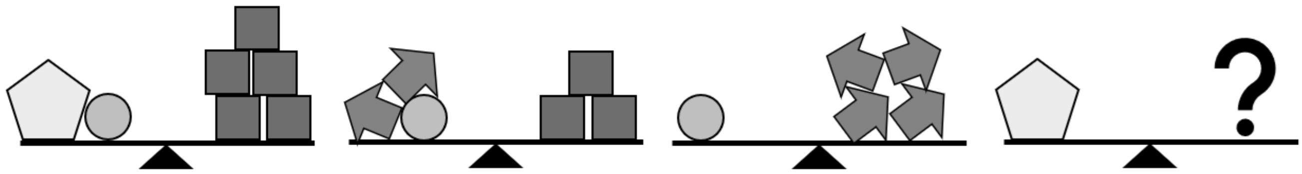
5. klase

5.1. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

5.2. Pa rūtiņu līnijām uzzīmē tādu sešstūri, kuram perimetra un laukuma vērtības sakrīt! *Piezīme*. Laukums ir sešstūri veidojošo rūtiņu skaits un perimetrs ir rūtiņu malu, kas pilnībā atrodas uz robežas, skaits.

5.3. Uz teātra izrādi tika izgatavotas 250 biļetes un vismaz puse no biļetēm tika pārdotas. Zināms, ka tieši trešdaļa no skatītājiem bija skolēni, tieši piektdaļa – studenti un tieši septītdaļa – pensionāri. Cik biļetes tika pārdotas?

5.4. Zināms, ka svari (a), (b) un (c) atrodas līdzsvarā. Cik bultiņu jāliek jautājuma zīmes vietā, lai svari (d) atrastos līdzsvarā? Atbildi pamatot!



(a) (b) (c) (d)

5.5. Katrai no trīs meitenēm Elīnai, Gunai un Marutai patīk viena no krāsām: zaļa, dzeltena, oranža (katrai cita krāsa), bet abas pārējās krāsas nepatīk. Zināms, ka tieši viens no apgalvojumiem ir patiess:

- Gunai nepatīk oranža krāsa;
- Elīnai nepatīk zaļa krāsa;
- Elīnai nepatīk oranža krāsa.

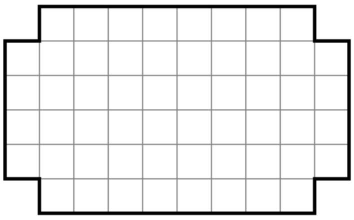
Kāda krāsa patīk katrai meitenei? Atbildi pamatot!

Atklātā matemātikas olimpiāde

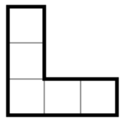
6. klase

6.1. Uz papīra lapas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2022 (katrs vienu reizi). Vispirms Amanda ar sarkanu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 3. Tad viņa ar zilu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 5. Un visbeidzot viņa ar zaļu zīmuli apvilka visus skaitļus, kas dalās ar 7. Cik ir tādu skaitļu, kas ir apvilkti ar vismaz divām dažādām krāsām?

6.2. Parādi, kā no 1. att. dotās rūtiņu lapas var izgriezt desmit figūras, kādas dotas 2. att. (iezīmē, kur jāiet griezuma līnijām)! Figūras var būt arī pagrieztas.



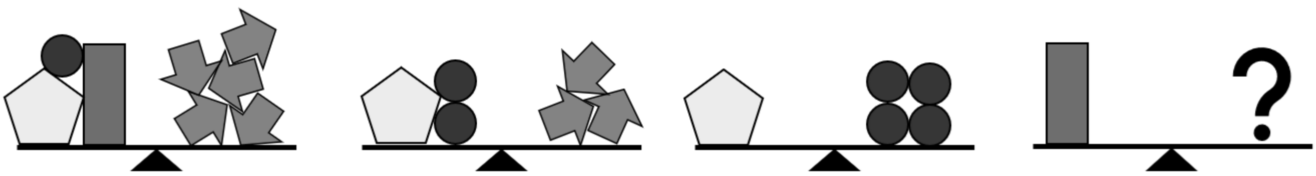
1. att.



2. att.

6.3. Tumšā rudens vakarā Māris izdomāja saskaitīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz n, kur n ir kāds naturāls skaitlis. Vai var gadīties, ka Māris ieguva summu, kuras pēdējais cipars ir **a)** 8, **b)** 9?

6.4. Zināms, ka svari (a), (b) un (c) atrodas līdzsvarā. Cik aplīšu jāliek jautājuma zīmes vietā, lai svari (d) atrastos līdzsvarā? Atbildi pamatot!



(a) (b) (c) (d)

6.5. Daži no 273 ciema iedzīvotājiem visu laiku saka patiesību, pārējie visu laiku melo. Katram no ciema iedzīvotājiem ir tieši viena mīļākā nedēļas diena. Aptaujājot iedzīvotājus, viņiem tika lūgts atbildēt uz septiņiem jautājumiem, katrā no tiem izvēloties vienu no dotajām atbildēm:

Vai pirmdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai otrdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai trešdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai ceturtdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai piektdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai sestdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai svētdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē

Uz katru jautājumu saņemto apstiprinošo ("jā") atbilžu skaits bija šāds: pirmdiena – 51, otrdiena – 52, trešdiena – 53, ceturtdiena – 54, piektdiena – 55, sestdiena – 56, svētdiena – 57. Cik ciema iedzīvotāji visu laiku melo?

Atklātā matemātikas olimpiāde

7. klase

7.1. Uz tāfeles bija uzrakstīts šāds teksts: $A869B$. Katrs no burtiem A un B jāaizstāj ar vienu ciparu (tie var būt arī vienādi) tā, lai iegūtais piecciparu skaitlis dalītos ar 15. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

7.2. Vai var atrast **a)** 5; **b)** 15 naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus), kuru summa ir vienāda ar to reizinājumu?

7.3. Parādi, kā plaknē novilkt 6 taisnes un uz tām atlikt 7 punktus tā, lai uz katras no taisnēm būtu atzīmēti tieši trīs punkti!

7.4. Uz galda ir kaudze ar konfektēm. Karlsons un Brālītis pēc kārtas izdara gājienus, Karlsons sāk spēli. Vienā gājienā spēlētājs var paņemt no kaudzes un apēst vai nu vienu, vai divas konfektes. Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt, ja sākumā kaudzē ir **a)** 6 konfektes; **b)** 2022 konfektes?

7.5. Daži no 272 ciema iedzīvotājiem visu laiku saka patiesību, pārējie visu laiku melo. Katram no ciema iedzīvotājiem ir tieši viena mīļākā nedēļas diena. Aptaujājot iedzīvotājus, viņiem tika lūgts atbildēt uz septiņiem jautājumiem, katrā no tiem izvēloties vienu no dotajām atbildēm:

Vai pirmdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai otrdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai trešdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai ceturtdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai piektdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai sestdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē
Vai svētdiena ir Jūsu mīļākā diena?	☐ jā	☐ nē

Uz katru jautājumu saņemto apstiprinošo ("jā") atbilžu skaits bija šāds: pirmdiena – 53, otrdiena – 54, trešdiena – 55, ceturtdiena – 56, piektdiena – 57, sestdiena – 58, svētdiena – 59. Cik ciema iedzīvotāji visu laiku melo?

Atklātā matemātikas olimpiāde

8. klase

8.1. Uz tāfeles bija uzrakstīts šāds teksts: $N597M$. Katrs no burtiem N un M jāaizstāj ar vienu ciparu (tie var būt arī vienādi) tā, lai iegūtais piecciparu skaitlis dalītos ar 12. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

8.2. Skolēnam tika uzdots mājas darbs, kurā bija 20 uzdevumi. Par katru pareizi atrisinātu uzdevumu tiek doti 8 punkti, par katru nepareizi atrisinātu uzdevumu tiek atņemti 5 punkti, ja uzdevums nav risināts, tad par to ir 0 punkti. Cik uzdevumus atrisināja skolēns, ja kopā viņš ieguva 13 punktus?

8.3. Trijstūrī ABC uz malas BC atlikts tāds punkts D, ka $AD = BD$ un $AB = DC = AC$. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus!

8.4. Vai pa apli var uzrakstīt skaitļus
- **a)** 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;
- **b)** 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;

tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5?

8.5. Piecu draugu lokā izvērsās strīds, kurā:
- Elīna saka: “Es vienmēr saku taisnību.”
- Guna saka: “Gan Elīna, gan Agnese melo.”
- Maruta saka: “Visi saka taisnību.”
- Agnese saka: “Elīna melo.”
- Emīls saka: “Visi melo.”

Cik draugu saka taisnību?

Atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

9.1. Cik ir tādu četrciparu skaitļu $\overline{ABBA}$, kas dalās ar 99? (Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, dažādiem burtiem var atbilst arī vienādi cipari.)

9.2. Vai noteikti $x+\frac{9}{x}>y+\frac{9}{y}$, ja **a)** $x>y>0$; **b)** $x>y>3$?

9.3. Taisnleņķa trijstūrī ACB ($\sphericalangle C=90°$) novilkts augstums CH. Uz malas AC atlikts punkts K tā, ka $\sphericalangle CBK=\sphericalangle BAC$. Pierādīt, ka taisne CH dala nogriezni BK divās vienādās daļās!

9.4. Vai pa apli var uzrakstīt skaitļus
- **a)** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13;
- **b)** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14;

tā, lai katri divi blakus esoši skaitļi atšķirtos par 3; 4 vai 5?

9.5. Mākslas muzeja plānojums ir taisnstūris ar izmēriem **a)** 8×9; **b)** 9×11 rūtiņas, kur viena rūtiņa atbilst vienai muzeja telpai. Muzeja vadītājs vēlas izveidot apmeklētāju maršrutu, kuram izpildās šādas īpašības:
- maršruts sākas kādā no rūtiņām (telpām), kas atrodas pie taisnstūra malas;
- apmeklētājs no vienas rūtiņas (telpas) var pāriet uz citu rūtiņu (telpu), ja tām ir kopīga mala;
- apmeklētājs maršruta laikā apmeklē katru rūtiņu (telpu) tieši vienu reizi;
- maršruts beidzas rūtiņā (telpā), kas atrodas pie taisnstūra malas blakus maršruta sākuma rūtiņai (telpai).

Vai muzeja vadītājs var izveidot šādu maršrutu?

Atklātā matemātikas olimpiāde

10. klase

10.1. Kāds ir skaitļa 2022^{2022} pēdējais cipars?

10.2. Apskatām n pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus. Vai var gadīties, ka tos var sadalīt divās grupās tā, ka katras grupas skaitļu summa ir pirmskaitlis, ja **a)** $n = 8$, **b)** $n = 10$? Katrā grupā jābūt vismaz 2 skaitļiem.

10.3. Uz taisnleņķa trijstūra ACB hipotenūzas AB atlikts punkts O, kas ir centrs riņķa līnijai ar rādiusu 3, kura pieskaras abām katetēm. Aprēķināt trijstūra ACB laukumu, ja $OB = 5$.

10.4. Doti reāli skaitļi a, b un c, kuriem $abc = 1$. Pierādīt, ka vienādojumam

$$ax^4 + (2b + a)x^2 - 2cx + b^3c + bc + bc^3 = 0$$

nav reālu sakņu!

10.5. Restorānā ieradās pieci deputāti un pirms pusdienām daži no viņiem paspieda viens otram roku. Zināms, ka, ja kādi divi deputāti nepaspieda viens otram roku, tad abi kopā viņi izdarīja vismaz piecus rokasspiedienus. Pierādīt, ka deputātus var sasēdināt ap apaļu galdu tā, lai katrs būtu paspiedis roku abiem saviem blakussēdētājiem!

Atklātā matemātikas olimpiāde

11. klase

11.1. Vai skaitli 2022 var izteikt kā divu veselu skaitļu kubu summu?

11.2. Kādām reālām p vērtībām vienādojuma $x^2+x+p=0$ sakņu kvadrātu summa ir 16?

11.3. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D tā, ka $AD=8$ un $BD=1$. Aprēķināt malas BC garumu, ja trijstūra leņķa B lielums ir $120°$.

11.4. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas ir lielāks nekā 3, var vienā vienīgā veidā izteikt kā trīs naturālu skaitļu x, y, z ($x \le y \le z$) summu tā, lai skaitļiem x, y, z izpildītos nevienādība

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \le 1.$$

11.5. Mākslas muzeja plānojums ir taisnstūris ar izmēriem $m \times n$ ($m \ge 2, n \ge 2$) rūtiņas, kur viena rūtiņa atbilst vienai muzeja telpai. Muzeja vadītājs vēlas izveidot apmeklētāju maršrutu, kuram izpildās šādas īpašības:

- maršruts sākas kādā no rūtiņām (telpām), kas atrodas pie taisnstūra malas;
- apmeklētājs no vienas rūtiņas (telpas) var pāriet uz citu rūtiņu (telpu), ja tām ir kopīga mala;
- apmeklētājs maršruta laikā apmeklē katru rūtiņu (telpu) tieši vienu reizi;
- maršruts beidzas rūtiņā (telpā), kas atrodas pie taisnstūra malas blakus maršruta sākuma rūtiņai (telpai).

Kādām m un n vērtībām muzeja vadītājs var izveidot šādu maršrutu?

Atklātā matemātikas olimpiāde

12. klase

12.1. Vai skaitli 2023^2 var izteikt kā trīs veselu skaitļu kubu summu?

12.2. Kādām reālām p vērtībām vienādojuma $x^2+x+p=0$ sakņu kubu summa ir (-16)?

12.3. Trijstūrī ABC no virsotnes A vilktā augstuma garums ir 1, no virsotnes C vilktās mediānas garums arī ir 1, bet augstuma no virsotnes B garums ir $\sqrt{3}$. Kāds var būt šī trijstūra laukums?

12.4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $3\sin x + 4\cos x = 6$.

12.5. Dota rūtiņu tabula $n \times n$. Ilmārs un Kims spēlē šādu spēli. Viņi pēc kārtas kādā vēl tukšā rūtiņā ieraksta skaitli 1 vai -1. Spēli sāk Ilmārs. Ja pēc kāda spēlētāja gājiena tiek aizpildīta kāda rinda vai kolonna, tad tiek aprēķināts tajā esošo skaitļu reizinājums. Ja tas ir vienāds ar -1, tad spēlētājs, kurš veica pēdējo gājienu, iegūst 1 punktu (ja spēlētājs ar savu gājienu vienlaicīgi pabeidz gan rindu, gan kolonnu un katrā skaitļu reizinājums ir -1, tad viņš iegūst divus punktus). Spēle beidzas, kad tabula ir pilnībā aizpildīta. Uzvar spēlētājs, kurš iegūst visvairāk punktu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija, ja **a)** $n=2021$; **b)** $n=2022$?